Géométrie hyperbolique & groupes fuchsien
Série 2

1. Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles disjoints du plan.
 - a. Montrer qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ orthogonale à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$.
En déduire qu'il existe deux points du plan simultanément symétriques par rapport à $\mathcal{C}_1$ et par rapport à $\mathcal{C}_2$.
 - b. Montrer qu'il existe une inversion qui envoie $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur des cercles concentriques.
En déduire une transformation de Moëbius qui envoie $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur des cercles concentriques.
2. Le but de cet exercice est de trouver une transformation de Moëbius envoyant le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ sur le disque de Poincaré $\mathbb{D}$.
Expliciter l'inversion par rapport au cercle de centre $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.
En déduire une transformation de Moëbius F telle que $\text{Im}(F|_{\mathbb{H}}) = \mathbb{D}$.
3. On note toujours F l'application définie dans l'exercice précédent.
 - a. Déterminer l'image par F du demi-cercle unité supérieur.
 - b. Transporter, via F , l'inversion par rapport au cercle unité sur $\mathbb{D}$. Quelle application reconnaît-on ?