Université de Genève
Section de Mathématiques

Automne 2009

# Principes transversaux en mathématiques

Série 13

---

1. Montrer que l'application

$$\langle\,.\,|\,.\,\rangle : \begin{array}{ccc} C[-1,1]\times C[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{array}$$

   définie un produit scalaire pour les fonctions continues sur l'intervalle $[-1,1]$.

On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille orthonormale obtenus en orthonormalisant la famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, calculer $T_0$, $T_1$, $T_2$ et $T_3$.
3. Montrer qu'il existe une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on ait $\cos(n\theta) = P_n(\cos(\theta))$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T_n = P_n$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$.
6. Calculer $T_4$, $T_5$ et $T_6$.

Les polynômes $T_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.