Principes transversaux en mathématiques

Série 2

Rappel : pour tout nombre réel $x > 1$, il existe un unique développement en fraction continue *i.e.* développement sous la forme

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

avec (a_i) une suite finie ou dénombrable d'entiers strictement positifs dont le dernier terme, s'il existe, est différent de 1.

Démonstration.

Existence : Pour tout réel t, on note $[t]$ sa partie entière et $\{t\}$ son reste fractionnaire *i.e.* les uniques $[t] \in \mathbb{Z}$ et $\{t\} \in [0,1)$ tels que $t = [t] + \{t\}$. On construit alors la développement par récurrence en écrivant

$$x = [x] + \{x\} = [x] + \frac{1}{\left[\{x\}^{-1}\right] + \left\{\{x\}^{-1}\right\}} = [x] + \frac{1}{\left[\{x\}^{-1}\right] + \frac{1}{\left[\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1}\right] + \left\{\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1}\right\}}} = \dots$$

et en s'arrêtant si un reste fractionnaire s'annule. Si les restes fractionnaires ne s'annulent jamais, on peut montrer que la suite des développements tronqués est une série alternée convergeant vers x.

Unicité : Récursivement, on compare les parties entières puis on simplifie en effaçant le premier terme du développement.

□

Ex.1

Après que vous ayez introduit les nombres réels en classe, un élève vous affirme que $0,\overline{9}$ est le nombre juste à coté de 1. Que lui répondez-vous ?

Suite à votre réponse, un autre élève intervient pour arguer qu'il suffit donc de considérer les développements qui s'arrêtent. Que lui répondez-vous ?

Ex.2

Analysez les expressions suivantes :

a. $$1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}} \; ;$$

b. $$1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}} .$$

Ex.3

Retrouver plusieurs notions connues construites à l'aide de classes d'équivalence.