Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Correction de la série 1

1. On remarque d'abord que $I_{\mathscr{C}}$ est une involution, *i.e.* $I_{\mathscr{C}} \circ I_{\mathscr{C}} = \mathrm{Id}$, l'application est donc inversible et il suffit de montrer que $I_{\mathscr{C}}$ est continue.

   Sur $\mathbb{C}^*$, le résultat est clair. En 0 et ∞, on considère les bases de voisinages suivantes :

   $$\{D_r\}_{r>0} \qquad \text{et} \qquad \{\overline{D}_r^C\}_{r>0},$$

   où D_r est le disque ouvert centré en 0 de rayon r et $.^C$ dénote le complémentaire dans $\overline{\mathbb{C}}$.

   On a alors, pour tout $r > 0$, $I_C^{-1}(D_r) = \overline{D}_{\frac{1}{r}}^C$ et $I_C^{-1}(\overline{D}_r^C) = D_{\frac{1}{r}}$, qui sont donc bien des ouverts.

2. Restreinte à $\mathbb{C}^*$, l'aplication $I_{\mathscr{C}}$ peut s'écrire $(z \mapsto z/|z|^2)$ ou encore

   $$I_{\mathscr{C}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \end{array}.$$

   On a alors

   $$\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

   L'application $I_{\mathscr{C}}$ est anticonforme ssi sa différentielle envoie deux vecteurs formant un angle θ sur deux vecteurs formant un angle $-\theta$, *i.e.* si, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a

   $$\frac{\langle \mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)(u), \mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)(v)\rangle}{||\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)(u)||.||\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)(v)||} = -\frac{\langle u, v\rangle}{||u||.||v||}.$$

   Or, par calcul, on a $||\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)(\ .\ )|| = (x^2+y^2).||\ .\ ||$, cela revient donc à

   $$\left\langle (x^2+y^2).\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)\left(u/||u||\right), (x^2+y^2).\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)\left(v/||v||\right)\right\rangle = -\left\langle u/||u||, v/||v||\right\rangle,$$

   autrement dit à ce que la matrice $(x^2+y^2).\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)$ soit orthogonale de déterminant négatif, ce qui est encore équivalent à

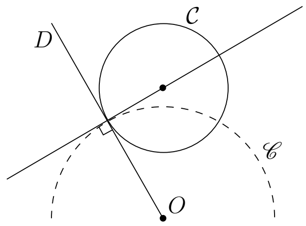
   $$(x^2+y^2)^2.\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)^t\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y) = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Det}\left(\mathrm{Jac}_{I_{\mathscr{C}}}(x,y)\right) < 0.$$

   On le vérifie aisément par le calcul.

3. On note O le centre de $\mathscr{C}$.

   a. On suppose d'abord que $\mathcal{C}$ et $\mathscr{C}$ sont orthogonaux. On note alors $\{P_1, P_2\}$ l'intersection des deux cercles. Par hypothèse, $\mathcal{C}$ est donc l'unique cercle tangent à la droite (OP_1) en P_1 et passant par P_2. Mais puisque $I_{\mathscr{C}}$ préserve les angles donc la notion de tangence, ainsi que les points de $\mathscr{C}$, $I_{\mathscr{C}}(\mathcal{C})$ est également le cercle tangent à la droite (OP_1) en P_1 et passant par P_2.

   On suppose maintenant que $I_{\mathscr{C}}(\mathcal{C}) = \mathscr{C}$. L'image d'un point P étant sur la demi-droite $[OP)$, cette hypothèse implique que le point O est extérieur au cercle $\mathcal{C}$, il existe donc une droite D passant par O et tangente à $\mathcal{C}$. Cette droite étant, elle aussi, globalement invariantes par $I_{\mathscr{C}}$, le singleton $D \cap \mathcal{C}$ est laissé invariant par $I_{\mathscr{C}}$, il s'agit donc d'un point de $\mathscr{C}$. La perpendiculaire à D passant par ce point est donc une tangente de $\mathscr{C}$ et elle passe par le centre de $\mathcal{C}$. Les deux cercles sont donc orthogonaux.

