Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Correction de la série 8

1. a. On conjugue t par une isométrie hyperbolique envoyant γ sur l'axe imaginaire. On obtient une nouvelle isométrie $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ fixant l'axe imaginaire. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc $h(iy) = iy'$ avec $y' \in \mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, on a $i\alpha y + \beta = i\delta y' - \gamma y y'$, ce qui donne $\beta = -\gamma y y'$.
Supposons que $\beta \neq 0$, par unicité du représentant dans $PSL(2,\mathbb{R})$, on a alors $h(z) = \frac{\beta}{\gamma z}$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. Mais h possèderait alors un point fixe dans $\mathbb{H}$, générant un troisième point fixe à t, ce qui est impossible. On a donc $\beta = \gamma = 0$.
Enfin, puisque $\det(h) = 1$, h est nécessairement de la forme T_s. De plus, $s \neq \pm 1$ car, alors, on aurait $h = t = \mathrm{Id}$.

Puisqu'ils sont conjugués par une isométrie, que l'on note f, on a

$$\left|\mathrm{Tr}(t)\right| = \left|\mathrm{Tr}(T_s)\right| = |s| + 1/|s|$$

mais aussi, pour tout $z \in \mathbb{H}$, $d_{\mathbb{H}}\big(z, h(z)\big) = d_{\mathbb{H}}\big(f^{-1}(z), (t \circ f^{-1})(z)\big) = \lambda$. En l'appliquant à $z = i$, on obtient $\lambda = 2\big|\ln|s|\big|$.
Au final, on a donc $|s| = e^{\frac{\lambda}{2}}$ et $\left|\mathrm{Tr}(t)\right| = 2\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

b. Les extrémités de γ correspondent aux deux points fixes réels de T, *i.e.*, puisque c est non nul, aux racines de $cz^2 + (d-a)z - b$, *i.e.* à $\frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$.
Le centre de γ a donc pour abscisse $c_\gamma = \frac{a-d}{2c}$ et son rayon est égal à $R_\gamma = \frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$.

La géodésique γ rencontre l'axe imaginaire si et seulement si l'équation $y^2 + c_\gamma^2 = R_\gamma^2$ possède une solution strictement positive. Cette solution correspond alors à la partie imaginaire de l'intersection.
Or $y^2 + \frac{(a-d)^2}{4c^2} = \frac{(a-d)^2+4bc}{4c^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{b}{c}$. L'intersection est donc non vide ssi $bc > 0$[1].

c. i. Par calcul, on a $T_s T = \begin{pmatrix} sa & sb \\ c/s & d/s \end{pmatrix}$ et donc $\left|\mathrm{Tr}(T_s T)\right| = \left|sa + d/s\right|$. Or, puisque $T \in PSL(2,\mathbb{R})$, on a $ad = 1 + bc > 1 > 0$. Les nombres a et d sont donc non nuls et de même signe. Or, dans ces conditions, on montre facilement que $\min\limits_{s \in \mathbb{R}^*} \left|sa + d/s\right| = 2\sqrt{ad} > 2$.
Pour tout $s \in \mathbb{R}^*$, on a donc $\left|\mathrm{Tr}(T_s T)\right| > 2$, ce qui signifie que T_s' est hyperbolique.

ii. La géodésique γ_s n'est autre que l'axe imaginaire. Pour que γ et γ_s la rencontre, il suffit donc, d'après la question b. que le produit des termes anti-diagonaux de, respectivement, T et T_s' soient strictement positif. Dans les deux cas, ce produit vaut bc qui, par hypothèse, est bien strictement positif.

iii. D'après les calculs de la question 2., on a $p = i\sqrt{\frac{b}{c}}$ et $q = i|s|\sqrt{\frac{b}{c}}$. Un calcul direct donne donc $d_{\mathbb{H}}(p,q) = \big|\ln|s|\big|$ et d'après les calculs de l'exercice a. appliqués à T_s, on a bien $\left|\mathrm{Tr}(T_s)\right| = 2\cosh\big(d_{\mathbb{H}}(p,q)\big)$.

