Géométrie hyperbolique & groupes fuchsien
Série 9

1. Pour quels valeurs de $n \geq 3$ existe-t-il un polygone hyperbolique convexe régulier droit à n cotés, *i.e.* un polygone hyperbolique convexe dont tous les angles sont droits et dont les cotés ont une même longueur λ_n .

Calculer, lorsqu'elle est définie, la longueur λ_n .

2. Soit g une isométrie du disque de Poincaré $\mathbb{D}$. Montrer que g s'écrit sous la forme $g(z) = \frac{az+b}{bz+a}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Avec ces notations, on appelle cercle isométrique de g l'ensemble $\mathcal{C}_g = \{z \in \mathbb{D} \mid |b\bar{z} + a| = 1\}$. Montrer que pour tout $z, w \in \mathcal{C}_g$, on a $|g(z) - g(w)| = |z - w|$.

Montrer que la médiatrice du segment géodésique $[0, g(0)]_{\mathbb{D}}$ est égal à $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.

3. Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit cyclique infini.

Montrer que tout sous-groupe cyclique de $PSL(2, \mathbb{R})$ composé uniquement d'éléments hyperboliques est un groupe fuchsien.