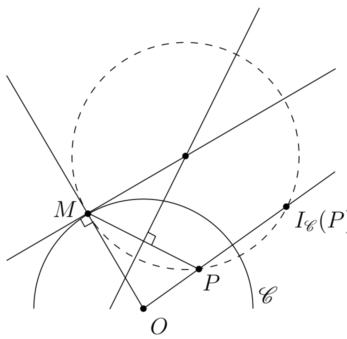


Dans le cas où $\mathcal{C}$ est un cercle passant par ∞, c'est à dire où $\mathcal{C}$ est une droite, alors chacune des deux propostions est équivalente au fait que $\mathcal{C}$ passe par O.

b. Supposons d'abord que $\mathcal{C}$ et $\mathscr{C}$ sont orthogonaux. On a alors $I_{\mathscr{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Or, on sait de plus que $I_{\mathscr{C}}(L) = L$ et donc $I_{\mathscr{C}}(P_1) \in L \cap \mathscr{C} = \{P_1, P_2\}$. Or l'intérieur de $\mathscr{C}$ est envoyé sur l'extérieur de $\mathscr{C}$ et réciproquement, donc $I_{\mathscr{C}}(P_1) = P_2$.

On suppose désormais que $I_{\mathscr{C}}(P_1) = P_2$. Puisque $I_{\mathscr{C}}$ est une involution, on a alors $I_{\mathscr{C}}(P_2) = P_1$. Or $I_{\mathscr{C}}$ envoie l'intérieur de $\mathscr{C}$ sur l'extérieur de $\mathscr{C}$. Le cercle $\mathcal{C}$, passant par P_1 et $I_{\mathscr{C}}(P_1)$, coupe donc nécessairement $\mathscr{C}$ en un point P. Si $P = P_1 = P_2$, alors la droite (OP) est tangente à $\mathcal{C}$ et les deux cercles sont bien orthogonaux. Sinon, les points P, P_1 et P_2 sont tous distincts et $I_{\mathscr{C}}(\mathcal{C})$ est l'unique cercle passant par ces trois points, c'est à dire $\mathcal{C}$.

c. Soit P un point du plan privé de O et de $\mathscr{C}$. D'après la question précédente, $I_{\mathscr{C}}(P)$ est l'intersection distincte de P entre la droite (OP) et n'importe quel cercle orthogonal à $\mathscr{C}$ passant par P. Il suffit donc de tracer un tel cercle. Pour cela on choisit un point M de $\mathscr{C}$ non aligné avec O et P [1]. On trace alors D_1 la tangente à $\mathscr{C}$ en M et D_2 la médiatrice du segment $[PM]$. On vérifie alors facilement que le cercle de centre $D_1 \cap D_2$ passant par P est bien orthogonal à $\mathscr{C}$.



4. Dans la question 3, le fait que $\mathscr{C}$ soit le cercle unité n'est jamais utilisé, le résultat de la question 3.b. reste donc vrai pour un cercle $\mathcal{C}$ quelconque. Les points P_1 et P_2 sont donc les deux intersections de deux cercles distincts orthogonaux à $\mathcal{C}$. Puisque $I_{\mathscr{C}}$ conserve les angles non orientés, l'image de ces deux cercles sont tous les deux orthogonaux à $I_{\mathscr{C}}(\mathcal{C})$. De plus, ils se coupent en deux points respectivement égaux à $I_{\mathscr{C}}(P_1)$ et $I_{\mathscr{C}}(P_2)$. La question 3.b. permet de conclure.

[1] pour s'affranchir de ce choix et ne faire la construction qu'à la règle et au compas sans aucune forme d'arbitraire, on pourra prendre pour M l'intersection de $\mathscr{C}$ avec la perpendiculaire à la droite (OP) passant par O