

Principes transversaux en mathématiques

Série 5

Exercice 1

- Montrer que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ est rationnel.
- Montrer qu'il existe a et b des nombres irrationnels tels que a^b soit rationnel.

Exercice 2

- Montrer que pour tout réel x et tout entier strictement positif n , on a $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
- Montrer que pour tout entier strictement positif n , on a $\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$.
- Pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, calculer l'arrondi de $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ où ϕ est le nombre d'or. Que constatez-vous ? Que conjecturez-vous ? Prouvez votre conjecture.

Exercice 3

- Un emballage pèse 10 grammes pour 100 grammes de produit. Combien pèse ce même emballage pour 200 grammes de produit ?
- Un nénuphar double chaque jour sa taille. Ainsi, il met 20 jours pour recouvrir un étang. Combien de temps mettront deux nénuphars qui ne chevauche jamais pour recouvrir ce même étang ?
- Deux personnes partent en même temps d'un point A , l'un en vélo, l'autre à pied. Au bout d'un moment, la personne à vélo pose son véhicule et continue à pied. Lorsque la seconde personne arrive au vélo, il l'enfourche et continue en vélo. Ils arrivent tous les deux en même temps au point B .
Sachant que chacun avance à la même vitesse v_1 lorsqu'il est en vélo et à la même vitesse v_2 lorsqu'il est à pied, quelle est la vitesse moyenne de chacun entre les points A et B ?