Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Correction de la série 5

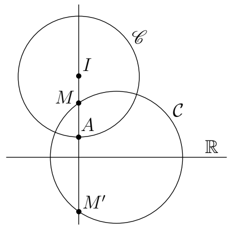
1. Considérons d'abord f_1 et f'_1 deux inversions par rapport à des cercles centrés, respectivement, sur une des extrémités de γ_1 et de γ'_1. Ces deux inversions envoient alors, respectivement, leur géodésique associée sur une demi-droite verticale. On note τ la translation horizontale envoyant $f_1(\gamma_1)$ sur $f'_1(\gamma'_1)$.

   Comme toutes ces appications sont conformes ou anti-conforme, les $\mathbb{H}$–droites $(\tau \circ f_1)(\gamma_2)$ et $f'_1(\gamma'_2)$ sont toutes deux perpendiculaires à une même $\mathbb{H}$–droite verticale, elles sont donc homothétiques l'une de l'autre. En notant h l'homothétie envoyant $(\tau \circ f_1)(\gamma_2)$ sur $f'_1(\gamma'_2)$, l'application $(f'_1 \circ h \circ \tau \circ f_1)$ est bien une isométrie hyperbolique envoyant (γ_1, γ_2) sur (γ'_1, γ'_2).

2. a. Supposons, sans perte de généralité que $|z_A| < |z_B|$.

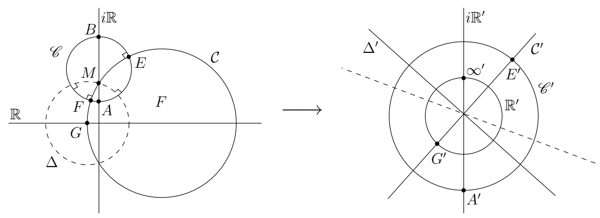
   i. Pour $\tau \geq \alpha - r$, on paramétrise par $\gamma : \begin{array}{ccc} [\alpha - r, \tau] & \rightarrow & \mathbb{H} \\ t & \mapsto & it \end{array}$ le segment hyperbolique qui relie A au point T d'affixe $i\tau$. On en déduit par calcul que $d_{\mathbb{H}}(A,T) = \ln\left(\frac{\tau}{\alpha - r}\right)$ et donc $d_{\mathbb{H}}(A,M) = \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}}(A,B) = \ln\left(\sqrt{\frac{\alpha+r}{\alpha-r}}\right)$. Au final, on a $z_M = i\sqrt{a^2 - r^2}$.

   ii. Pour montrer que les deux cercles sont orthogonaux, on va utiliser la question 3.b de la série 1. Pour ce faire, on considère $M' \in \mathcal{C}$ d'affixe $\overline{z_M}$.



   En notant I le centre de $\mathscr{C}$, on a alors $\overline{IM}.\overline{IM'} = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - r^2})(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - r^2}) = r^2$ et donc $I_{\mathscr{C}}(M) = M'$, ce qui permet de conclure.

   iii. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de $\mathbb{C}$ contenant γ et Δ le cercle centré en un point $G \in \mathscr{C} \cap \mathbb{R}$ passant par M. On choisit pour F l'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathcal{C}$ situé à l'intérieur de Δ, *i.e.* dans la même composante connexe de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ que G.
   Pour montrer que $d_{\mathbb{H}}(E,M) = d_{\mathbb{H}}(A,M)$, on va montrer que E est le symétrique de A par rapport à Δ. D'après la question précédente, $\mathcal{C}$ et Δ sont orthogonaux à $\mathscr{C}$. Donc, notamment, le symétrique de A par rapport à Δ est sur $\mathcal{C}$. Il ne reste plus, pour conclure, qu'à montrer que G, A et E sont alignés. Pour cela, on choisit un cercle centré en M et on regarde l'image du problème par inversion selon ce cercle. On dénote l'image d'un objet par cette inversion en ajoutant un prime au nom de cet objet.
   Dans cette construction
   - $i\mathbb{R}'$ est une droite passant par ∞' ;
   - $\mathbb{R}'$ est un cercle orthogonal à $i\mathbb{R}'$ passant par ∞' ;
   - $\mathcal{C}'$ est une droite orthogonale à $\mathbb{R}'$ dont une des intersection est G' ;
   - Δ' est un cercle distinct de $\mathcal{C}'$ mais également orthogonal à $\mathbb{R}'$;
   - $\mathscr{C}'$ est un cercle orthogonal à $\mathcal{C}'$ et à Δ', donc concentrique avec $\mathbb{R}'$ et contenant ce dernier. De plus, A' est l'intersection de $\mathscr{C}'$ avec $i\mathbb{R}'$ situé du même coté de Δ que G et E' l'intersection de $\mathscr{C}'$ avec $\mathcal{C}'$ situé, lui, de l'autre coté de Δ.



