Université de Genève
Section de Mathématiques

Automne 2009

Principes transversaux en mathématiques

Série 6 : Les nombres p–adiques

Les questions étoilés sont à rédiger.

Quelques définitions

Definition 1. On appelle norme sur un corps K toute application $N\colon K \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant

i. $\forall x \in K, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii. $\forall x, y \in K, N(xy) = N(x)N(y)$;

iii. $\forall x, y \in K, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Si, de plus, elle vérifie $N(x + y) \leq \max(N(x), N(y))$ pour tout $x, y \in K$, on dit qu'elle est ultramétrique.

Definition 2. Deux normes définies sur un même corps induisent la même topologie si toute suite convergeant vers un élément pour l'une des normes converge également vers cet élément pour l'autre norme.

Definition 3. Soit p un nombre premier. L'application $\nu_p\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est définie par $\nu_p(0) = \infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\nu_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} | p^k \text{ divise } n\}$.

On étend la fonction à $\mathbb{Q}$ par $\nu_p\left({}^{a}\!/\!{}_{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$.

Partie I : Quelques normes sur $\mathbb{Q}$

1. Montrer que l'application suivante est une norme ultramétrique :

$$N_{\text{triviale}}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

2. Montrer que pour $\alpha \in (0, 1]$, l'application suivante est une norme :

$$N_\alpha\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x|^\alpha \end{array} .$$

3.* Soit p un nombre premier. Après avoir vérifié que ν_p est bien définie, montrer que pour tout $\alpha \in (0, 1)$, l'application suivante est une norme ultramétrique :

$$N_{p,\alpha}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \alpha^{\nu_p(x)} \end{array} .$$

4.* Parmi les normes précédentes, déterminer lesquels induisent la même topologie.

5.* Parmi ces topologies, déterminer lesquels font de $\mathbb{Q}$ un espace complet.

Partie II : Le théorème d'Ostrowski

Le but de cette partie est de montrer que les exemples donnés dans la partie précédente sont les seules normes possibles sur $\mathbb{Q}$.

Soit N une norme non triviale sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(n) \leq n$.

2. Dans cette partie, on suppose qu'il existe un entier $b_0 \geq 2$ tel que $N(b_0) > 1$. On pose alors α le réel tel que $N(b_0) = b_0^\alpha$.
   a. Montrer que $\alpha \in (0, 1]$.

   Soit $k \in \mathbb{N}$, on note $\displaystyle\sum_{i=0}^{d} k_i b_0^i$ sa décomposition en base b_0 avec d tel que $b_0^d \leq k < b_0^{d+1}$.

   b. Montrer que $N(k) \leq (b_0 - 1)\frac{b_0^{\alpha(d+1)}-1}{b_0^\alpha - 1}$. En déduire qu'il existe une constante C indépendante de k tel que $N(k) \leq Ck^\alpha$.
   c. En considérant $N(k^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $N(k) \leq k^\alpha$.
   d. En utilisant le fait que $k = b_0^{d+1} - (b_0^{d+1} - k)$ avec $b_0^{d+1} - k < b_0^{d+1} - b_0^d$, montrer que
   $$N(k) \geq b_0^{\alpha(d+1)}\left(1 - \frac{(b_0^{d+1} - b_0^d)^\alpha}{b_0^{\alpha(d+1)}}\right).$$
   e. En déduire que $N(k) = |k|^\alpha$ puis que $N(x) = |x|^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

3. On suppose maintenant que $N(k) \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que $N(p) < 1$.
   b. En utilisant une relation de Bézout, montrer que ce nombre premier p est unique.
   c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $N(x) = \alpha^{v_p(x)}$ avec $\alpha \in (0, 1)$.

Partie III : Les nombres p–adiques

Dans cette partie, on fixe un nombre premier p.

Definition 4. Sur l'ensemble $Z_p = \left\{(x_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \middle| \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \equiv x_n\ [p^{n+1}]\right\}$, on considère la relation d'équivalence : $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_n \equiv y_n\ [p^{n+1}]$.
On appelle $\mathbb{Z}_p := Z_p/\!\sim$ l'ensemble des entiers p–adiques.

1.* a. Montrer que la somme et le produit terme à terme induisent une structure d'anneau sur $\mathbb{Z}_p$ dont on précisera l'élément unité.
   b. Montrer que $\mathbb{Z}$ s'injecte naturellement en tant qu'anneau dans $\mathbb{Z}_p$.
   c. Montrer que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_p$ il existe une unique suite $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{x}_n \in [\![0, p-1]\!]$ et $x_n \equiv \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \widetilde{x}_i p^i [p^{n+1}]$.

Un entier p–adique peut donc être vu comme une série formelle $x = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i$ à coefficients dans $[\![0, n-1]\!]$.

2.* a. Montrer que $(x_n) \in \mathbb{Z}_p$ est inversible si et seulement si $x_0 \not\equiv 0\ [p]$.
   b. Pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$ non nul, montrer qu'il existe un unique entier $\mu_p(x) \in \mathbb{N}$ tel $x = p^{\mu_p(x)} x_*$ avec $x_* \in \mathbb{Z}_p$ inversible.

c. En posant $\mu_p(0) = \infty$, montrer que la fonction μ_p est additive pour la multiplication dans $\mathbb{Z}_p$.

d. En déduire que $\mathbb{Z}_p$ est intégre.

Definition 5. On note $\mathbb{Q}_p$ le corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$.

3. a. Pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$ non nul, montrer qu'il existe un unique entier $\mu_p(x) \in \mathbb{Z}$ tel $x = p^{\mu_p(x)} x_0$ avec $x_0 \in \mathbb{Z}_p$ inversible.

   b. Montrer que l'application $\widetilde{N}_p : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\widetilde{N}_p(x) = p^{-\mu_p(x)}$ est une norme ultramétrique.

   c. Montrer qu'en tant que corps, $\mathbb{Q}_p$ est une extension de $\mathbb{Q}$ telle que la restriction de $\widetilde{N}_p$ à $\mathbb{Q}$ corresponde à $N_{\frac{1}{p},p}$.

   d. Pour la norme $\widetilde{N}_p$, déterminer si la suite $(p^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{Q}_p$ et si oui, déterminer sa limite.

Partie IV : Un peu de topologie sur $\mathbb{Q}_p$

Dans cette partie, p est toujours un nombre premier. On munit $\mathbb{Q}_p$ de la topologie induite par la norme $\widetilde{N}_p$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est localement compact *i.e.* que de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergeante.

2.* Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un compact ouvert de $\mathbb{Q}_p$.

3.* Montrer qu'un élément de $\mathbb{Q}_p$ est centre de toute boule qui le contient.

4.* Montrer qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ d'élément de $\mathbb{Q}_p$ est de Cauchy si et seulement si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

5. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est complet et qu'il s'agit, pour tout $\alpha \in (0,1)$, de la complétion de $\mathbb{Q}$ pour $N_{\alpha,p}$.