Géométrie hyperbolique & groupes fuchsien

Série 5

1. Soit (γ_1, γ_2) et (γ'_1, γ'_2) deux paires de géodésiques se rencontrant à angle droit. Montrer qu'il existe une isométrie hyperbolique envoyant (γ_1, γ_2) sur (γ'_1, γ'_2) .
2. Dans cet exercice, on veut montrer que les cercles hyperboliques correspondent aux cercles euclidiens inclus dans $\mathbb{H}$.
 - a. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon r , centré en $i\alpha$ avec $r < \alpha$. On note A et B , d'affixes respectifs z_A et z_B , les intersections de $\mathcal{C}$ avec l'axe imaginaire.
 - i. Exprimer z_M , l'affixe du milieu M du segment hyperbolique $[AB]_{\mathbb{H}}$, en fonction r et α .
 - ii. Soit $\mathcal{C}$ un cercle centré en un point de la droite réelle et passant par M . Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ sont orthogonaux.
 - iii. Soit γ une géodésique non verticale passant par M . Elle coupe $\mathcal{C}$ en deux points que l'on note E et F . En considérant un cercle centré en l'une des extrémités¹ de γ et passant par M , montrer que $d_{\mathbb{H}}(E, M) = d_{\mathbb{H}}(F, M) = d_{\mathbb{H}}(A, M)$.
 - b.
 - i. Montrer que les cercles hyperboliques de $\mathbb{H}$ correspondent exactement aux cercles euclidiens inclus dans $\mathbb{H}$.
 - ii. Expliciter l'application qui, à partir du centre et du rayon d'un cercle hyperbolique, donnent le centre et le rayon du cercle euclidien correspondant.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{H}$ pour qu'il existe une isométrie hyperbolique envoyant respectivement z_1 et z_2 sur w_1 et w_2 .

¹*i.e.* intersections de $\mathbb{R}$ avec la fermeture de γ dans $\mathbb{C}$