

Géométrie hyperbolique & groupes fuchsien

Correction de la série 9

1. Tout polygone convexe P peut être décomposé en $(n-2)$ triangles en choisissant un sommet z_0 et en le reliant à tous les autres sommets qui ne sont pas directement reliés à z_0 par un sommet. Par récurrence, on montre alors que $\text{Aire}(P) = (n-2)\pi - \sum_{\substack{\alpha \text{ angle} \\ \text{de } P}} \alpha$. Dans le cas d'un polygone convexe régulier droit à n cotés, on a donc $(n-2)\pi - n\frac{\pi}{2} > 0$ et donc $n > 4$.

Réciproquement, on va se servir de l'exercice 3 de la série 8 pour construire le polygone voulu. Dans ce dernier, on donne une condition nécessaire pour l'existence d'un quadrilatère trirectangle. Il n'est pas difficile de montrer que cette condition est même suffisante¹. On l'applique alors avec un angle de $2\pi/n$ et deux cotés de même longueur d avec $\sinh^2(d) = \cos(2\pi/n) > 0$ puisque $n \geq 5$. Il suffit alors de faire $n-1$ rotations de centre le sommet aigu du quadrilatère et d'angle $2k\pi/n$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Mis à part aux sommets opposés à l'angle aigu, les angles droits s'ajoutent pour s'applatiser au niveau du centre des cotés du nouveau polygone ainsi dessiné.

Par construction, les cotés du polygone sont égaux à $2 \cdot \text{Argsh}\left(\sqrt{\cos(2\pi/n)}\right)$.

2. Toute isométrie de $\mathbb{D}$ provient d'une isométrie de $\mathbb{H}$ transportée par $F : z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$. Toute isométrie h de $\mathbb{D}$ s'écrit donc sous la forme $F \circ f \circ F^{-1}$ avec $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Cela donne $h(z) = \frac{[(-a-d)+i(c-b)]z+[(-b-c)+i(d-a)]}{[(-b-c)+i(a-d)]z+[(-a-d)+i(b-c)]} = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}$ avec $\alpha = (a+d) + i(b-c)$ et $\beta = (b+c) + i(a-d)$. Et comme $h \in PSL(2, \mathbb{R})$, on a également $\det(h) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

Réciproquement, toute homographie de ce type est bien une isométrie de $\mathbb{D}$ puisque l'application $((a, b, c, d) \mapsto (a+d, b-c, b+c, a-d))$ est inversible donc surjective.

Soit $z, w \in \mathcal{C}_g$, on a alors

$$\begin{aligned} |g(z) - g(w)| &= \left| \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}} - \frac{\alpha w + \beta}{\bar{\beta}w + \bar{\alpha}} \right| \\ &= \frac{|(|\alpha|^2 - |\beta|^2)z + (|\beta|^2 - |\alpha|^2)w|}{|\bar{\beta}z + \bar{\alpha}||\bar{\beta}w + \bar{\alpha}|} \\ &= |z - w|. \end{aligned}$$

¹l'exercice 3 de la série 8 peut se résoudre ainsi, impliquant ainsi la partie "existence" : partir de i , parcourir une distance b sur le cercle unité en utilisant la formule reliant la distance de deux points et leurs coordonnées angulaires sur la géodésique les reliant, partir à angle droit et parcourir une distance c , partir encore à angle droit et calculer l'angle d'intersection, quand il existe, avec l'axe imaginaire

On raisonne par équivalence. On a, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{D}}(z, 0) = d_{\mathbb{D}}(z, g(0)) &\Leftrightarrow \sinh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(z, 0) \right) = \sinh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(z, g(0)) \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{|z|^2}{1 - |z|^2} = \frac{\left| z - \frac{\beta}{\bar{\alpha}} \right|}{(1 - |z|^2) \left(1 - \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} \right)} \\
&\Leftrightarrow |z|^2 = |\bar{\alpha}z - \beta|^2 \\
&\Leftrightarrow 1 = |\bar{\alpha} - \beta\bar{z}|^2 \\
&\Leftrightarrow z \in \mathcal{C}_{g^{-1}}.
\end{aligned}$$

La seconde équivalence est une conséquence de la seconde formule donnée dans l'exercice 2 de la série 6. L'avant-dernière provient de l'égalité

$$|ac - bd|^2 - |\bar{b}\bar{c} - a\bar{d}|^2 = (|a|^2 - |b|^2)(|c|^2 - |d|^2)$$

vérifiée pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

3. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On pose $m = \min_{g \in G \cap \mathbb{R}_+^*} g$.

- Si $m = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$ puisque $m = 0$. Mais alors pour tout nombre réel, il existe un élément de $\mathbb{Z}.g \subset G$ qui lui soit proche à g près, donc à ε près.
- Si $m > 0$, alors $m \in G$. En effet, si $m \notin G$, alors il existe $g \in]m, 2m[\cap G$ par définition de m . De même, il existe également $g' \in]m, g[\cap G$. Mais alors, $(g - g') \in]0, m[\cap G$ qui est donc non vide, ce qui contredit la définition de m .

On a, de fait, $\mathbb{Z}.m \subset G$, mais réciproquement, pour tout $g \in G$, on a $g - \mathbb{E}(g/m).m \in]0, m[\cap G$. Pour ne pas contredire la définition de m , on a donc $g = \mathbb{E}(g/m).m \in \mathbb{Z}.m$. Au final, $G = \mathbb{Z}.m$ est donc bien cyclique infini.

Soit G un sous-groupe cyclique de $PSL(2, \mathbb{R})$ dont tous les éléments sont hyperboliques. Tous les éléments sont donc engendrés par une translation, tous correspondent donc à une translation selon une même géodésique. La longueur algébrique des translations définit donc un monomorphisme de groupe de G vers $(\mathbb{R}, +)$ dont l'image est clairement cyclique. L'image de G est donc discrète dans $\mathbb{R}$ et puisque, d'après la question 1.a de la série 8, la longueur est donnée par la fonction $2\text{Argch} \left(\frac{|\text{Tr}(\cdot)|}{2} \right)$ qui est continue, il en va de même pour G .

Le sous-groupe G est donc discret donc fuchsien.