Part I

Analyse

Chapter 1

Suites et séries numériques

Activité 1 *Calculer les DL suivants :*

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{e^x - 1}$ *à l'ordre* 1 *en* 0. *Que vaut* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+1}{x}$ *?*

2. $\ln(1+\text{sh}x)$ *à l'ordre* 4 *en* 0.

3. $\cos(x)$ *à l'ordre* 4 *en* $\pi/2$.

Activité 2 *Donner un équivalent de :*

1. $\dfrac{(\sin x)^2}{\ln(1+\tan x)}$ *quand* $x \to 0$.

2. $e^{\dfrac{x^2+1}{x^3-3x+2}} - 1$ *quand* $x \to +\infty$.

3. $\dfrac{\cos(x)}{1+\sin x}$ *quand* $x \to \pi/2$.

4. $\dfrac{n^3 + \left|\cos(n)\right|}{2n+\sqrt{n}}$ *quand* $n \to +\infty$.

Activité 3 *Déterminer la limite éventuelle des suites suivantes :*

1. $u_n = \dfrac{\big(\sin(1/n)\big)^2}{\ln\big(1+\tan(1/n)\big)}$.

2. $v_n = n \cdot \left(e^{\dfrac{n^2+1}{n^3-3n+2}} - 1 \right)$.

1.1 Développements limités et équivalents

Revoir les développements limités usuels et les équivalents.

1.1.1 Définition d'un DL

Définition 1 (Développement limité à l'ordre n en x_0) *Soit f définie au voisinage de x_0. On dit que <u>f admet un développement limité à l'ordre n en x_0</u> si on peut écrire*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 1 (Unicité) *Il y a au plus un développement limité d'ordre n en x_0.*

Proposition 2 (Parité et DL en 0) *Si f est paire, le DL en 0 ne contient que des exposants pairs. Si f est impaire, le DL en 0 ne contient que des exposants impairs.*

Proposition 3 (DL de Taylor) *Soit f une fonction C^n au voisinage de x_0. Alors, f admet un DL à l'ordre n en x_0 et*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

1.1.2 Opérations sur les DL

N.B. Ne pas oublier que pour les fonctions C^∞ (cas usuel), on peut toujours utiliser le théorème fondamental (Proposition 3).

Supposons que f et g admettent un DL d'ordre n en 0.

Proposition 4 (Addition de deux DL) *$f+g$ admet un DL d'ordre n en 0 obtenu en ajoutant les DL de f et de g.*

Proposition 5 (Produit de deux DL) *$f \cdot g$ admet un DL d'ordre n en 0 obtenu en multipliant les DL de f et de g et en ne conservant que les termes de degré $\leq n$.*

Proposition 6 (Quotient de deux DL) *Si $g(0) \neq 0$, alors, f/g admet un DL d'ordre n en 0 obtenu en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le DL de f par le DL de g.*

Proposition 7 (Composition) *Si $f(0) = 0$, alors, $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0 obtenu de la manière suivante :*

- *dans le DL de g on remplace x par le DL de f*
- *on ne conserve que les termes de degré $\leq n$.*

Proposition 8 (Dérivation) *Si on connaît un DL de f en 0 à l'ordre n, on obtient un DL de f' en 0 à l'ordre $n-1$ en dérivant terme à terme le DL de f.*

Proposition 9 (Intégration) *Si on connaît un DL de f' en 0 à l'ordre n, on obtient un DL de f en 0 à l'ordre $n+1$ en intégrant terme à terme le DL de f' et en rajoutant $f(0)$.*

1.1.3 Formulaire de DL en 0

Trois formules fondamentales :

1. DL de Taylor

2. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$

3. $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}^{n \text{ termes}}}{n!}x^n+ x^n\varepsilon(x).$

A l'aide de (1) :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

En dérivant et à l'aide de (2) :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
\mathrm{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\mathrm{Argth}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

En dérivant et à l'aide de (3) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arcsin}(x) &= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{\overbrace{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}_{n \text{ termes}}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\mathrm{Arccos}(x) &= \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(x) \\
\mathrm{Argsh}(x) &= x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{\overbrace{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}_{n \text{ termes}}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Pour mieux mémoriser : le “ clan” des huit fonctions impaires

Tous les DL commencent pas x. Le coefficient du terme en x^3 change de signe quand on passe de f à f^{-1}.

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$	$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$
$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$	$\mathrm{Argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$	$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$
$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$	$\mathrm{Argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$

1.1.4 Équivalents

Définition 2 *Soient f et g deux fonctions définies et non nulles au voisinage de $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. On dit que $\underline{f \text{ et } g \text{ sont équivalentes en } a}$ si et seulement si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f \sim_a g$ (ou plus simplement $f \sim g$).*

Proposition 10 *Si* $f \sim_a g$, *alors* $g \sim_a f$.

Proposition 11 (Théorème fondamental) *Si* f *et* g *sont équivalentes en* a, *soit elles ont toutes deux la même limite (finie ou infinie) en* a, *soit aucune d'elles n'a de limite en* a.

Proposition 12 *Une fonction est équivalente en* x_0 *au premier terme non nul de son D.L. en* x_0.

1.1.5 Opérations sur les équivalents

Proposition 13 *Si* $f_1 \sim_a g_1$ *et si* $f_2 \sim_a g_2$, *alors* $f_1 \cdot f_2 \sim_a g_1 \cdot g_2$.

Proposition 14 *Si* $f_1 \sim_a g_1$ *et si* $f_2 \sim_a g_2$, *alors* $f_1/f_2 \sim_a g_1/g_2$.

Proposition 15 *Si* $f \sim_a g$, *alors* $|f| \sim_a |g|$.

Proposition 16 *Si* $f \sim_a g$, *alors pour* x *suffisamment proche de* a, $f(x)$ *et* $g(x)$ *sont de même signe.*

Attention : on n'a pas le droit d'ajouter des équivalents.

En effet, même si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$, il se peut que $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$ ne soient pas équivalentes en a. Par exemple,

$$\sin(x) \sim_0 x, \quad -x \sim_0 -x \quad \text{mais} \quad \sin(x) - x \sim_0 -\frac{x^3}{6} \not\sim_0 x - x = 0.$$

Attention lorsque l'on veut composer des équivalents :

$$\frac{1}{x} + 1 \sim_0 \frac{1}{x} \quad \text{mais} \quad e^{1+1/x} = e \cdot e^{1/x} \not\sim_0 e^{1/x}.$$

Suites numériques

1.1.1 Exemples

1. u_n fonction de n :

   - $u_n = n^2 + 1$ (polynôme en n),
   - $u_n = \dfrac{1}{n-4}$, $u_n = \dfrac{3n-2}{4n+1}$ (fractions rationnelles en n),
   - $u_n = k^n$ (suite géométrique de raison k),
   - $u_n = \sin(n)$, $u_n = f(n)$, ...

2. suites définies par récurrence :

   - $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 5$,
   - $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (suite de Fibonacci, 1202),
   - $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n - 1}$ (suite homographique),
   - système : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}$

3. suites définies par des sommes :

   (a) séries : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   - $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (série harmonique),
   - $S_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (série de Riemann),
   - $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ (série géométrique).

   (b) sommes de Riemann : $v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

   (c) sommes de Césaro : $u_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ (moyenne des a_k).

1.1.2 Étude d'une suite

La suite est-elle bien définie pour tout n ?

On peut s'intéresser au signe de la suite. Avec 3 cas particuliers intéressants :

- $u_n \geq 0$ pour tout n (suite à termes positifs),
- $u_n \leq 0$ pour tout n (suite à termes négatifs),
- u_n alternativement positif et négatif (suite alternée).

On peut s'intéresser au sens de variation de la suite.

