Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Série 6

1. On note $\mathscr{C}$ la géodésique complète de $\mathbb{H}$ ayant 1 et -1 comme extrémités.

   a. Montrer que les isométries hyperboliques positives préservant $\mathscr{C}$ sont de la forme
   $$T_s : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & \frac{\cosh(s).z+\sinh(s)}{\sinh(s).z+\cosh(s)} \end{array}$$
   pour un certain $s \in \mathbb{R}$.

   b. Montrer que $d_{\mathbb{H}}\big(z, T_s(z)\big) = 2|s|$ pour tout $z \in \mathscr{C}$.
   En déduire une expression pour la $\mathbb{H}$–translation de longueur λ le long de $\mathscr{C}$.

   c. Soit $x_1 < x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Donner une expression pour la $\mathbb{H}$–translation de longueur λ le long de la géodésique reliant x_1 à x_2.

2. Montrer que, pour tout $z, w \in \mathbb{H}$, on a

   - $d_{\mathbb{H}}(z, w) = \ln\left(\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right)$;
   - $\cosh\big(d_{\mathbb{H}}(z, w)\big) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}$.