Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Correction de la série 7

1. i. Soit $a, b \in \mathbb{H}$ deux points distincts laissés fixe par h et $z \in \mathbb{H}$ un point quelconque.

   Puisque h est une isométrie fixant a et b, $h(z)$ est à l'intersection des cercles hyperboliques centrés en a et b, et de rayon respectifs $d_{\mathbb{H}}(z, a)$ et $d_{\mathbb{H}}(z, b)$. Cela ne laisse donc que deux possibilités, z et son symétrique par rapport à la géodésique passant par a et b. Mais puisque h est une isométrie positive, le signe de l'angle $\widehat{baz}$ doit être préservé et on a $h(z) = z$.

   On a donc $h(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{H}$ et, de fait, $h \equiv \mathrm{Id}$.

   ii. Soit $a \in \mathbb{H}$ et $p \in \overline{\mathbb{R}}$ deux points laissés fixe par h. La géodésique γ passant par a d'extrémité p est alors elle-même laissée globalement invariante par h.

   Pour tout $d > 0$, on note maintenant a_d l'unique point de la demi $\mathbb{H}$–droite $[a, p)$ situé à une distance hyperbolique d de a. Le point a_d est donc envoyé par h soit sur lui-même, soit sur son symétrique par rapport à la perpendiculaire à γ en a. Or, par continuité, $\lim_{d\to\infty} h(a_d) = p$, il existe donc $d > 0$ tel que $h(a_d) = a_d$. La question précédente permet alors de conclure.

   iii. Pour toute géodésique γ, il existe une unique othogonale ayant pour extrémité un point $p \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \overline{\gamma}$ fixé, à savoir la géodésique ayant pour extrémité p et son symétrique par rapport au cercle contenant γ.

   Maintenant, soit $p, q, r \in \overline{\mathbb{R}}$ trois points distincts fixés par h. La géodésique γ_1 ayant pour extrémités p et q est alors laissée globalement fixe par h. Par unicité, il en est de même pour l'othogonale γ_2 à γ_1 ayant pour extrémité r. Or γ_1 et γ_2 se coupent en un point z car les extrémités de γ_2 sont, par construction, dans des composantes connexes distinctes de $\overline{\mathbb{H}} \setminus \overline{\gamma_1}$. Mais alors ce point z est laissé fixe par h et on peut conclure en utlisant la question précédente.

2. D'après l'exercice 3. de la série 5, une telle isométrie, positive ou négative, existe. D'après la construction donnée à la fin de la correction de cet exercice, de telles isométries, positive et négative, existent.

   Montrons maintenant l'unicité. Soit h_1 et h_2 deux isométries positives (resp. négative) envoyant a sur a' et b sur b'. Alors, $h_2^{-1} \circ h_1$ est positive et fixe a et b et d'après le premier exercice $h_2^{-1} \circ h_1 = \mathrm{Id}$, *i.e.* $h_1 = h_2$.

   On note f_+ et f_- les isométries, respectivement positive et négative, précédentes ainsi que, pour tous $x, y \in \mathbb{H}$, $\tau_{x,y}$ la reflexions selon la géodésique passant par x et y. Alors, par unicité, on a $f_- = f_+ \circ \tau_{a,b} = \tau_{a',b'} \circ f_+$.

3. Soit $z \in \mathbb{H}$ tel que $h^{-1}(z)$, z et $h(z)$ sont alignés sur une même géodésique.

   Débarrassons-nous d'abord du cas limite où $h^{-1}(z) = z = h(z)$. L'isométrie h est alors soit elliptique de centre z, soit l'identité.

   Si $h^{-1}(z) = h(z) \neq z$, alors le milieu m du segment hyperbolique $[z, h(z)]$ est laissé fixe par h. Il s'agit donc, là encore, d'une isométrie elliptique, de centre m et d'angle π puisque z est d'ordre 2.

   Supposons enfin que les trois points sont distincts. On a alors $d_{\mathbb{H}}\big(h^{-1}(z), z\big) = d_{\mathbb{H}}\big(z, h(z)\big)$ et ces trois points sont alignés dans cet ordre, régulièrement espacés. On note τ_d la translation envoyant h sur $h(z)$. L'isométrie $\tau_d^{-1} \circ h$ admet alors deux points fixes, z et $h^{-1}(z)$. D'après le premier exercice, il s'agit donc de l'identité et h correspond à la translation le long de la géodésique passant par z et $h(z)$, dans le sens allant de z vers $h(z)$ et de longueur $d_{\mathbb{H}}\big(z, h(z)\big)$.

4. Soit f une isométrie elliptique. Elle possède donc un point fixe z_0. Soit g, n'importe quelle isométrie envoyant z_0 sur i. L'application $g \circ f \circ g^{-1}$ est alors une isométrie elliptique fixant i, de la forme $\left(s \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et ad-bc=1. Autrement dit, on a $ia + b = i(ic + d) = id - c$ et donc $a = d$ et $b = -c$. L'égalité $ad - bc = 1$ devient alors $a^2 + b^2 = 1$ et les coefficients a et b peuvent être paramétrés par $a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$. L'application f est donc conjuguée à h avec $\theta = 2t$.

   Pour $\theta = 0[2\pi]$, l'application h n'est autre que l'identité. Sinon, on vient de voir que i est fixé par h et on a $\left|\mathrm{Tr}(h)\right| < 2$, il s'agit donc d'une rotation hyperbolique autour de i. Il ne reste plus qu'à déterminer l'angle de la rotation. Pour ce faire, on peut

   i. calculer $D_i(h)(1, 0)$;
   ii. calculer le vecteur tangent en i de la géodésique passant par i et $h(\sqrt{3}i)$;
   iii. transporter h de façon conforme sur le disque de Poincaré, en envoyant i sur 0.

   Cette dernière méthode minimise les calculs. On peut utiliser la fonction $\left(F : z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}\right)$ déjà vue dans la série 3. On a alors, par calcul, $(F \circ h \circ F^{-1})(z) = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} z = e^{-i\theta} z$.

   L'application h correspond donc à la rotation hyperbolique d'angle $-\theta$ autour de i.

5. Pour commencer, montrons que soit $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, D et D' sont tous concourants en un point, auquel cas le problème est résolu, soit on peut supposer, quitte à échanger les rôles, que D coupe $\mathcal{C}'$ en deux points mais que D' ne rencontre pas $\mathcal{C}$.

   En effet, considérons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On note d_θ la droite passant par le centre du premier cercle en faisant un angle θ avec la verticale et d' sa perpendiculaire passant par le centre du second cercle. Faisons maintenant varier θ. Il existe deux valeurs critiques où, simultanément, d_θ est tangente à $\mathcal{C}'$ et d'_θ à $\mathcal{C}$. Toutes les intersections sont alors confondues. Autrement, une légère perturbation des cas critiques montre que l'on est bien dans l'une des deux alternatives proposées.

   Cela est vrai pour tout θ, donc pour D et D'. Supposons donc, désormais que $\mathcal{C}$ ne coupe pas D'. A une transformation euclidienne près, on peut supposer que $D' = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{C}$ est un cercle hyperbolique de $\mathbb{H}$. On est alors dans la configuration de l'exercice 2 de la série 5 où l'on a montré que l'inversion par rapport au cercle centré en un point de $\mathcal{C}' \cap D'$ et passant par le centre hyperbolique de $\mathcal{C}$ envoyait $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}' \cap D$. Cela permet de conclure.