Définition 1 • *(u_n) est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n.*

- *(u_n) est décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.*

1.1.3 Suites convergentes

Définition 2 *La suite (u_n) converge vers ℓ si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1 (unicité de la limite) *Si (u_n) admet une limite, elle n'en a qu'une.*

Proposition 2 (opérations sur les limites) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Alors $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent. C'est aussi le cas de (u_n/v_n) si $\lim v_n \neq 0$. De plus :*

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n, \qquad \lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n,$$

$$\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n, \qquad \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

Proposition 3 *Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite de limite nulle. Alors, $(u_n v_n)$ converge vers zéro.*

Proposition 4 *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.*

Proposition 5 (théorème des gendarmes) *Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles ayant même limite ℓ. Si (u_n) est une suite réelle vérifiant $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge vers ℓ.*

Proposition 6 *Si la suite (u_n) est définie par récurrence $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, si u_n converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.*

Définition 3 *La suite u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A.$$

On note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 4 *La suite u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A.$$

On note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

1.1.4 Relations de comparaison

Définition 5 (Notations de Landau)

1. *équivalent : $u_n \sim v_n$ si $u_n = s_n v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1$.*
2. *petit o : $u_n = o(v_n)$ si $u_n = \varepsilon_n v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.*
3. *grand O : $u_n = O(v_n)$ si $|u_n| \leq C|v_n|$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Proposition 7 *Si $u_n \sim v_n$ alors les deux suite sont de même nature. Si l'une converge, l'autre converge vers la même limite. Si l'une diverge, l'autre diverge. Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$. Si $u_n \to -\infty$, alors $v_n \to -\infty$.*

1.1.5 Suites de Cauchy

Définition 6 *on dit que (u_n) est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

Proposition 8 *Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Exemple. On se donne une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $|u_n| \leq 1/2^n$ et on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n.$$

Alors la suite S_n converge.

1.1.6 Suites monotones

Théorème et définition 1 *Toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{R}$ admet un plus petit majorant. C'est* la borne supérieure de A *notée* $\sup(A)$ *:*

$$\begin{cases} \forall x \in A, & x \leq \sup(A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A, & x_\varepsilon > \sup(A) - \varepsilon. \end{cases}$$

Théorème et définition 2 *Toute partie non vide et minorée $A \subset \mathbb{R}$ admet un plus petit minorant. C'est* la borne inférieure de A *notée* $\inf(A)$.

$$\begin{cases} \forall x \in A, & x \geq \inf(A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A, & x_\varepsilon < \inf(A) + \varepsilon. \end{cases}$$

Ce résultat sert à démontrer que toute suite croissante et majorée converge et que deux suites adjacentes convergent et ont même limite. Les démonstrations doivent être connues.

Proposition 9 *Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.*

Définition 7 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Proposition 10 *Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

1.1.7 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 8 *On dit que (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) s'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\phi(n)}$.*

Proposition 11 *La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si toute suite extraite converge vers ℓ.*

Proposition 12 (théorème de Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Séries numériques

1.1.1 Définitions

Définition 1 *Soit* $(a_k)_{k\geq 0}$ *une suite de nombres réels (ou complexes). La* série de terme général a_k *est la suite* $(S_n)_{n\geq 0}$ *définie par* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *(on dit que* S_n *est une* somme partielle *de la série).*

La série de terme général a_k se note $\sum a_k$ ou $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Définition 2 *On dit que la série* $\sum a_n$ *converge (respectivement diverge) si la suite des* sommes partielles S_n *converge (respectivement ne converge pas). Dans ce cas, on note* $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *la valeur de la limite. On dit que* S *est la* somme de la série*.*

Attention, quand la série $\sum a_n$ converge, la notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est utilisée à la fois pour désigner la série et la valeur de la somme (c'est-à-dire la limite de la suite (S_n)).

1.1.2 Exemples

1. $a_k = 1$, $S_n = n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la série diverge.
2. série géométrique : $a_k = \frac{1}{2^k}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, la série converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.
3. série téléscopique : $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, voir exercice 3 de la feuille 1 de TD.

Pour tous ces exemples, on sait calculer S_n. Mais ce n'est généralement pas le cas.

1.1.3 Critère de Cauchy

Proposition 1 (critère de Cauchy) *La série* $\sum a_k$ *converge si, et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0, \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

Preuve : c'est le critère de Cauchy pour la suite (S_n) en observant que :

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}.$$

Corollaire 1 *Si la série $\sum a_k$ converge, alors $a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*
Si $a_k \underset{k\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, alors la série $\sum a_k$ diverge.

Preuve : on applique le critère de Cauchy avec $p = 1$. □
Attention :

$$a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ n'implique pas } \sum a_k \text{ converge.}$$

Contre-exemple : la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty}$ diverge.

Preuve : le critère de Cauchy n'est pas satisfait. En effet, pour tout $n \geq 0$,

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 1/2n} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq 1/2n} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n+n}}_{\geq 1/2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

□

1.1.4 Espace vectoriel des séries convergentes

Proposition 2 *Si $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont deux séries convergentes, alors $\sum(a_k + b_k)$ est une série convergente et :*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $\sum a_k$ est une série convergente, alors $\sum(\lambda a_k)$ est une série convergente et :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Corollaire 2 *Si $\sum a_k$ converge et si $\sum b_k$ diverge, alors $\sum(a_k + b_k)$ diverge.*

Preuve: $b_k = (a_k + b_k) - a_k$. Si $\sum a_k$ converge et si $\sum(a_k + b_k)$ converge, alors $\sum b_k$ converge. □

1.1.5 Séries à termes positifs

Proposition 3 *Si $\sum a_k$ est une série à termes positifs, la suite (S_n) des sommes partielles est croissante.*

Corollaire 3 *Si $\sum a_k$ est une série à termes positifs, elle est convergente si et seulement si elle est majorée.*

Preuve : une suite croissante est convergente si, et seulement si, elle est majorée. □

Proposition 4 (comparaison) *Supposons que $0 \leq a_k \leq b_k$.*

- *Si $\sum b_k$ converge, alors $\sum a_k$ converge.*
- *Si $\sum a_k$ diverge, alors $\sum b_k$ diverge.*

Preuve : Soit (A_n) (respectivement (B_n)) la suite des sommes partielles de la série de terme général a_k (respectivement b_k). Alors,

$$\sum b_k \text{ converge } \Rightarrow (B_n) \text{ est majorée } \Rightarrow (A_n) \text{ est majorée } \Rightarrow \sum a_k \text{ converge.}$$

□

Proposition 5 (équivalents) *Si $0 \leq a_k \sim b_k \geq 0$, alors $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont de même nature (l'une est convergente si, et seulement si, l'autre est convergente).*

Si elles divergent, les sommes partielles sont équivalentes.

Si elles convergent, les restes sont équivalents.

Preuve que les séries sont de même nature : Comme $a_k/b_k \to 1$, si k est suffisamment grand, alors $\frac{1}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3}{2}$. Par conséquent, $\dfrac{1}{2}b_k \leq a_k \leq \dfrac{3}{2}b_k$. Le résultat suit du théorème de comparaison. □

Attention, si $a_k \sim b_k$ sans que les a_k soient positifs, les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ ne sont pas nécessairement de même nature.

Contre-exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ (voir exercice 6 de la feuille 1 de TD).

