Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Série 8

1. Pour tout $s \in \mathbb{R}^*$, on note T_s l'isométrie hyperbolique correspondant à la matrice $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix}$.

   On pose aussi $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{R})$ un élément hyperbolique satisfaisant $c \neq 0$.

   a. Soit t une translation hyperbolique de longueur $\lambda > 0$ et d'axe γ.
   Montrer qu'en tant qu'élément de $PSL(2,\mathbb{R})$, t est conjugué à T_s pour une certaine valeur de $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$.
   En déduire une relation entre λ et la trace de t.

   b. Déterminer le centre et le rayon de l'axe de translation de T, *i.e.* du cercle contenant l'unique géodésique, notée γ, invariante par T.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de T pour que γ rencontre l'axe imaginaire.

   c. On suppose la condition de la question précédente satisfaite et on pose $T'_s = T_s \circ T$ avec $s \in \mathbb{R}$.

      i. Montrer que T'_s est hyperbolique.

      ii. On note respectivement γ, γ_s et γ'_s les axes de translation de T, T_s et T'_s.
      Montrer que γ_s intersecte γ et γ'_s.

      iii. On note maintenant $p = \gamma_s \cap \gamma$ et $q = \gamma_s \cap \gamma'_s$.
      Montrer que $d_{\mathbb{H}}(p,q) = \big|\ln|s|\big|$ et que $\big|\mathrm{Tr}(T_s)\big| = 2\cosh\big(d_{\mathbb{H}}(p,q)\big)$.

2. Soit $r \in]0,1[$ et $s > 2\frac{1+r^2}{1-r^2}$. Montrer que

$$\mathscr{C}_{r,s} = \{z \in \mathbb{D} | \cosh\big(d_{\mathbb{D}}(z,r)\big) + \cosh\big(d_{\mathbb{D}}(z,-r)\big) = s\}$$

   est un cercle hyperbolique dont on déterminera le centre.

3. Soit $ABCD \subset \mathbb{H}$ un quadrilatère hyperbolique dont tous les angles sont droits sauf en A. Montrer que $\cos(\widehat{A}) = \sinh\big(d_{\mathbb{H}}(B,C)\big).\sinh\big(d_{\mathbb{H}}(C,D)\big)$.