[1] ce résultat reste vrai lorsque $c = 0$ mais $b \neq 0$, car alors l'axe de translation est parallèle à l'axe imaginaire et ne le rencontre donc pas

2. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. Via $\left(z \mapsto \frac{iz-1}{i-z}\right)$, on peut transporter la métrique de $\mathbb{D}$ vers celle de $\mathbb{H}$. Or, d'après l'exercice 2. de la série 6., on a $\cosh\left(d_{\mathbb{H}}(z,w)\right) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2.\mathrm{Im}(z).\mathrm{Im}(w)}$.

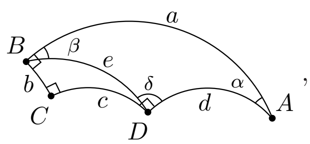
   De plus, par calcul, on a, pour tout $z, w \in \mathbb{D}$, $\left|\frac{iz-1}{i-z} - \frac{iw-1}{i-w}\right|^2 = 4\frac{|z-w|^2}{|i-z|^2|i-w|^2}$ ainsi que $\mathrm{Im}\left(\frac{iz-1}{i-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|i-z|^2}$. Donc $\cosh\left(d_{\mathbb{D}}(z_0,r)\right) = 1 + 2\frac{|z_0-r|^2}{\left(1-|z_0|^2\right)\left(1-r^2\right)}$.

   La condition définissant $\mathscr{C}_{r,s}$ devient donc

$$\begin{aligned}
\cosh\left(d_{\mathbb{D}}(z_0,r)\right) + \cosh\left(d_{\mathbb{D}}(z_0,-r)\right) = s \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{|z_0-r|^2+|z_0+r|^2}{\left(1-|z_0|^2\right)\left(1-r^2\right)} = {}^{s}\!/_{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\left(1-|z_0|^2\right)\left(1-r^2\right)+2|z_0|^2+2r^2}{\left(1-|z_0|^2\right)\left(1-r^2\right)} = {}^{s}\!/_{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\left(1+|z_0|^2\right)\left(1+r^2\right)}{\left(1-|z_0|^2\right)\left(1-r^2\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad |z_0|^2 = \frac{(1-r^2)\frac{s}{2}-(1+r^2)}{(1+r^2)+(1-r^2)\frac{s}{2}}
\end{aligned}$$

   puisque $r^2 < 1$ et donc $\left((1+r^2) + (1-r^2)\frac{s}{2}\right) > 0$.
   Or, par hypothèse sur s, on a également $(1-r^2)\frac{s}{2} - (1+r^2) > 0$. L'ensemble $\mathscr{C}_{r,s}$ est donc un cercle euclidien centré en 0, ce qui correspond également à un cercle hyperbolique de $\mathbb{D}$ centré en 0.

3. Prenons les notations suivantes :



,

   avec $0 < \alpha, \beta, \delta < {}^{\pi}\!/_{2}$. En appliquant la loi des cosinus II, respectivement en A et en C, aux triangles BAD et BCD, on obtient

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\delta) + \sin(\beta)\sin(\delta)\cosh(e)$$

   et

$$\begin{aligned}
\cos\left({}^{\pi}\!/_{2}\right) &= -\cos\left({}^{\pi}\!/_{2} - \beta\right)\cos\left({}^{\pi}\!/_{2} - \delta\right) + \sin\left({}^{\pi}\!/_{2} - \beta\right)\sin\left({}^{\pi}\!/_{2} - \delta\right)\cosh(e) \\
&= -\sin(\beta)\sin(\delta) + \cos(\beta)\cos(\delta)\cosh(e) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

   On a donc $\cos(\alpha) = \cos(\beta)\cos(\delta)\left(\cosh^2(e) - 1\right) = \cos(\beta)\cos(\delta)\sinh^2(e)$.
   Or, d'après la loi des sinus appliquée à BCD, on a également

$$\frac{\cos(\beta)}{\sinh(c)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)}{\sinh(c)} = \frac{1}{\sinh(e)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \delta)}{\sinh(b)} = \frac{\cos(\delta)}{\sinh(b)}.$$

   On obtient alors $\cos(\alpha) = \sinh(b)\sinh(c)$.