Séries à termes positifs de référence

1. séries géométriques : $\sum r^n$ converge si, et seulement si, $|r| < 1$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

2. séries de Riemann : $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Proposition 6 (critère de d'Alembert) *Si $a_k > 0$ pour tout k et si $a_{k+1}/a_k \longrightarrow \ell$ alors,*

- *si $\ell < 1$, la série converge,*
- *si $\ell > 1$, la série diverge,*
- *si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.*

1.1.6 Séries alternées

Définition 3 *La série $\sum a_k$ est une série alternée si $a_k \geq 0$ pour k pair et $a_{k+1} \leq 0$ pour k impair (ou vice et versa).*

Proposition 7 *Si $\sum a_k$ est une série alternée et si la suite $|a_k|$ est décroissante et converge vers 0, alors la série $\sum a_k$ est convergente. De plus :*

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq |a_{n+1}|.$$

Exemple : la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

Preuve : On va le montrer dans le cas où $a_{2n} \geq 0 \geq a_{2n+1}$. L'autre cas est similaire.

Soit S_n la somme partielle de rang n. On montre que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont des suites adjacentes. Plus précisément, comme $0 \leq a_{2n+2} \leq -a_{2n+1} \leq a_{2n}$, on a :

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n-1}$$

et

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n}.$$

De plus :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme les suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite S (qui est la somme de la série). De plus, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$|S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}|.$$

□

1.1.7 Séries absolument convergentes

Définition 4 *On dit que la série $\sum a_k$ est absolument convergente si la série $\sum |a_k|$ est convergente.*

Proposition 8 *Si la série $\sum a_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Preuve : on applique le critère de Cauchy dans les deux sens. La série $\sum |a_k|$ converge. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ et $p \geq 0$, on a :

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

Alors, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

$\square$

Attention, il y a des séries qui sont convergentes sans être absolument convergente, par exemple la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercices

Exercice 1

1. *Donner les développements limités à l'ordre* n *en* 0 *des fonctions suivantes:*
   (a) $\dfrac{1}{1-x}$
   (b) $\ln(1-x)$
   (c) $\ln(1+x^2)$
   (d) $\sinh x$

2. *Donner les développements limités à l'ordre 3 en* 0 *des fonctions suivantes:*
   (a) $\sqrt[5]{1+x}$
   (b) $(1-x)^{\frac{1}{x}}$
   (c) $\ln(1+\sin x)$
   (d) $\dfrac{1}{\cos(x)}$

Exercice 2

Calculer les limites des suites suivantes :

1. $\cosh\left(\dfrac{a^n}{\sqrt{n}}\right)$ *(discuter suivant que* $a<-1$, $-1\leq a\leq 1$ *ou* $1<a$*)*
2. $\ln\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$
3. $\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $\sqrt[6]{n^6+2n^4}-\sqrt[3]{n^3+n}$
5. $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+e^{-n^2}}{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}$
6. $\dfrac{(n+1)^2}{(n^2+1)^3}$

7. $\tan \dfrac{1}{2^n}$

8. $\dfrac{n!}{n^n + 2n + \ln(n)}$

9. $\dfrac{n^{\ln n}}{n^n}$

Indication: Pensez à calculer un équivalent.

Exercice 3

1. *Déterminer pour chaque suite de l'exercice précédent si c'est le terme général d'une série convergente ou non.*

2. *En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer la nature des séries de terme général suivant:*

   (a) $\dfrac{n^a}{a^n}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

   (b) $\dfrac{n!}{a^n}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

   (c) $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^n$

   (d) $\dfrac{n}{3^n}$

Exercice 4

Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. *Calculer* $\sum_{k=1}^{n} u_k$ *en décomposant* u_n *en éléments simples. En déduire que cette série converge et donner la valeur de sa somme.*

De la même manière, démontrer que les séries de terme général $v_n = \dfrac{n+2}{n(n^2-1)}$ $(n \geq 2)$ *et* $w_n = \ln \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ *convergent et calculer leur somme.*

Exercice 5

Soit $z_n = \dfrac{n^3}{n!}$, $n \geq 0$.

1. *Déterminer les réels* a, b, c *tels que* $z_n = \dfrac{a}{(n-2)!} + \dfrac{b}{(n-1)!} + \dfrac{c}{n!}$.

2. *En déduire que la série de terme général z_n converge et calculer sa somme.*

Exercice 6

Soient les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ et $v_n = \dfrac{u_n}{\alpha + u_n}$, $\alpha > 0$. Démontrer que les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Exercice 7

On considère les suites équivalentes $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $\sum v_n$ est convergente. En faisant un développement limité de u_n, montrer que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 8

On rappelle le résultat suivant pour deux séries $\sum u_k$, $\sum v_k$ à termes positifs équivalents:

- *Si les séries divergent, leurs sommes partielles de rang N, S_N et S'_N, sont équivalentes.*
- *Si les séries convergent, les restes partiels de rang N, R_N et R'_N, sont équivalents.*

1. *Démontrer que la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $n > 0$ converge puis donner un équivalent de son reste R_N.*
2. *Démontrer que la série de terme général $v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n\ln(n)}$, $n > 0$ diverge puis donner un équivalent de la somme partielle S_N.*

Exercice 9 (Séries de Bertrand)

Soit $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $n \geq 2$, où α est un réel différent de 1 et β est un réel quelconque.

1. *Montrer que si $\alpha > 1$ la série converge et si $\alpha < 1$, elle diverge.*
2. *Donner la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n}) + ne^{-\frac{1}{n}}}{n^\beta \ln n}$ en fonction du réel β.*

Exercice 10

Etudier la convergence absolue et la convergence des séries de terme général suivant:

1. $(-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $\left(1 - \frac{n}{\ln n}\right)^{-n}$
3. $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
4. $\frac{(-1)^n}{n \sqrt[n]{n}}$
5. $\cos n \cdot \sin \frac{1}{n^2}$
6. $\frac{(-1)^n}{n^{(1+n^a)}}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 11

1. *Montrer que* $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) - 1 \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$.
2. *En déduire la nature de la série de terme général* u_n.

Test 1

Exercice 1 *Déterminer la nature des séries suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2+\sin n}{n^2}$,

2. $\displaystyle\sum \frac{n^\alpha}{n!}$ *où* $\alpha > 0$,

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n + n^4}{n! + 2^n}$,

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$.

Exercice 2 *Soit* $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geq 2$.

1. *Pour tout* $p \geq 1$, *calculer* $a_{2p} + a_{2p+1}$.

2. *En déduire pour tout* $n \geq 1$ *la valeur de* S_{2n+1} *et de* S_{2n+2} *où* $S_N = \displaystyle\sum_{p=2}^{N} a_p$.

3. *Montrer alors que* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ *est convergente et donner sa valeur.*

Corrigé du test 1

Exercice 1 1. *Posons* $u_n = \dfrac{2+\sin n}{n^2}$. *Alors, pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$0 \leq u_n \leq \frac{3}{n^2}.$$

On a une série à termes positifs. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente (critère de Riemann), le théorème de comparaison implique que la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

2. *Posons* $u_n = \dfrac{n^\alpha}{n!}$. *Soit* k *un entier tel que* $k > \alpha + 1$. *Pour* $n \geq k$, *on a :*
$$0 \leq u_n \leq \frac{n^\alpha}{(n-k+1)^k} \sim \frac{1}{n^\beta}$$
avec $\beta = k - \alpha > 1$. *La série* $\sum \dfrac{n^\alpha}{(n-k+1)^k}$ *est donc convergente ainsi que la série* $\sum u_n$.

