Principes transversaux en mathématiques

Série 9

Exercice 1
Le but de cet exercice est de prouver le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une bijection continue fixant l'origine et préservant les droites, i.e. telle que, pour toute droite $d \subset \mathbb{R}^3$, il existe une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ contenant $f(d)$.*
Alors f est linéaire.

1. a. Soit d et d' deux droites non coplanaires de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe deux hyperplans H et H' tels que pour tout point M de $\mathbb{R}^3 \setminus H \cup H'$, il existe deux points $A \in d$ et $A' \in d'$ alignés avec M.
   b. Soit d et d' deux droites de $\mathbb{R}^3$ telles qu'il existe une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ contenant $f(d)$ et $f(d')$. Montrer que d et d' ne sont pas coplanaires.
   c. Soit d et d' deux droites de $\mathbb{R}^3$ telles qu'il existe une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ contenant $f(d)$ et $f(d')$. Montrer que $d = d'$.
2. a. Montrer que l'image d'une droite par f est une droite.
   b. Montrer que l'image d'un hyperplan par f est un hyperplan.
3. a. Montrer que deux droites parallèles sont envoyés par f sur deux droites parallèles.
   b. Montrer qu'un parallélogramme est envoyé par f sur un parallélogramme.
   c. Montrer que la fonction f_v définie par $f_v(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est bien définie.
4. a. Montrer que si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$, alors $f_v(\vec{v} + \vec{w}) = f_v(\vec{v}) + f_v(\vec{w})$.
   b. Montrer que si $\vec{v}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_v(n\vec{v}) = nf_v(\vec{v})$.
   c. Montrer que si $\vec{v}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f_v(r\vec{v}) = rf_v(\vec{v})$.
   d. Montrer que f est linéaire.

Exercice 2

1. Calculer explicitement les coordonnées de $f(x, y, z)$ où $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est la translation de vecteur $(2, -4, 7)$.
2. Calculer explicitement les coordonnées de $f(x, y, z)$ où $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de la droite passant $(-1, 1, 1)$ et $(1, 2, 1)$ (orientée dans ce sens).
3. Calculer explicitement les coordonnées de $f(x, y, z)$ où $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est la symétrie par rapport au plan $x + y - z = 1$.