Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Correction de la série 12

1. Prenons deux isométries hyperboliques de $\mathbb{H}$ que l'on note τ et σ avec exactement un point fixe commun. Quitte à conjuguer, on peut suposer que τ est une translation le long de l'axe imaginaire et que σ fixe 0 mais pas ∞. Les translations τ et σ sont alors respectivement de la forme $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} s & 0 \\ a & 1/s \end{pmatrix}$ avec $s, t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. De plus, quitte à prendre τ^{-1}, on poeut supposer que $t > 1$.

   On a alors $[\tau, \sigma] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ avec $b = \frac{a}{s}(1/t^2 - 1) \neq 0$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\tau^n[\tau, \sigma]\tau^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/t^{2n} & 1 \end{pmatrix}$.

   Tout groupe contenant τ et σ contient donc une suite d'éléments distincts convergeant vers l'identité. Un tel groupe ne peut donc pas être discret, donc pas être fuchsien.

2. i. Dans le modèle du disque de Poincaré, on considère les 4 grands rayons inclus dans l'axe réel, l'axe imaginaire et les deux diagonales engendrées par $1 + i$ et $1 - i$. Pour tout $d \in]0, 1[$, on considère alors les huits intersections de ces droites avec le cercle euclidien centré en 0 et de rayon d. En reliant chaque paire de points consécutifs par une géodésique, on obtient un octogone régulier dont l'angle à chaque sommet tend vers 0 lorsque d tend vers 1 et vers $3\pi/4$ lorsque d tend vers 0, car on tend alors vers une géométrie euclidienne. Par continuité, il existe une valeur de d pour laquelle les angles valent $\pi/4$.

   ii. Pour montrer que Γ est fuchsien, on utilise la même méthode que dans l'exercice 1.iii de la série 10, *i.e.* on montre que l'ensemble $\{\gamma(P) | \gamma \in \Gamma\}$ forme un pavage du plan hyperbolique[1]. Les sommets de ce pavage sont alors envoyés opar tout élément de Γ sur les sommets ; mais puisqu'il existe une plus petite distance strictement positive entre ces sommets, il ne peut pas exister de suite non stationnaire d'éléments de Γ convergeant vers l'identité. Autrement dit, Γ est bien discret donc fuchsien.

   Enfin, pour montrer que P engendre bien un pavage du plan hyperbolique, on remarque que, d'une part, chaque coté est envoyé sur un coté et, d'autre part, qu'un voisinage de tout sommet peut être pavé par les morceaux de 8 octogones.

   iii. Par construction, Σ est une surface compacte orientable. Elle est donc caractérisée par sa caractéristique d'Euler. Celle-ci peut être calculée en considérant la décomposition en cellules induite par la construction. Il y a une unique cellule de dimension 2 correspondant à l'intérieur de P, 4 cellules de dimension 1 car les cotés de P sont identifiés par paires opposées et une seule cellule de dimension 0 car tous les sommets de P sont identifiés. Au final, on a $\xi(\Sigma) = -2$, il s'agit donc du tore à deux trous.

   Cette construction induit trivialement une structure hyperbolique sur l'intérieur de P, mais aussi sur tout voisinage des cotés de P car ceux-ci correspondent à des morceaux de géodésiques hyperboliques. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'il en est de même au voisinage des sommets de P. Pour cela, il faut vérifier qu'un tour autour d'un somet forme bien un angle de 2π. L'étude du tracé dans P d'un tel chemin, *i.e.* en transportant, via Γ, chaque morceau dans P, permet de s'en convaincre vite.

   Le tore à deux trous peut donc être muni d'une structure hyperbolique.

[1] P est alors un domaine fondamental pour Γ

iv. Pour adapter cette construction au cas du tore, il faudrait construire un carré hyperbolique d'angle $\pi/4$, ce qui n'est pas possible car un tel polygone couvrirait alors une surface nulle.

    Elle peut par contre s'adapter à tous les tores à n trous pour $n \geq 2$.