3. *Posons* $u_n = \dfrac{\ln n + n^4}{n! + 2^n}$. *Une majoration brutale donne, pour* $n \geq 6$ *:*
$$0 \leq u_n \leq \frac{2n^4}{(n-5)^6} \sim \frac{2}{n^2}.$$
On en déduit que la série $\sum u_n$ *est convergente.*

4. *Posons* $u_n = \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^{n^2}$. *Alors :*
$$u_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n^2} = e^{-n^2 \ln(1+3/n)}.$$
Comme
$$-n^2 \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) \sim -n^2 \cdot \frac{3}{n} = -3n,$$
pour n *suffisamment grand, on a*
$$-n^2 \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) \leq -2n$$
et donc
$$(0 \leq) u_n \leq e^{-2n}.$$
La suite (e^{-2n}) *est une suite géométrique de raison* $e^{-2} < 1$. *La série* e^{-2n} *est donc une série convergente. Par conséquent, la série à termes positifs* $\sum u_n$ *est convergente.*

Exercice 2 1. *On a :*
$$a_{2p} + a_{2p+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2p}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right) = \ln\left(\frac{2p+1}{2p} \cdot \frac{2p}{2p+1}\right) = 0.$$

2. *On a donc* $S_{2n+1} = 0$ *et* $S_{2n+2} = a_{2n+2}$.

3. *Notons que :*

$$a_n \sim \frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent :

$$S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{et} \quad S_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela montre que la suite (S_n) *des sommes partielles tend vers* 0 *et donc que la série est convergente de somme égale à* 0.

Chapter 2

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

On s'intéresse aux fonctions définies par des limites : $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Par exemple :

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Les questions que l'on se pose :

- f est-elle bien définie ?
- quelles propriétés de f_n implique quelles propriétés de f ? En particulier :
  - si pour tout n, f_n est continue, est ce que f est continue ?
  - si pour tout n, f_n est C^1, est ce que f est C^1 ?
  - si on sait calculer $\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$, a-t-on

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.0.8 Convergence simple

Définition 1 *Une suite de fonctions* $(f_n : X \to \mathbb{R})$ converge simplement *vers* $f : X \to \mathbb{R}$ *sur* X *si :*

$$\forall x \in X, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Exemple : $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$. Si $x = 1$, alors $f_n(x) = 1$ pour tout n et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Si $x \in [0,1[$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, la suite (f_n) converge simplement vers f sr $[0,1]$ avec :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent, les fonctions f_n sont continues mais la limite f ne l'est pas.

2.0.9 Convergence uniforme

Définition 2 *Une suite de fonctions* $(f_n : X \to \mathbb{R})$ converge uniformément *vers* $f : X \to \mathbb{R}$ *sur* X *si :*

$$\sup_{x \in X} \Big| f_n(x) - f(x) \Big| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans l'exemple précédent, la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$ (ni sur $[0,1[$). En effet, pour tout n, $\sup_{x \in [0,1]} \Big| f_n(x) - f(x) \Big| = 1$.

En revanche, la même suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1/2]$. En effet,

$$\sup_{x \in [0,1/2]} \Big| f_n(x) - f(x) \Big| = \frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 1 (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme) *Si* $(f_n : X \to \mathbb{R})$ *est une suite de fonctions telle que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ \forall x \in X, \quad \Big| f_{n+p}(x) - f_n(x) \Big| \leq \varepsilon$$

alors la suite $(f_n : X \to \mathbb{R})$ *converge uniformément sur* X *vers une limite* $f : X \to \mathbb{R}$*.*

2.0.10 Continuité

Proposition 2 *Supposons que la suite* $(f_n : X \to \mathbb{R})$ *converge uniformément sur* X *vers* $f : X \to \mathbb{R}$*.*

Si toutes les fonctions f_n *sont continues en* $x_0 \in X$*, alors* f *est continue en* $x_0 \in X$*.*

- *Si toutes les fonctions* f_n *sont continues sur* X*, alors* f *est continue sur* X*.*

Preuve. Étant donné $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \Big| f(x) - f(x_0) \Big| &\leq \Big| f(x) - f_n(x) \Big| + \Big| f_n(x) - f_n(x_0) \Big| + \Big| f_n(x_0) - f(x_0) \Big| \\ &\leq 2 \sup_{y \in X} \Big| f_n(y) - f(y) \Big| + \Big| f_n(x) - f_n(x_0) \Big|. \end{aligned}$$

On voit donc qu'il existe n_0 tel que :

$$\forall x \in X, \quad \Big| f(x) - f(x_0) \Big| \leq \Big| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \Big| + \varepsilon/2.$$

On utilise alors la continuité de f_{n_0} en x_0 ce qui montre l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$, on a :

$$\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| \leq \varepsilon/2.$$

Alors, pour tou $x \in X$ vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$, on a :

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Cela montre la continuité de f en x_0. □

2.0.11 Intégrabilité

Proposition 3 *Soit $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})$ une suite de fonctions continues. Si (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors :*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

Preuve. La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc intégrable sur $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, si n est suffisamment grand, on a :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Donc :

$$\left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right) - \varepsilon \cdot (b-a) \leq \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right) + \varepsilon \cdot (b-a).$$

Autrement dit :

$$\left|\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon \cdot (b-a).$$

□

2.0.12 Dérivabilité

Proposition 4 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Supposons que $(f_n : I \to \mathbb{R})$ est une suite de fonctions telles que :*

- *f_n est C^1 sur I,*
- *$f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ pour un certain $x_0 \in I$,*

- *la suite des dérivées* (f_n') *converge uniformément sur* I *vers une fonction* g.

Alors,

1. (f_n) *converge simplement sur* I *vers une fonction* f,
2. f *est de classe* C^1 *sur* I,
3. $f(x_0) = \ell$, $f' = g$ *et* $f(x) = \ell + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$.

Si de plus I *est un intervalle borné, alors* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* I.

Preuve. On applique le résultat d'intégrabilité sur $[x_0, x]$:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\ \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Donc :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t.$$

La limite

$$f(t) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$$

est donc une primitive de g. C'est donc une fonction C^1 de dérivée $f' = g$.

Si $I \subset [a, b]$ est un intervalle borné :

$$\begin{aligned} \Big|f_n(x) - f(x)\Big| &= \Big|f_n(x_0) - \ell + \int_{x_0}^{x} \Big(f_n'(t) - g(t)\Big)\ \mathrm{d}t\Big| \\ &\leq \Big|f_n(x_0) - \ell\Big| + (b-a) \cdot \sup_{t\in I}\Big|f_n'(t) - g(t)\Big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

La convergence de (f_n) vers f est donc uniforme sur I. □

Séries de fonctions

On s'intéresse aux fonctions définies par des séries :

$$f(x) = \sum_k f_k(x).$$

Deux exemples :

1. les séries entières : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec (a_k) une suite de nombres réels ou complexes. Par exemple : $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
2. les séries de Fourier : $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$.

2.0.1 Convergence simple, absolue, uniforme et normale

Dans tout ce qui suit, $(f_k : X \to \mathbb{R})$ est une suite de fonctions.

Définition 1 (Convergence simple)
La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement *sur* X *si pour tout* $x \in X$, *la série numérique* $\sum f_k(x)$ *converge. On note alors :* $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ *la somme de la série.*

Exemple : le critère de d'Alembert montre que la série de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ est convergente. On appelle exp sa somme.

Définition 2 (Convergence absolue)
La série de fonctions $\sum f_k$ converge absolument *sur* X *si pour tout* $x \in X$, *la série numérique* $\sum \left| f_k(x) \right|$ *est convergente.*

Proposition 1 *Si la série de fonctions* $\sum f_k$ *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Exemple : la série $\sum x^k/k!$ est absolument convergente.

Définition 3 (Convergence uniforme)
La série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément *sur* X *vers* f *si la suite des sommes partielles* $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, *converge uniformément sur* X.

Proposition 2 *Si la série de fonctions $\sum f_k$ est uniformément convergente, alors elle est convergente.*

Proposition 3 (Critère de Cauchy)
La série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément *sur X vers f si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 1,\ \forall x \in X, \quad \Big| u_{n+1}(x) + \cdots u_{n+p}(x) \Big| \leq \varepsilon.$$

Définition 4 (Convergence normale)
La série $\sum f_k$ converge normalement sur X si la série $\sum \sup_{x \in X} \Big| f_k(x) \Big|$ est convergente.

