Géométrie hyperbolique & groupes fuchsien

Correction de la série 6

1. a. On sait que les isométries hyperboliques positives de $\mathbb{H}$ peuvent s'écrire sous la forme $(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d})$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$. Si, de plus, on impose que 1 et -1 soient fixés, on a alors que $a + b = c + d$ et que $b - a = c - d$. On obtient donc que $a = d$ et $b = c$ et $ad - bc = 1$ devient $a^2 - b^2 = 1$, ce qui peut être paramétrisé par $a = \cosh(s)$ et $b = \sinh(s)$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, il est clair que toute fonction de cette forme définit bien une isométries hyperboliques positives fixant 1 et -1 .

- b. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(z, T_s(z)) &= |\ln[z, 1, T_s(z), -1]| = |\ln[T_s(z), 1, z, -1]| \\ &= \left| \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{\cosh(s).z + \sinh(s) - \sinh(s).z - \cosh(s)}{\cosh(s).z + \sinh(s) + \sinh(s).z + \cosh(s)} \right) \right| \\ &= \left| \ln \left(\frac{\cosh(s) - \sinh(s)}{\cosh(s) + \sinh(s)} \right) \right| \\ &= |\ln(e^{2s})| = 2|s|. \end{aligned}$$

Considérons maintenant une $\mathbb{H}$ -translation τ de longueur λ le long de $\mathcal{C}$. Selon toute évidence, $\mathcal{C}$ est laissé invariant avec son orientation. Ses deux extrémités 1 et -1 sont donc laissées fixes et la question a. nous donne la forme générale de τ .

Il ne reste alors plus qu'à déterminer le paramètre s . Or, d'après la question b., $\lambda = 2|s|$. Selon que τ déplace un point de -1 vers 1 ou de 1 vers -1 , on aura donc $\tau(z)$ qui sera égale, pour tout $z \in \mathbb{H}$, à $\frac{\cosh(\frac{\lambda}{2}).z + \sinh(\frac{\lambda}{2})}{\sinh(\frac{\lambda}{2}).z + \cosh(\frac{\lambda}{2})}$ ou $\frac{\cosh(\frac{\lambda}{2}).z + \sinh(-\frac{\lambda}{2})}{\sinh(-\frac{\lambda}{2}).z + \cosh(\frac{\lambda}{2})}$.

- c. Considérant d'abord le cas où $x_2 < \infty$. On pose alors $c = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$ $R = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)$, ce qui correspond au centre et au rayon de la géodésique reliant x_1 à x_2 . Cette dernière est envoyée sur $\mathcal{C}$ par l'isométrie hyperbolique $(f : z \mapsto \frac{z-c}{R})$. Il suffit donc de conjuguer par f la formule trouvée dans la question précédente. On obtient

$$(f^{-1} \circ T_s \circ f)(z) = \frac{[R \cdot \cosh(\frac{\lambda}{2}) + c \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2})] \cdot z + (R^2 - c^2) \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2})}{\sinh(\frac{\lambda}{2}) \cdot z - c \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2}) - R \cdot \cosh(\frac{\lambda}{2})}$$

ou

$$(f^{-1} \circ T_s \circ f)(z) = \frac{[R \cdot \cosh(\frac{\lambda}{2}) - c \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2})] \cdot z + (c^2 - R^2) \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2})}{c \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2}) - R \cdot \cosh(\frac{\lambda}{2}) - \sinh(\frac{\lambda}{2}) \cdot z}$$

selon le sens de la translation.

Si $x_2 = \infty$, alors il est clair que la translation verticale de longueur λ correspond à la multiplication de la partie imaginaire par e^λ ou par $e^{-\lambda}$ selon le sens de translation.

2. Montrons d'abord la première formule. Pour cela, on commence par remarquer que les deux termes de l'égalité sont invariants par translation et par inversion selon le cercle unité. Concernant cette dernière, on a, en effet, pour tout $z, w \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} \frac{|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}| + |\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{w}}|}{|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}| - |\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{w}}|} &= \frac{|\frac{w-\bar{z}}{zw}| + |\frac{\bar{w}-z}{z\bar{w}}|}{|\frac{w-\bar{z}}{zw}| - |\frac{\bar{w}-z}{z\bar{w}}|} \\ &= \frac{|z||w| \cdot (|w-\bar{z}| + |\bar{w}-z|)}{|z||w| \cdot (|w-\bar{z}| - |\bar{w}-z|)} = \frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de considérer le cas où $z = ir$ et $w = ir'$ sont tous les deux sur la droite imaginaire. La formule devient alors $d_{\mathbb{H}}(z, w) = \ln \left(\frac{r+r'+|r-r'|}{r+r'-|r-r'|} \right)$ or

$$\ln \left(\frac{r+r'+|r-r'|}{r+r'-|r-r'|} \right) = \ln \left(\frac{\max(r, r')}{\min(r, r')} \right) = \int_{\min(r, r')}^{\max(r, r')} \frac{dt}{t}.$$

Pour la seconde formule, on utilise la première et on obtient

$$\begin{aligned} \cosh(d_{\mathbb{H}}(z, w)) &= \frac{e^{d_{\mathbb{H}}(z, w)} + e^{-d_{\mathbb{H}}(z, w)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} + \frac{|z-\bar{w}|-|z-w|}{|z-\bar{w}|+|z-w|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(|z-\bar{w}|+|z-w|)^2 + (|z-\bar{w}|-|z-w|)^2}{|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2} \right) \\ &= \frac{|z-\bar{w}|^2 + |z-w|^2}{|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2} \\ &= 1 + 2 \frac{|z-w|^2}{|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} |z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2 &= \operatorname{Re}(z-\bar{w})^2 + \operatorname{Im}(z-\bar{w})^2 - \operatorname{Re}(z-w)^2 - \operatorname{Im}(z-w)^2 \\ &= (\operatorname{Im}(z-\bar{w}) + \operatorname{Im}(z-w))(\operatorname{Im}(z-\bar{w}) - \operatorname{Im}(z-w)) = 4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w). \end{aligned}$$