

Géométrie hyperbolique & groupes fuchsien

Série 4

1. Soit $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une homographie qui préserve le disque de Poincaré. On impose $h^{-1}(0) = a \in \mathring{\mathbb{D}}$ et $h^{-1}(1) = p \in \partial\mathbb{D}$.
 - a. En étudiant l'image par h de $1/\bar{a}$, déterminer h à une constante près.
 - b. Déterminer h .
2. Montrer de façon géométrique (sans utiliser l'invariance du birapport par homographie) que le birapport de quatre points est réel si et seulement si ces quatre points sont cocycliques.
3. On rappelle que la métrique hyperbolique en un point $z \in \mathbb{H}$ est donnée par $\frac{ds}{\text{Im}(z)}$.
 - a. Calculer la distance hyperbolique entre deux points $(a + re^{i\theta})$ et $(a + re^{i\theta'})$ de $\mathbb{H}$ (*i.e.* le long d'une $\mathbb{H}$ -droite, cf exercice 1 de la série 3), avec $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $\theta, \theta' \in]0, \pi[$.
 - a'. (subsidaire) Calculer la longueur hyperbolique du segment euclidien entre ces deux même points et comparer avec la distance calculée précédemment.
 - b. Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{H}$ situés à une distance hyperbolique $d > 0$ de l'axe imaginaire (*i.e.* dont la distance au projeté orthogonale, au sens hyperbolique, sur l'axe imaginaire est égale à d).
 - c. Déterminer la médiatrice hyperbolique de deux points $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ (*i.e.* l'ensemble des points de $\mathbb{H}$ à égale distance hyperbolique de z_1 et de z_2).