Exemple : pour tout $M > 0$, la série $\sum x^k/k!$ est normalement convergente sur $[-M, M]$.

Proposition 4 *Si la série de fonctions $\sum f_k$ est normalement convergente, alors elle est uniformément convergente et absolument convergente.*

Preuve. Critère de Cauchy et inégalité triangulaire. □

On voit donc que pour tout $M > 0$, la série $\sum x^k/k!$ est uniformément convergente sur $[-M, M]$.

2.0.2 Continuité

La limite uniforme d'une série de fonctions continues est continue.

Proposition 5 *Si les fonctions $f_k : X \to \mathbb{R}$ sont continues et si la série $\sum f_k$ converge uniformément sur X, alors $\sum f_k$ est une fonction continue.*

Preuve. Les sommes partielles S_n sont continues. La suite (S_n) converge uniformément sur X. Sa limite est donc continue (théorème de continuité pour les suites de fonctions. □

La fonction exp est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2.0.3 Intégration sur un segment

S'il y a convergence uniforme sur un segment, on peut permuter série et intégrale.

Proposition 6 *Si les fonctions $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues et si la série $\sum f_k$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_k(x) \,\mathrm{d}x \right).$$

Preuve. On applique le théorème d'échange de limite et intégrale pour la suite des sommes partielles S_n qui converge uniformément vers la somme de la série :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \quad & \underset{\text{def}}{=} \quad \int_a^b \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k \\
& \underset{\text{échange limite et intégrale}}{=} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} f_k \right) \\
& \underset{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k \\
& \underset{\text{def}}{=} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k.
\end{aligned}$$

□

Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^b \exp(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^b \frac{x^k}{k!} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} = \exp(b) - 1.$$

La fonction exp est donc sa propre primitive. On voit donc que exp est une fonction dérivable et que $\exp' = \exp$.

2.0.4 Dérivabilité

Si la série des dérivées converge uniformément, alors on peut dériver terme à terme.

Proposition 7 *Si*

- *$f_k : I \to \mathbb{R}$ est C^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,*
- *$\sum f_k(x_0)$ converge pour un $x_0 \in I$ et*
- *$\sum f_k'$ converge uniformément sur I,*

alors la série $\sum f_k$ *converge sur* I*, la somme* $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ *est une fonction de classe* C^1 *sur* I *et :*

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'.$$

De plus, si I *est borné, la série* $\sum f_k$ *converge uniformément sur* I*.*

Preuve. Appliquer le théorème de dérivabilité pour la limite d'une suite de fonctions à la suite des sommes partielles. $\square$

2.0.5 Séries alternées

Proposition 8 *Soit* $(f_k : X \to [0, +\infty[)$ *une suite de fonctions qui converge simplement (respectivement uniformément) sur* X *vers* 0*, avec pour tout* $x \in X$*,* $f_{k+1}(x) \leq f_k(x)$*. Alors, la série* $\sum (-1)^k f_k$ *converge simplement (respectivement uniformément) vers une fonction* f *sur* X*.*

Preuve. On applique le théorème sur les séries alternées en observant que :

$$\forall x \in X, \quad \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k(x) \right| \leq f_{n+1}(x).$$

$\square$

Exercices

Exercice 1 (Étude de domaine de convergence de suites de fonctions)

Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes sur le domaine I:

1. $a_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $I = [-1, 1]$
2. $b_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $I = \mathbb{R}$
3. $c_n(x) = \frac{1}{1 + n\cos(x)}$, $I = [0, \pi]$
4. $d_n(x) = xe^{-nx}$, $I = \mathbb{R}_+$
5. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $I =]0, 1]$
6. $g_n(x) = n^2(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $I = [0, 2]$

Exercice 2 (Suite de fonctions C^1 convergeant vers la valeur absolue)

Soit la suite $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ x & \text{si } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1. *Montrer que toutes les fonctions f_n sont C^1.*
2. *Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $(x \mapsto |x|)$.*

Exercice 3 (Étude de convergence)

Soit $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$.
Étudier la convergence simple, puis uniforme sur $\mathbb{R}_+$ et enfin sur $[\alpha, +\infty[$, avec $\alpha > 0$.

Exercice 4 (Convergence de $f_n(x_n)$)

1. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction* f. *Soit* (x_n) *une suite convergeant vers* x. *Montrer que la suite* $(f_n(x_n))$ *converge vers* $f(x)$.

On définit maintenant la suite $(g_n : [0,1] \to \mathbb{R})$ *par*

$$g_n(x) = \begin{cases} nx & si\ 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & si\ \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n} \\ 0 & si\ \dfrac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. *Étudier la convergence simple de la suite* (g_n).

3. *Étudier la convergence de la suite* $\Big(g_n(1/n)\Big)$. *Que peut-on en conclure sur la convergence uniforme de la suite* (g_n) *?*

Exercice 5 (Suite de fonctions C^p)
Soit (f_n) *une suite de fonctions de classe* C^p *sur un intervalle* I *telle que* $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\ldots$, $f^{(p-1)}(x_0)$ *convergent pour un* $x_0 \in I$ *et telle que la suite* $f_n^{(p)}$ *converge uniformément sur* I. *Montrer* (f_n) *converge uniformément sur* I *et que la limite est une fonction de classe* C^p.

Exercice 6 (Suite de fonctions définies par des intégrales)
Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Pour* $x \in [0,1]$, *on pose* $f_n(x) = \int_0^x g(t^n)dt$. *Etudier la convergence de la suite* (f_n) *sur* $[0, \alpha]$ *avec* $0 < \alpha < 1$.

Exercice 7 (Non inversion limite–intégrale)
Soit $f_n(x) = n\cos^n(x) sin(x)$.

1. *Déterminer la limite simple de la suite* (f_n).

2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t)dt$.

Exercice 8 (Convergence uniforme de polynômes)
Soit (P_n) *une suite de polynômes convergeant uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f.

1. *En utilisant le critère de Cauchy, montrer qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$, *le polynôme* $(P_n - P_{n_0})$ *est constant.*

On note $u_n = P_n(0) - P_{n_0}(0)$.

2. *Montrer que la suite* u_n *converge.*
3. *Montrer que* f *est un polynôme.*

Exercice 9 (Étude de domaine de convergence de séries de fonctions)

Étudier la convergence des séries de fonctions suivantes sur le domaine I*:*

1. $\sum a_n$ *avec* $a_n(x) = \dfrac{x}{x^2 + n^2}$, $I = \mathbb{R}$
2. $\sum b_n$ *avec* $b_n(x) = e^{-\sqrt{n} \cdot x}$, $I = [a, +\infty]$, $a > 0$
3. $\sum c_n$ *avec* $c_n(x) = \dfrac{1}{1 + n^2 x^2}$, $I = [1, +\infty[$
4. $\sum d_n$ *avec* $d_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$, $I = \mathbb{R}_+$
5. $\sum f_n$ *avec* $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, $I = \mathbb{R}$
6. $\sum g_n$ *avec* $g_n(x) = n^a x^n (1 - x)$, $I = [0, 1]$, $a \in \mathbb{R}$

Exercice 10 (Un calcul de série numérique)

Soit $u_n(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$ *et* $v_n(x) = (-1)^{n+1}x^{n-1}$.

1. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge normalement sur tout intervalle* $[-a, a]$, *avec* $0 < a < 1$. *La limite, notée* f, *de cette série est-elle continue sur* $]-1, 1[$ *?*

2. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *converge normalement sur tout intervalle* $[-a, a]$, *avec* $0 < a < 1$.

