Principes transversaux en mathématiques

Série 11

Les questions étoilées nécessitent un peu plus d'attention et pourront être ignorées.

Le but de cette série est de décrire les sous-groupes finis de $SO(3)$.
Soit Γ un sous-groupe fini de $SO(3)$. On note

$$\mathcal{P} := \{x \in S^2 | \exists g \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}, g.x = x\}$$

l'ensemble des points de la sphère fixés par au moins un élément non trivial de Γ.

1. a. Montrer que tout élément de Γ est une rotation.
   b. Montrer que $\mathcal{P}$ est un ensemble fini non vide sur lequel Γ agit.

On note $O_1, \cdot, O_s$ les orbites de l'action de Γ sur $\mathcal{P}$ et pour tout $x \in \mathcal{P}$, on note

$$\nu(x) := \#\{g \in \Gamma | g.x = x\}$$

le cardinal du stabilisateur de x.

2. a. Montrer que pour tout $i \in [\![1, s]\!]$ et tous $x, y \in O_i$, on a $\nu(x) = \nu(y)$.
   Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, on note ν_i le cardinal commun des stabilisateurs des éléments de O_i ; et quitte à les permuter, on suppose de plus que $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_s$.
   b. Montrer que pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $|\Gamma| = |O_i|\nu_i$.
   c. Montrer que $2(|\Gamma| - 1) = |\Gamma| \sum_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right)$ et donc que
   $$2 - \frac{2}{|\Gamma|} = \sum_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right).$$
   d. Montrer que $s = 2$ ou $s = 3$.
3. Dans cette partie, on suppose $s = 2$.
   a. Montrer que le stabilisateur de tout point $x \in \mathcal{P}$ est Γ tout entier.
   b. Montrer que $\Gamma \cong \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ pour un certain entier $n \geq 2$.
4. Dans cette partie, on suppose $s = 3$.
   a. Montrer que $\nu_3 = 2$ et que $\nu_2 \in \{2, 3\}$.
   b. Dans cette partie, on suppose $\nu_2 = 2$.
      i. Montrer que $|O_1| = 2$ et en déduire que Γ contient une rotation d'angle π.
      ii. Détermininer le stabilisateur des éléments de O_1.
      iii. Montrer que Γ est isomorphe à un groupe diédral.
   c. Dans cette partie, on suppose que $\nu_2 = 3$.
      i. Montrer que $\nu_1 \in \{3, 4, 5\}$.
      ii. Dans cette partie, on suppose $\nu_1 = 3$.
         α. Montrer que $|\Gamma| = 12$.
         β. Montrer que Γ agit sur les éléments de O_1.

- γ. Montrer que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ (*i.e.* le groupe des permutations de 4 éléments) d'indice 2 (*i.e.* tel que $\frac{|\mathfrak{S}_4|}{|\Gamma|} = 2$).
- ϵ. Montrer que Γ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$, le sous-groupe alterné de $\mathfrak{S}_4$.

iii. Dans cette partie, on suppose $\nu_1 = 4$.

- α. Montrer que $|\Gamma| = 24$.
- β. Montrer que si $x \in O_2$, alors $-x \in O_2$.
- *γ. Montrer que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$.
- ϵ. Montrer que Γ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

iv. Dans cette partie, on suppose $\nu_1 = 5$.

- α. Montrer que $|\Gamma| = 60$.
- *β. Montrer que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$ d'indice 2.
- γ. Montrer que Γ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

5. Pour chaque sous-groupe fini Γ de $SO(3)$ trouver un polyèdre dont Γ est le groupe des isométries.