Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens
Série 7

Cette série est à rédiger pour le jeudi 6 novembre 2008.

1. Soit h une isométrie positive de $\mathbb{H}$. Montrer, par des arguments géométriques, que h est l'identité si l'une des trois propositions suivantes est vérifiée :
   i. h laisse fixe deux points de $\mathbb{H}$;
   ii. h laisse fixe un point de $\mathbb{H}$ et un point de $\overline{\mathbb{R}}$;
   iii. h laisse fixe trois points de $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{H}$ deux points de l'axe imaginaire et $a', b' \in \mathbb{H}$ deux points disjoints de l'axe imaginaire avec $d_{\mathbb{H}}(a, b) = d_{\mathbb{H}}(a', b')$.

   Montrer qu'il existe une unique isométrie positive et une unique isométrie négative de $\mathbb{H}$ envoyant a sur a' et b sur b'.

   Donner une relation entre ces deux isométries.
3. Soit h une isométrie positive de $\mathbb{H}$. On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{H}$ tel que les points z, $h(z)$ et $h^{-1}(z)$ sont sur une même géodésique.

   Conclure sur la nature de h.
4. Montrer que les isométries elliptiques sont toutes conjuguées à
$$h = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$
   Donner une interprétation géométrique de h.
5. Soit D et D' deux droites euclidiennes perpendiculaires. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles euclidiens centrés, respectivement, en un point de D et de D'. On suppose, de plus, que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux.

   Montrer qu'on peut choisir trois points, respectivement dans $\mathcal{C} \cap D$, $\mathcal{C}' \cap D'$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, tels que ces points soient alignés.