3. *En déduire que la fonction* f *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et donner une expression simple*
de f'. *En déduire une expression de* f *sur* $]-1, 1[$.

4. *En majorant le reste* $\sum_{n=N}^{\infty} u_n(x)$, *montrer que la série converge uniformément sur* $[0, 1]$. *En déduire que* f *est continue sur* $[0, 1]$.

5. *Déduire de tout ce qui précéde la valeur de* $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 11 (Un équivalent de ζ au voisinage de 1)

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$.

1. *Montrer que la série définissant la fonction* ζ *converge normalement sur* $[a, +\infty[$ *pour tout* $a > 1$. *En déduire que* ζ *est continue sur* $]1, +\infty[$.

2. *Montrer que la fonction* ζ *est* C^1 *sur* $]1, +\infty[$.

3. *Tracer le graphe de la fonction* ζ *sur* $]1, +\infty[$.

Soit $a(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

4. *Montrer que la série définissant la fonction* a *converge uniformément sur* $[1, +\infty[$.
En déduire que a *est continue sur* $[1, +\infty[$.

5. *Montrer que l'on a :* $a(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta(x)$.

6. *En déduire un équivalent de* ζ *lorsque* x *tend vers* 1^+.

Corrigé de la feuille 2

Exercice 12 (Étude de domaine de convergence de suites de fonctions)

1. $a_n(x) = \sin(\frac{x}{2^n})$ *sur* $[-1, 1]$ *:*

   - *Convergence simple : Pour tout* $x \in [-1, 1]$, $\frac{x}{2^n}$ *tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini, donc, par continuité de la fonction sinus,* (a_n) *converge simplement vers la fonction nulle.*
   - *Convergence uniforme : Pour tout* $x \in [-1, 1]$, $|\sin(\frac{x}{2^n}) - 0| \leq |\sin(\frac{1}{2^n})|$ *qui tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini. Il y a donc convergence uniforme.*

2. $b_n(x) = \sin(\frac{x}{2^n})$ *sur* $\mathbb{R}$ *:*

   - *Convergence simple : Idem.*
   - *Convergence uniforme : Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a, pour* $x = 2^n$, $|b_n(2^n) - 0| = \sin(1)$. *Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.*

3. $c_n(x) = \frac{1}{1+n\cos(x)}$ *sur* $[0, \pi]$ *:*

   - *Convergence simple : Pour tout* $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, $|1 + n\cos(x)|$ *tend vers l'infini quand* n *augmente et* $c_n(x)$ *converge alors vers* 0. *Pour* $x = \frac{\pi}{2}$, *la suite est constante égale à* 1. *Il y a donc convergence simple vers la fonction constante égale à zéro sauf en* 1, *où elle vaut* 1.
   - *Convergence uniforme : Une suite de fonctions continues converge vers une fonction discontinue, la convergence ne peut donc pas être uniforme.*

4. $d_n(x) = xe^{-nx}$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *:*

   - *Convergence simple : D'une part, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, e^{-nx} *tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini. D'autre part, pour* $x = 0$, *la suite* $(d_n(0))$ *est constante égale à* 0. *Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.*

- *Convergence uniforme : En étudiant les variations de* $f(x) = |xe^{-nx} - 0| = xe^{-nx}$*, on observe que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$*, on a* $0 \leq xe^{-nx} \leq ne^{-n^2} \leq n^2e^{-n^2}$*. Or* $\lim_{n\to\infty} n^2e^{-n^2} = \lim_{m\to\infty} me^{-m} = 0$ *avec le changement de variable* $m = n^2$*. Il y a donc convergence uniforme.*

5. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ *sur* $]0, 1]$ *:*

   - *Convergence simple : D'une part, pour tout* $x \in]0, 1[$*,* nx^n *tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini. D'autre part, pour* $x = 0$*, la suite* $(f_n(0))$ *est constante égale à* 0*. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.*
   - *Convergence uniforme : Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a, pour* $x = e^{-\frac{1}{n}}$*,* $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{e}$*. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.*

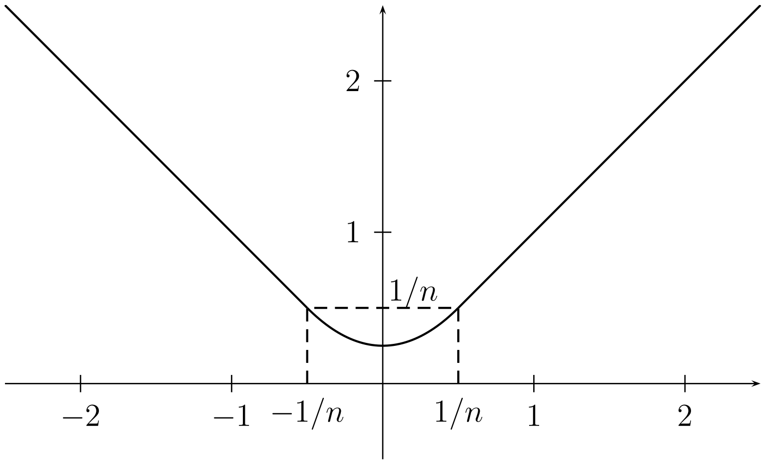
6. $g_n(x) = n^2(1 - x)^n \sin(\frac{\pi}{2}x)$ *sur* $[0, 2]$ *:*

   - *Convergence simple : D'une part, pour tout* $x \in]0, 2[$*,* $\lim_{n\to\infty} n^2(1 - x)^n = \lim_{n\to\infty} n^2(y)^n = 0$ *avec le changement de variable* $y = 1 - x \in]-1, 1[$*. D'autre part, pour* $x = 0$ *et* $x = 2$*, la suite* $(g_n(x))$ *est constante égale à* 0*. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.*
   - *Convergence uniforme : Considérons la suite* $x_n = \frac{1}{n}$*. D'après les nombreux exercices traitant cela dans la feuille de TD n°1, on a* $\lim_{n\to\infty} (1 - x_n)^n = \dfrac{1}{e}$*. De plus, on a également* $\sin(\frac{\pi}{2}x_n) \sim \frac{\pi}{2n}$*. On a donc, au final,* $g_n(x_n) \sim \frac{n\pi}{2e}$*, ce qui, notamment, empêche la suite* $\max_{x\in[0,2]} |g_n(x) - 0|$ *de tendre vers* 0 *(comparez avec l'exercice 4). Il n'y a donc pas convergence uniforme.*

Exercice 13 (Suite de fonctions C^1 convergeant vers la valeur absolue)

Avant de commencer, un petit dessin du graphe de f_n *ne fera pas de mal :*

1. *La continuité et la dérivabilité sont claires sur les intervalles* $]-\infty, -\frac{1}{n}[$*,* $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ *et* $]\frac{1}{n}, \infty[$*. Il suffit donc de vérifier pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*



- $f_n\left(-\frac{1}{n}^-\right) = \frac{1}{n} = \frac{n}{2n^2} + \frac{1}{2n} = f_n\left(-\frac{1}{n}^+\right)$;
- $f_n\left(\frac{1}{n}^-\right) = \frac{n}{2n^2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = f_n\left(\frac{1}{n}^+\right)$;
- $f_n'\left(-\frac{1}{n}^-\right) = -1 = -\frac{n}{n} = f_n'\left(-\frac{1}{n}^+\right)$;
- $f_n'\left(\frac{1}{n}^-\right) = \frac{n}{n} = 1 = f_n'\left(\frac{1}{n}^+\right)$.

