Géométrie hyperbolique & groupes fuchsien

Série 3

1. Soit $F: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ la fonction définie par

$$F: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z \mapsto \begin{cases} \frac{iz+1}{z+i} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \\ \infty & \text{si } z = -i \\ i & \text{si } z = \infty \end{cases} .$$

On a montré dans la série précédente que $F(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$.

On définit les droites hyperboliques du demi-plan de Poincaré, ou $\mathbb{H}$ -droites, comme les demi-droites et les demi-cercles de $\mathbb{H}$ orthogonaux à $\mathbb{R}$. On définit les droites hyperboliques du disque de Poincaré, ou $\mathbb{D}$ -droites, comme les images par F des $\mathbb{H}$ -droites.

- a. Décrire géométriquement les $\mathbb{D}$ -droites issues des $\mathbb{H}$ -droites suivantes :
 - $d_1 := \{z | \Re(z) = 0\} \cap \mathbb{H}$;
 - $d_2 := \{z | |z| = 1\} \cap \mathbb{H}$;
 - $d_3 := \{z | \Re(z) = -1\} \cap \mathbb{H}$ et $d_4 := \{z | \Re(z) = 1\} \cap \mathbb{H}$;
 - $d_5 := \{z | |z - 1/2| = 1/2\} \cap \mathbb{H}$ et $d_6 := \{z | |z + 1/2| = 1/2\} \cap \mathbb{H}$.
 - b. Décrire géométriquement les pré-images par F des diamètres de $\mathbb{D}$.
2. Déterminer toutes les applications homographiques qui permutent les trois éléments 0, 1 et ∞ de $\overline{\mathbb{C}}$.
 3. On pose $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$ l'ensemble des transformations homographiques préservant globalement $\overline{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{S}^1)$ l'ensemble des transformations homographiques envoyant $\overline{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{S}^1$.
 - a. Caractériser les éléments de $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$.
 - b. Donner deux éléments distincts de $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{S}^1)$.
 - c. Pour tout $h \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{S}^1)$, on pose $\mathcal{H}^h(\overline{\mathbb{R}}) = \{h \circ f \circ h^{-1} | f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})\}$. Montrer que $\mathcal{H}^h(\overline{\mathbb{R}})$ ne dépend pas de h et donner une notation plus pertinente pour cet ensemble. Déterminer la forme générale de ses éléments.