

Principes transversaux en mathématiques

Série 12

Exercice 1

Donner des suites de polynômes convergeant uniformément sur l'intervalle $(-1, 1)$ vers, respectivement :

a. $(x \mapsto 5x^8 + 3x^2 + 5)$;

b. $(x \mapsto \sin(x))$;

c. $(x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}})$.

Exercice 2

On se donne x_0 dans $[0, 1]$ et on veut approcher $\sqrt{x_0}$ par valeurs inférieures mais ce, uniquement à l'aide des 4 opérations. Une idée est de commencer par l'approximation la plus grossière, *i.e.* 0, puis à chaque étape, de minorer, toujours grossièrement, la distance de notre approximation à $\sqrt{x_0}$ en utilisant la distance entre leurs carrés puis de l'ajouter à notre approximation.

a. Montrer que pour tout $y \in [0, 1]$, on a $|y - \sqrt{x_0}| \geq \frac{|y^2 - x_0^2|}{2}$.

b. D'après la procédure évoquée dans l'énoncé, en déduire une suite convergeant vers $\sqrt{x_0}$.

c. Montrer qu'il en découle une suite de polynômes convergeant uniformément vers $(x \mapsto \sqrt{x})$ sur $[0, 1]$.