2. *En étudiant les variations du polynôme* $\dfrac{nx^2}{2} + \dfrac{1}{2n}$, *on observe que pour* $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, *on a* $0 \leq f_n(x) \leq |x|$, *ce qui donne immédiatement pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, $\left|f_n(x) - |x|\right| \leq \frac{1}{n}$ *qui tend bien vers* 0 *lorsque* n *augmente. La suite de fonctions* (f_n) *converge donc uniformément vers la valeur absolue.*

Exercice 14 (Etude de convergence)

Commençons par étudier la convergence simple de $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{x}{1/n + nx^2}$. *D'une part, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(1/n + nx^2)$ *tend vers l'infini lorsque* n *tend vers l'infini. La suite* $(f_n(x))$ *tend donc, alors, vers* 0. *D'autre part, pour* $x = 0$, *la suite* $(f_n(0))$ *est constante égale à* 0. *Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $x_n = 1/n$, $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
Cet argument, cependant, ne peut pas être utilisé sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, la suite (x_n) sortant de cet intervalle pour n assez grand. Et pour cause, l'étude des variations de la fonction f_n montre, justement, qu'elle est décroissante tendant vers 0 pour $x \geq \frac{1}{n}$. On a donc, pour $x \in [a, +\infty[$ et n assez grand, $|f_n(x) - 0| \leq f_n(a)$, qui, comme, on l'a vu, tend vers 0 lorsque n augmente. Pour tout $a > 0$, il y a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

Exercice 15 (Convergence de $f_n(x_n)$)

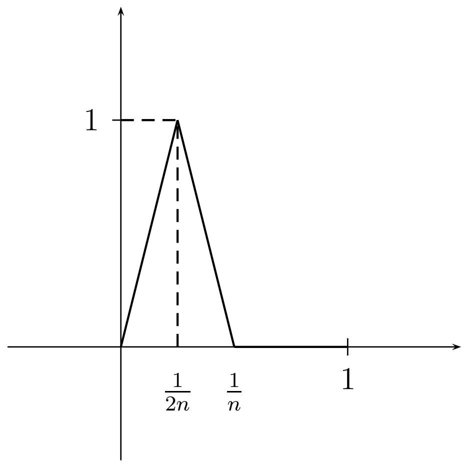
1. *Pour commencer, remarquons qu'en tant que limite uniforme de fonctions continues, la fonction f est, elle-même continue. Revenons maintenant à la définition d'une suite convergente en posant $\varepsilon > 0$.*
   La suite de fonctions (f_n) converge uniformèment vers f, il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_1$ et tout x, on ait $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   De plus, la fonction f étant continue, il existe également $\eta > 0$ tel que pour tout y vérifiant $|y - x| < \eta$, on ait $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Or, la suite (x_n) convergeant vers x, il existe un rang n_2 à partir duquel on a bien $|x_n - x| < \eta$.
   On pose maintenant $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On a alors, pour tout $n \geq n_0$,
   $$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$
   La suite $(f_n(x_n))$ converge donc bien vers $f(x)$.

Ici, un petit dessin du graphe de g_n s'impose :

2. *D'une part, pour tout $x \in]0, 1]$, il existe un rang à partir duquel on a $\frac{2}{n} \leq x$ et donc à partir duquel la suite $(g_n(x))$ devient constante égale à 0. D'autre part, pour $x = 0$, la suite $(g_n(0))$ est constante égale à 0. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.*

3. *La suite $\left(g_n(\frac{1}{n})\right)$ étant constante égale à 1, elle ne peut pas converger vers $0 = f(0)$. D'après la question (1), il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.*

Remarque : La suite de fonction de l'exercice 3 donne un autre contre-exemple.



Exercice 16 (Suite de fonctions C^p)

Démontrons par récurrence sur p la propriété :
Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^p sur un intervalle I telle que $f(x_0)$, $f'(x_0)$, ..., $f^{(p-1)}(x_0)$ convergent pour un $x_0 \in I$ et telle que la suite $f_n^{(p)}$ converge uniformèment sur I vers une fonction g. Alors (f_n) converge uniformèment sur I et la limite est une fonction de classe C^p, de dérivée $p^{\text{ième}}$ égale à g.

- *Le cas $p = 1$ n'est autre que le théorème de dérivabilité.*
- *Supposons le résultat vrai au rang $(p-1)$.*
  Soit (f_n) une suite de fonctions telle que décrite dans l'énoncé. Considérons la suite de fonctions $(f_n^{(p-1)})$:
  - *toutes les fonctions $f_n^{(p-1)}$ sont dérivables ;*
  - *la suite $f_n^{(p-1)}(x_0)$ converge ;*
  - *la suite de fonctions $\left((f_n^{(p-1)})'\right) = (f_n^{(p)})$ converge uniformèment vers une fonction g.*

  D'aprè le théorème de dérivabilité, $(f_n^{(p-1)})$ converge uniformément vers une fonction h de classe C^1 de dérivée égale à g. On utilise alors l'hypothèse de récurrence sur la suite (f_n). On en conclut qu'elle converge uniformèment vers une fonction de classe C^{p-1}, de dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ égale à h. Mais d'après ce que l'on a dit de h, la limite de la suite (f_n) est donc même de classe C^p, de dérivée $p^{\text{ième}}$ égale à g.

- *D'après le principe de raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque : La propriété est même vraie pour $p = 0$, il ne s'agit que de la continuité d'une limite uniforme de fonctions continues.

Exercice 17 (Suite de fonctions définies par des intégrales)

Commençons par définir la suite de fonctions (g_n) sur $[0, \alpha]$ par $g_n(x) = g(x^n)$. Par continuité de g en 0, cette suite converge simplement vers la fonction constante égale à $g(0)$. Montrons que cette convergence est même uniforme. Pour cela, le mieux est encore de revenir à la définition.
Soit $\varepsilon > 0$. Toujours par continuité de g en 0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [0, \eta[$, on ait $|g(y) - g(0)| < \varepsilon$. Or, il existe un certain rang n_0 à partir duquel on a également, pour tout $x \in [0, \alpha]$, $0 \leq x^n \leq \alpha^n < \eta$ et donc $|g_n(x) - g(0)| < \varepsilon$. La convergence est donc uniforme sur $[0, \alpha]$, ainsi que sur tout sous–intervalle.

D'après le théorème d'intégrabilité, à x fixé, la suite $(f_n(x))$ converge vers $\int_0^x g(0)dt = xg(0)$. L'uniformité de cette convergence découle de l'étude par ε précédente. On a, en effet, pour tout $x \in [0, \alpha]$:

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - xg(0)| &\leq \int_0^x |g(t^n) - g(0)|\, dt \\
&\leq \int_0^x \varepsilon dt \qquad\qquad \textit{pour } n \geq n_0 \\
&\leq \varepsilon x \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Exercice 18 (Non inversion limite–intégrale)

1. *Fixonx $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. On a alors $-1 < \cos(x) < 1$, et $n \cos^n(x)$ tend vers 0 lorsque n augmente. D'autre part, pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, la suite est constante égale à 0. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle.*

2. *Le calcul se fait directemet :*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt &= \int_0^{\pi/2} n\cos^n(t)sin(t)dt \\ &= \left[-\frac{n}{n+1}\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{n}{n+1} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \int_0^{\pi/2} 0 \text{ d}t.\end{aligned}$$

Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.