Maintenant, les positions de G', A', E' et ∞' étant symétriques par rapport à l'une des bissectrices de $i\mathbb{R}'$ et $\mathcal{C}'$, les quatre points sont clairement cocycliques, ce qui implique que leurs antécédents soient alignés.
Autrement, on pourra aussi remarquer que $\mathcal{C}$ est envoyé sur $i\overline{\mathbb{R}}$, ce qui pemet aussi de conclure puisque $\{E, F\}$ et $\{A, B\}$ sont respectivement égaux à $\mathcal{C} \cap \mathscr{C}$ et $i\overline{\mathbb{R}} \cap \mathscr{C}$.
De même, on montre que $d_{\mathbb{H}}(F, M) = d_{\mathbb{H}}(B, M) = d_{\mathbb{H}}(A, M)$.

b. i. D'après la question a., pour toute géodésique non verticale γ passant par M, les deux points à une distance $d_{\mathbb{H}}(A, M) = \ln\left(\sqrt{\frac{\alpha+r}{\alpha-r}}\right)$ de M correspondent aux deux intersections de γ avec $\mathscr{C}$. Par définition de M, cela reste vrai pour la demi-droite verticale passant par M.
Réciproquement, pour tout point T de $\mathscr{C}$, la question a. appliquée à la géodésique passant par M et T montre que $d_{\mathbb{H}}(T, M) = d_{\mathbb{H}}(A, M)$.
Enfin, quitte à faire une translation horizontale, il est clair que le raisonnement précédent s'applique à tout cercle euclidien inclu dans $\mathbb{H}$. L'application qui envoie le cercle euclidien de rayon $r > 0$, centré en $(\beta + i\alpha)$ sur le cercle hyperbolique de rayon $\ln\left(\sqrt{\frac{\alpha+r}{\alpha-r}}\right)$, centré en $(\beta + i\sqrt{\alpha^2 - r^2})$ induit donc une bijection entre les cercles euclidiens de $\mathbb{H}$ et les cercles hyperboliques.

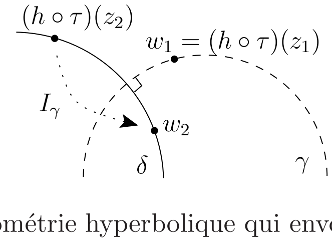
ii. En inversant les applications explicités précédemment, on obtient :

$$\big((x + iy, R) \mapsto \big(x + iy\cosh(R), y\sinh(R)\big)\big).$$

3. Il est clair que les distances hyperboliques entre z_1 et z_2 d'une part et w_1 et w_2 d'autre part doivent être égales. Réciproquement, montrons que cette condition est suffisante.

Pour cela, on commence par envoyer z_1 sur w_1 en utilisant une translation horizontale τ puis une homothétie h. Si $(h \circ \tau)(z_2) = w_2$, le travail est terminé. Sinon, on considère γ la $\mathbb{H}$–droite passant par w_1 et perpendiculaire à la $\mathbb{H}$–droite δ passant par w_2 et $(h \circ \tau)(z_2)$. Si $w_1 \in \delta$, cette dernière peut être construite en traçant la tangente T à δ en w_1 et en considérant la $\mathbb{H}$–droite centrée en $T \cap \overline{\mathbb{R}}$, passant par w_2. Autrement, il s'agit de la $\mathbb{H}$–droite passant par w_1 et le symétrique de w_1 par rapport à δ.

On considère maintenant I_γ l'inversion par rapport à γ. Par construction, $(I_\gamma \circ h \circ \tau)(z_2)$ est encore sur δ et, par hypothèse, à égale distance de $w_1 = I_\gamma(w_1)$ que w_2. D'après l'exercice 2, il n'y a, au plus, que deux points vérifiant ces deux conditions. On a donc $(I_\gamma \circ h \circ \tau)(z_2) = w_2$ ou $(h \circ \tau)(z_2)$ mais ce second cas n'est pas possible car on aurait alors $(h \circ \tau)(z_2) \in \gamma$ et $I_\gamma(w_2)$ donnerait une troisième point de $p \in \delta$ avec $d_{\mathbb{H}}(w_1, p) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$.



Au final, $(I_\gamma \circ h \circ \tau)$ est une isométrie hyperbolique qui envoie (z_1, z_2) sur (w_1, w_2).