Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

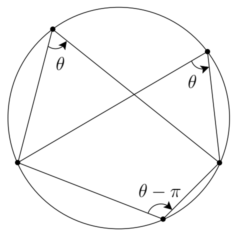
Correction de la série 4

1. a. Le point $1/\overline{a}$ est le symétrique de a par rapport au cercle unité, son image par h est donc le symétrique de $h(a) = 0$ par rapport à ce même cercle, laissé invariant par h. L'homographie h envoie donc a sur 0 et $1/\overline{a}$ sur ∞. Elle est donc de la forme $k\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ avec $k \in \mathbb{C}$.

   b. On sait que $h(1) = k\frac{1-a}{1-\overline{a}} = p$, donc $k = p\frac{|1-a|^2}{(1-a)^2}$, ce qui achève de déterminer h.

   Commentaire : Cet exercice montre qu'une homographie de $\mathbb{D}$ dans lui-même est déterminée par les images réciproques de 0 et de 1. Les homographies de $\mathbb{D}$ ont donc 3 degrés de libertés, à savoir les coordonnées de a et l'argument de p.

2. Quatres points distincts z_1, z_2, z_3 et z_4 sont cocycliques si et seulement si les angles $\theta_1 = \widehat{z_1 z_2 z_3}$ et $\theta_2 = \widehat{z_1 z_4 z_3}$ sont égaux modulo π.



   Or $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} = \frac{|z_1-z_2|}{|z_3-z_2|}e^{i\theta_1}$ et $\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4} = \frac{|z_1-z_4|}{|z_3-z_4|}e^{i\theta_2}$, donc $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \alpha e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ avec $\alpha > 0$. Les quatres points sont donc cocycliques si et seulement si leur birapport est réel.

3. a. Les deux points considérés sont sur le demi-cercle de centre $a \in \mathbb{R}$ et de rayon r. La géodésique hyperbolique reliant ces deux points est donc sur ce cercle ; on la paramétrise par $\gamma(t) = a + re^{it}$ pour $t \in [\theta, \theta']$ en supposant, sans perte de généralité, que $\theta \leq \theta'$. On a alors

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_\theta^{\theta'} \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}(\gamma(t))}dt \\
&= \int_\theta^{\theta'} \frac{\sqrt{r^2\cos^2(t) + r^2\sin^2(t)}}{r\sin(t)}dt \\
&= \int_\theta^{\theta'} \frac{dt}{\sin(t)} = \Big[\ln\Big(\tan\big(t/2\big)\Big)\Big]_\theta^{\theta'} = \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right).
\end{aligned}$$

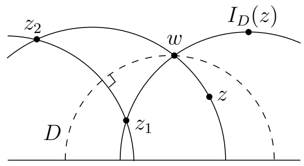
   b. Les $\mathbb{H}$–droites orthogonales à l'axe imaginaire sont exactement les demi-cercles supérieurs centrés en 0. Le point $re^{i\theta}$ se projette donc en ir. Or, d'après la question a., la distance hyperbolique entre $re^{i\theta}$ et ir ne dépend que de l'argument θ et vaut $|\ln(\tan\big(\theta/2\big))|$. En posant $\alpha = 2\arctan\big(e^{-d}\big)$, l'ensemble des points situés à une distance d de l'axe imaginaire correspond donc à la réunion des deux demi-droites passants par 0 et formant les angles $(\pi/2 - \alpha)$ et $(\alpha - \pi/2)$ avec l'axe imaginaire.

   c. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{H}^2$, on note $d_{\mathbb{H}}(x, y)$ la distance hyperbolique entre ces deux points. On note aussi Δ la $\mathbb{H}$–droite passant par z_1 et z_2. On considère alors D, la $\mathbb{H}$–droite orthogonale à Δ en l'unique point z_0 satisfaisant $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_0) = d_{\mathbb{H}}(z_0, z_2)$.

L'inversion I_D par rapport à D stabilise $\mathbb{H}$. Elle stabilise également Δ d'après l'exercice 3. de la série 1 puisque D et Δ sont orthogonales. Mais puisque I_D préserve les distances hyperboliques, z_1 et z_2 sont échangés par I_D et tout point de D est à égale distance de z_1 et de z_2.

Réciproquement, supposons par l'absurde qu'un point $z \in \mathbb{H} \setminus D$ est à égale distance $d > 0$ de z_1 et de z_2. Alors z, $I_D(z)$ et $I_\Delta(z)$ sont tous les trois sur les cercles hyperboliques de rayon d et de centres z_1 et z_2. Or, ces trois points sont distincts car dans des composantes connexes distinctes de $\mathbb{H} \setminus (D \cup \Delta)$. Cela contredit l'exercice 2 de la série 5.

[Solution alternative pour la réciproque : Supposons par l'absurde qu'un point $z \in \mathbb{H} \setminus D$ est à égale distance $d > 0$ de z_1 et de z_2. Sans perte de généralité, on peut supposer que z est dans la même composante connexe de $\mathbb{H} \setminus D$ que z_1. Alors I_D échange la $\mathbb{H}$–droite passant par z_1 et $I_D(z)$ et celle passant par z_2 et z. L'intersection de ces deux $\mathbb{H}$–droites, notée w, est donc laissé fixe par I_D, ce qui induit $w \in D$. De plus, z_1 et $I_D(z)$ étant dans des composantes connexes de $\mathbb{H} \setminus D$ distincts, on a $w \in [z_1, I_D(z)]_{\mathbb{H}}$.



On en déduit que

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, I_D(z)) = d_{\mathbb{H}}(z_1, w) + d_{\mathbb{H}}(w, I_D(z)) = d_{\mathbb{H}}(z_1, w) + d_{\mathbb{H}}(w, z).$$

Or $d_{\mathbb{H}}(z_1, I_D(z)) = d_{\mathbb{H}}(z_2, z) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z)$, ce qui contredit le cas d'égalité dans l'inégalité du triangle puisque z_1, w et z ne sont pas alignés.]

La médiatrice hyperbolique de z_1 et z_2 correspond donc exactement à la $\mathbb{H}$–droite D.