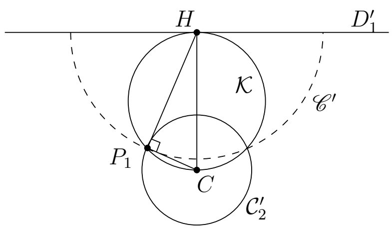
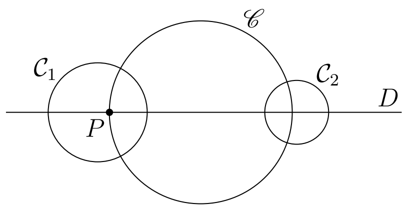
Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Correction de la série 2

1. a. On commence par considérer un cercle centré en un point de $\mathcal{C}_1$ et l'inversion I_1 par rapport à ce cercle. L'application I_1 envoie $\mathcal{C}_1$ sur une droite D_1' et $\mathcal{C}_2$ sur un cercle $\mathcal{C}_2'$ disjoint de D_1'. On considère alors C le centre de $\mathcal{C}_2'$ et H sa projection orthogonale sur D_1'. Les points C et H étant respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de $\mathcal{C}_2'$, le cercle $\mathcal{K}$ de diamètre $[CH]$ coupe le cercle $\mathcal{C}_2'$ en deux points P_1 et P_2. Puisque P_1 est sur $\mathcal{K}$, l'angle $\widehat{CP_1H}$ est droit et le cercle $\mathscr{C}'$ centré en H et passant par P_1 est orthogonal à $\mathcal{C}_2'$. Il est également orthogonal à D_1' et son image réciproque $\mathscr{C}$ par I_1 est donc un cercle simultanément orthogonal à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$.



D'après la question 3.b. de la série 1, les deux intersections du cercle $\mathscr{C}$ avec la droite D passant par les centres des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont symétriques par rapport à $\mathcal{C}_1$ et par rapport à $\mathcal{C}_2$.



b. Soit P une des deux intersections entre D et $\mathscr{C}$. On considère I_2 une inversion par rapport à un cercle centré en P. L'application I_2 envoie D sur elle-même et $\mathcal{K}$ sur une droite D' sécante à D [1]. De plus, I_2 est anticonforme, elle envoie donc $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur des cercles orthogonaux à D et D'. Les centres de ces deux cercles sont donc tous les deux en $D \cap D'$.

Pour obtenir une transformation de Moëbius, il suffit de composer I_2 avec la conjugaison complexe. Cela ne modifie pas la concentricité des cercles.

2 Pour expliciter l'inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}$ de rayon $\sqrt{2}$, centré en $-i$, on se ramène au cas du cercle unité $\mathscr{C}$. Pour ce faire, on conjugue par l'homothétie envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathscr{C}$, à savoir

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2}}(z+i) \end{array}$$

dont l'inverse est

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sqrt{2}z - i \end{array}.$$

[1] l'intersection correspond à l'image de la seconde intersection entre D et $\mathscr{C}$

Cela donne donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $I_{\mathcal{C}}(z) = (f^{-1} \circ I_{\mathscr{C}} \circ f)(z) = \frac{1-i\overline{z}}{\overline{z}-i}$.

L'application $I_{\mathcal{C}}$ échange $-i$ et ∞ et fixe 1 et -1. La droite réelle est donc envoyée sur le cercle unité. De plus, $(\sqrt{2}-1)i$ est également fixé, le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ est donc envoyé sur l'intérieur $\mathbb{D}$ du cercle unité. Enfin, $\mathbb{D}$ est laissé invariant par conjugaison, en composant $I_{\mathcal{C}}$ avec cette dernière, on retrouve bien la transformation de Moëbius usuelle $F\colon z \longrightarrow \frac{1+iz}{z+i}$ envoyant $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$.

3. a. Le demi-cercle unité supérieur est paramétré par $\{e^{i\theta}\}_{\theta\in[0,\pi]}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} F\left(\{e^{i\theta}\}_{\theta\in[0,\pi]}\right) &= \left\{\frac{e^{\theta+\frac{\pi}{2}}+1}{e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}}\right\}_{\theta\in[0,\pi]} \\ &= \left\{\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right\}_{\theta\in[0,\pi[} \bigcup\{-1\} \\ &= \left\{\frac{1-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right\}_{\theta\in[0,\pi[} \bigcup\{-1\} \\ &= [-1,1]. \end{aligned}$$

b. Pour transporter l'inversion par rapport au cercle unité $I_{\mathscr{C}}$, on la conjugue par F. Cela donne pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} (F \circ I_{\mathscr{C}} \circ F^{-1})(z) &= (F \circ I_{\mathscr{C}})\left(\frac{1-iz}{z-i}\right) \\ &= F\left(\frac{\overline{z}+i}{1+i\overline{z}}\right) \\ &= \overline{z}. \end{aligned}$$

L'inversion par rapport au cercle unité induit donc la conjugaison complexe.

NB : Tout cet exercice peut se faire géométriquement. En effet, F composée avec la conjugaison complexe est une inversion par rapport à un cercle de centre $-i$, le cercle unité est donc envoyé sur une droite passant par 1 et -1, points fixés par F et par la conjugaison. Enfin, la droite réelle est laissée invariant par conjugaison.

De fait, deux points symétriques par rapport au cercle unité sont envoyée par $\tau \circ F$, où τ est la conjugaison, sur deux points symétriques par rapport à la droite réelle. Or, τ commute avec F et $I_{\mathscr{C}}$, donc composer par F ou par $\tau \circ F$, cela revient au même. On retrouve bien la conjugaison complexe.