

Principes transversaux en mathématiques

Série 1

Rappel : un corps K totalement ordonné est un corps tel qu'il existe une relation d'ordre totale \leq pour laquelle on a, pour tout $a, b, c \in K$:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c; \quad (1)$$

$$\text{Si } c > 0 \text{ et } a \leq b \Rightarrow ca \leq cb. \quad (2)$$

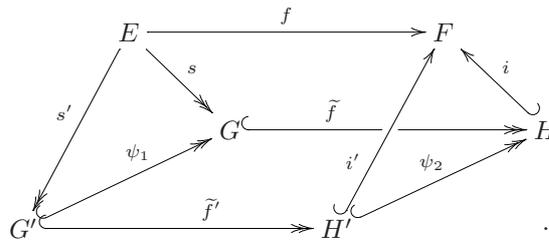
Ex.1

- a) Énoncez les axiomes de corps.
- b) Soit K un corps totalement ordonné. Démontrer les propriétés suivantes :
 - i. K est de caractéristique 0, donc infini;
 - ii. pour tout $a > 0$, on a $-a < 0$;
 - iii. pour tout $a \neq 0$, on a $a^2 > 0$;
 - iv. $1 > 0$.
- c) En déduire que le corps des complexes \mathbb{C} n'est pas un corps totalement ordonné.

Ex.2 (Un outil universel)

- a) Soit E et F deux ensembles et $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer qu'il existe deux ensembles G et H , une surjection $s: E \rightarrow G$, une bijection $\tilde{f}: G \rightarrow H$ et une injection $i: H \rightarrow F$ tels que $f = i \circ \tilde{f} \circ s$.

De plus, montrer que cette décomposition est unique dans le sens suivant : pour toute autre décomposition $f = i' \circ \tilde{f}' \circ s'$ avec $s': E \rightarrow G'$, $\tilde{f}': G' \rightarrow H'$ et $i': H' \rightarrow F$ telles que décrites ci-dessus, il existe deux bijections $\psi_1: G' \rightarrow G$ et $\psi_2: H' \rightarrow H$ telles que le diagramme ci-dessous commute :



- b) Trouver plusieurs exemples d'applications de ce principe.