Université de Genève
Section de Mathématiques

Automne 2009

Principes transversaux en mathématiques

Série 4

Le but de cette série est de prouver le théorème de Frobénius :

Théorème 1. *Toute extension de degré finie du corps* $\mathbb{R}$ *est isomorphe à* $\mathbb{R}$*, à* $\mathbb{C}$ *ou à* $\mathbb{H}$ *(le corps des quaternions).*

Il peut être reformulé par :

Théorème 2. *Les seules* $\mathbb{R}$*–algèbre de dimension finie munies d'une structure de corps sont, à isomorphisme près,* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{C}$ *et* $\mathbb{H}$*.*

Il est encore équivalent à :

Théorème 3. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel de dimension finie muni d'une structure de corps compatible avec sa structure vectorielle. Alors* $\dim(E) \in \{1, 2, 4\}$ *et selon le cas,* E *en tant que corps est isomorphe à* $\mathbb{R}$*, à* $\mathbb{C}$ *ou à* $\mathbb{H}$*.*

Préambule

Montrer que ces énoncés sont équivalents.

Partie I

Soit K une extension **commutative** de dimension finie du corps $\mathbb{R}$ distincte de $\mathbb{R}$. Soit $a \in K \setminus \mathbb{R}$

a. Montrer que a est racine d'un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$.

b. Montrer que ce polynôme est de degré 2 et en déduire qu'il existe un élément de K dont le carré est un réel strictement négatif.

c. Montrer que K contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

d. Montrer que K est réduit à ce sous-corps.

Partie II

Soit K une extension **non commutative** de dimension finie du corps $\mathbb{R}$ distincte de $\mathbb{R}$.

a. Montrer que K contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Par abus de notation, on note $\mathbb{C}$ ce sous-corps et i une des racines de -1 dans $\mathbb{C}$.

b. Montrer que tout élément qui commute avec i est dans $\mathbb{C}$.

Soit $a \in K \setminus \mathbb{C}$. On pose $b = ai - ia$.

c. Montrer que b anticommute avec i et en déduire que $b^2 \in \mathbb{C}$.

d. Montrer que $\mathbb{R}(b) \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}(b)$ est l'extension de $\mathbb{R}$ engendrée par b.

e. Montrer que b^2 est un réel strictement négatif.

f. En déduire l'existence d'un élément $j \in K \setminus \mathbb{C}$ dont le carré vaut -1 et qui anticommute avec i.

g. Montrer que le sous-espace vectoriel de K engendré par 1, i, j et ij est un sous-corps de K isomorphe à $\mathbb{H}$.

Toujours par abus de notation, on note $\mathbb{H}$ ce sous-corps.

h. Montrer que K est réduit à $\mathbb{H}$. Pour cela, on pourra procéder par l'absurde en supposant qu'il existe $u \in K \setminus \mathbb{H}$. On pourra alors poser $v = ui - iu$, $w = ui + iu$ et montrer que $jv, w \in \mathbb{C}$, puis que $v \in \mathbb{H}$ et enfin que $u \in \mathbb{H}$.