

Principes transversaux en mathématiques

Série 10

Exercice 1

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surjection continue. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i. f est la composition d'une translation et d'une application linéaire ;
- ii. l'image de toute droite par f est contenue dans une droite ;
- iii. pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$ et tout $t \in [0, 1]$, $f(tx + (1 - t)y) = tf(x) + (1 - t)f(y)$.

L'application f est dite affine si elle vérifie l'une de ces propriétés.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}^2$ un point du disque unité ouvert et $A, B \in \mathbb{R}^2$ deux points quelconques. Trouver un critère "à la règle et au compas" déterminant s'il existe une corde du cercle unité de même longueur que le segment AB et passant par P .

Exercice 3

On appelle sudoku gréco-latin toute disposition des 16 figures d'un jeu de carte en un carré 4×4 telle que sur chaque ligne, sur chaque colonne et dans chacun des quatre quartiers, on retrouve chacune des 4 couleurs et chacune des 4 valeurs.

Existe-t-il des sudoku gréco-latin, et si oui, combien ?

Indications :

- on pourra commencer par se donner un des 4 quartiers puis continuer en essayant de le compléter ;
- on pourra chercher des opérations sur la disposition des cartes préservant la propriété d'être un sudoku gréco-latin.