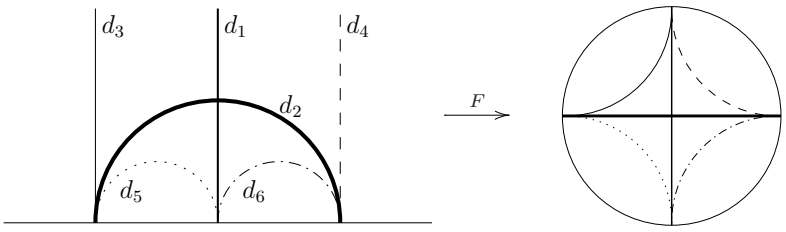
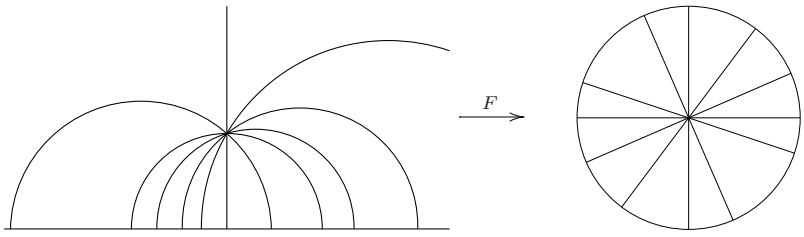
# Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens
Correction de la série 3

1. a. On rappelle que $F$ est conforme, qu'elle échange $\overline{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{S}^1$ et envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$.
   - La $\mathbb{H}$–droite $d_1$ passe par $i$ et coupe perpendiculairement l'axe réel en 0. De fait, son image passe par 0 et est perpendiculaire au cercle unité en $-i$. Il s'agit donc du segment $[-i, i]$.
   - La $\mathbb{H}$–droite $d_2$ est perpendiculaire à l'axe réel en 1 et $-1$. Son image est donc le segment $[-1, 1]$.
   - La $\mathbb{H}$–droite $d_3$ est perpendiculaire à l'axe réel en $-1$ et est tangente à $d_1$ en $\infty$. Son image est donc perpendiculaire à $S^1$ en $-1$ et tangente à $[-i, i]$ en $i$. Cela correspond au quart de cercle sud-est de rayon 1 centré en $i - 1$.
     Quant à $d_4$, il s'agit de l'image de $d_3$ par réflexion selon l'axe imaginaire, stable par $F$. Son image est donc le quart de cercle symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
   - Concernant $d_5$ et $d_6$, ce sont les symétriques de $d_3$ et $d_4$ par rapport à $\mathbb{S}^1$, leurs images sont donc les deux quarts de cercle obtenus par symétrie selon l'axe réel.




   b. Les diamètres de $\mathbb{S}^1$ correspondent à toutes les droites perpendiculaires à $\mathbb{S}^1$ passant par 0. Leurs pré-images correspondent donc à toutes les demi-droites (dans $\overline{\mathbb{C}}$) perpendiculaires à l'axe réel et passant par $i$.




2. Soit $h$ une homographie permutant 0, 1 et $\infty$.
   - Si $h$ fixe $\infty$, alors elle est de la forme $(z \mapsto az + b)$ et donc $h = \mathrm{Id}$ ou $(z \mapsto 1 - z)$.
   - Si $h(\infty) = 0$ alors en composant avec $(z \mapsto {}^1\!/_z)$, on retourne le cas précédent et on a donc $h = (z \mapsto {}^1\!/_z)$ ou $(z \mapsto \frac{1}{1-z})$.
   - Si $h(\infty) = 1$ alors on compose par $(z \mapsto \frac{z}{z-1})$ et on trouve $h = (z \mapsto \frac{z}{z-1})$ ou $(z \mapsto \frac{z-1}{z})$.

   Pour chaque permutation de 0, 1 et $\infty$, il y a donc une unique homographie la réalisant.

Une autre solution consiste à utiliser la conservation du birapport par les homographies. Par exemple, si on recherche l'homographie $h$ qui permute circulairement et dans cet ordre 0, 1 et $\infty$, on a alors

$$z = \frac{(z-0)(1-\infty)}{(z-\infty)(1-0)} = [z,0,1,\infty] = [h(z),1,\infty,0] = \frac{(h(z)-1)(\infty-0)}{(h(z)-0)(\infty-1)} = \frac{h(z)-1}{h(z)},$$

ce qui donne $h(z) = \frac{1}{1-z}$.

3. a. Soit $h \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$. La fonction $h$ s'écrit alors sous la forme $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec $ac \neq 0$, et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R}$, *i.e.* $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\overline{a}x+\overline{b}}{\overline{c}x+\overline{d}}$. En réduisant au même dénominateur, on obtient alors

$$\begin{cases} \overline{a}c \in \mathbb{R} \\ \overline{b}d \in \mathbb{R} \\ \overline{a}d + \overline{b}c \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Quitte à composer par $(z \mapsto 1/z)$, on peut supposer $a \neq 0$ et même, quitte à diviser, $a = 1$. On a alors $c \in \mathbb{R}$.

La seconde équation donne $\mathrm{Arg}(b) = \mathrm{Arg}(d) := \theta \in [0, 2\pi[$. La troisième équation donne alors $|d|e^{-i\theta} + c|b|e^{i\theta} \in \mathbb{R}$ ou encore $|d|\sin(\theta) - c|b|\sin(\theta) = (|d| - c|b|)\sin(\theta) = 0$. Or $|d| - c|b| \neq 0$ car sinon $ad - bc = 0$. Donc $\sin(\theta) = 0$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, il est clair que toute homographie à coefficients réels est dans $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$.

b. On peut prendre la fonction $F$ du premier exercice et sa composé à droite avec n'importe quel élément de $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$.

c. Soit $h \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{S}^1)$. Pour tout $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$, il est clair que $h \circ f \circ h^{-1}$ préserve globalement $\mathbb{S}^1$. Réciproquement, pour toute homographie préservant $\mathbb{S}^1$, il est clair que $h^{-1} \circ f \circ h$ est un élément de $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$. L'ensemble $\mathcal{H}^h(\overline{\mathbb{R}})$ correspond donc aux homographies préservant globalement $S^1$. Il ne dépend donc pas de $h$ et peut être noté $\mathcal{H}(\mathbb{S}^1)$.

On considère maintenant $F \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$ définie plus haut et un élément quelconque $f$ de $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}})$, donc à coefficients $a$, $b$, $c$ et $d$ réels. On pose $\alpha = (a-d) + i(b+c)$ et $\beta = (c-b) + i(a+d)$. Le calcul donne alors, pour $z \in \overline{\mathbb{C}}$ générique, $(F \circ f \circ F^{-1})(z) = \frac{\beta z - \overline{\alpha}}{\alpha z - \overline{\beta}}$.

Réciproquement, on peut remonter les calculs car

$$\mathrm{Det}\big((a,b,c,d) \mapsto (a+d, a-d, b+c, c-b)\big) = 4 \neq 0$$

et

$$\left(\mathrm{Det}\left(\frac{\beta z - \overline{\alpha}}{\alpha z - \overline{\beta}}\right) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 0\right) \Leftrightarrow (ad - bc = 0).$$

Au final, les éléments de $\mathcal{H}(\mathbb{S}^1)$ sont de la forme $\left(z \mapsto \frac{\beta z - \overline{\alpha}}{\alpha z - \overline{\beta}}\right)$.