Exercice 19 (Convergence uniforme de polynômes)

1. *D'après le critère de Cauchy, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq n_0$, $|P_n(x) - P_{n_0}(x)| < 1$. Le polynôme $(P_n - P_{n_0})$ est donc borné sur $\mathbb{R}$, donc constant. Autrement dit, $P_n = P_{n_0} + cst$ où la constante peut être calculée en évaluant $(P_n - P_{n_0})$ en n'importe quel réel, 0 par exemple.*

2. *La convergence uniforme impliquant la convergence simple, la suite $(P_n(0))$ converge vers une limite l. La suite (u_n) converge donc, elle aussi, vers une limite $l' = (l - P_{n_0}(0))$.*

3. *Pour tout $n \geq n_0$, on a $P_n = P_{n_0} + u_n$. Or cette dernière expression converge vers $P_n = P_{n_0} + l'$ lorsque n augmente. La limite f est donc un polynôme.*

Exercice 20 (Étude de domaine de convergence de séries de fonctions)

1. $\sum a_n(x) = \sum \frac{x}{x^2+n^2}$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *:*

   - *Convergence normale : Une étude des variations de la fonction* $|a_n|$ *montre que son maximum est atteint pour* $x = n$ *et vaut* $\frac{1}{2n}$*. Or, la série* $\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n}$ *étant divergente,* $\sum a_n$ *n'est pas normalement convergente.*
   - *Convergence simple : On fixe* $x \in \mathbb{R}_+$*, on a alors* $0 \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{x}{n^2}$*. Par le théorème de comparaison, la série est convergente. Il y a donc convergence simple.*
   - *Convergence uniforme : Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a* $\frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{x}$*. Notamment, pour* $x = 4n$*, cela donne* $\sum_{k=1}^{n} a_k(4n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$*.*
     De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$*, la suite* $(a_n(x))$ *est décroissante en* n*. On a donc, pour* $k \leq 4n$*,* $a_k(4n) \geq a_{4n}(4n) = \frac{1}{8n}$*, et donc* $\sum_{k=1}^{4n} a_k(4n) \geq \frac{4n}{8n} = \frac{1}{2}$*.*
     Au final, pour tout $n \in \mathbb{N}_+$*, on a* $\left|\sum_{k=1}^{4n} a_k(4n) - \sum_{k=1}^{n} a_k(4n)\right| \geq \frac{1}{4}$ *ou encore*
     $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^{4n} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \geq \frac{1}{4}.$$
     Le critére de Cauchy n'est donc pas verifié et la convergence ne peut pas être uniforme.

2. $\sum b_n(x) = \sum e^{-\sqrt{n}\cdot x}$ *sur* $[a, +\infty]$ *:*

   - *Convergence normale : On a* $\sup_{x\in[a,+\infty[} |b_n(x)| = e^{-a\sqrt{n}}$*. Or* $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = \lim_{m\to\infty} m^4 e^{-am} = 0$ *avec le changement de variable* $m = \sqrt{n}$*. La série* $\sum e^{-a\sqrt{n}}$ *est donc convergente, et la série de fonctions* $\sum b_n$ *converge normalement.*

3. $\sum c_n(x) = \sum \frac{1}{1+n^2x^2}$ *sur* $[1, +\infty[$ *:*

- *Convergence normale : On a* $\sup_{x\in[1,+\infty[}|c_n(x)| = \dfrac{1}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$*. Ce dernier majorant étant le terme général d'une série convergente, la série de fonctions* $\sum c_n$ *converge normalement.*

4. $\sum d_n(x) = \sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *:*

   - *Convergence normale : On a* $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|d_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ *qui est, malheureusement, le terme général d'une série divergente.*

   - *Convergence simple : Commençons par fixer* $x \in \mathbb{R}_+$*. On a alors :*

     – *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^{-nx}}{n} \geq 0$ *;*
     – *la suite* $\left(\frac{e^{-nx}}{n}\right)$ *décroit vers* 0.

     On peut donc appliquer le critère des séries alternées et en déduire que la série converge simplement.

   - *Convergence uniforme : Le critère des séries alternées cité ci-dessus permet également de majorer le reste de rang n par* $\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$*, ce qui tend bien uniformèment vers* 0 *lorsque* n *augmente. Il y a donc convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+$.

5. $\sum f_n(x) = \sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ *sur* $\mathbb{R}$ *:*

   - *Convergence normale : On a* $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^2}$*. La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge donc normalement.*

6. $\sum g_n(x) = \sum n^a x^n (1-x)$ *sur* $[0,1]$

   - *Convergence normale : L'étude des variations de* g_n *donne*

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)| = \frac{n^a}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{n^{a-1}}{e}.$$

   Il y a donc convergence normale si et seulement si $a < 0$.

- *Convergence simple : On fixe $x \in]0,1[$. Soit $y > 1$ tel que $xy < 1$. On a, pour n assez grand, $n^a \leq y^n$ et donc $n^a x^n(1-x) \leq (1-x)(xy)^n$. Ce dernier majorant étant le terme général d'une série géométrique convergente, on en déduit que $\sum g_n(x)$ converge. De plus, pour $x = 0$ ou $x = 1$, la suite $(g_n(x))$ est constante égale à 0. Il y a donc convergence simple vers une fonction g.*
- *Convergence uniforme : La série étant déjà normalement convergente lorsque $a < 0$, considérons seulement le cas $n \geq 0$. On a alors, pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \geq 1$, $g_n(x) \geq x^n(1-x)$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k(x) \geq (1-x)\sum_{k=1}^{n} x^k \geq x(1-x^{n+1}) \geq \frac{x}{2}$ pour n assez grand. Mais cela interdit la continuité de g en 1 puisque $g(1) = 0$. Il n'y a donc pas convergence uniforme.*

Exercice 21 (Un calcul de série numérique)

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sup_{x\in[-a,a]} |u_n(x)| = \frac{a^n}{n} \leq a^n$. Or ce dernier majorant est le terme général d'une série géométrique convergente. La série $\sum u_n$ converge ainsi normalement sur $[-a,a]$, donc uniformément sur le même intervalle.*
   Toutes les fonctions u_n étant continues, la limite f est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a \in [0,1[$. Elle est donc continue sur $]-1,1[$.
2. *Idem.*
3. *On va raisonner sur l'intervalle $[-a,a]$. On a alors convergence uniforme de la série $\sum u_n' = \sum v_n$ d'après la question (2). De plus, la série $\sum u_n(0) = \sum 0$ converge. On peut donc appliquer le théorème de dérivabilité et en déduire que f est dérivable sur $[-a,a]$ avec*
   $$f'(x) = \sum v_n(x) = \sum_{n\geq 1} (-x)^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$
   Cela est vrai, pour tout $a \in [0,1[$, le résultat reste donc vrai sur $]-1,1[$. Sur cet intervalle, la fonction f est donc la primitive de $\frac{1}{1+x}$ qui s'annule en 0, à savoir $\ln(1+x)$
4. *Commençons par fixer $x \in [0,1]$. On a alors :*
   - *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x^n}{n} \geq 0$;*

- *la suite* $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ *décroit vers* 0.

On peut donc appliquer le critère des séries alternées et en déduire que, non seulement, la série $\sum u_n(x)$ *converge, mais également qu'au rang n, le reste peut être majoré par* $\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. *Le reste converge donc uniformèment vers* 0 *et la convergence de la série* $\sum u_n$ *est uniforme sur* $[0,1]$.
La fonction f *est donc continue sur* $[0,1]$ *comme limite uniforme de fonctions continues.*

5. *On a* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$.

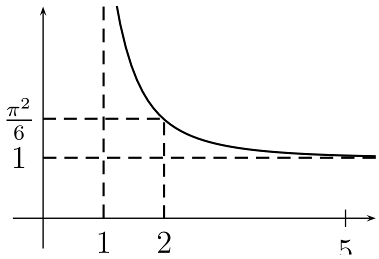
Exercice 22 (Un équivalent de ζ au voisinage de 1)

1. *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(x) = \frac{1}{n^x}$. *On a alors* $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |z_n(x)| = \dfrac{1}{n^a}$.
Or, d'après le critère de Riemann, il s'agit du terme général d'une série convergente. La série $\sum z_n$ *converge ainsi normalement sur* $[a,+\infty[$, *donc uniformément sur le même intervalle.*
Toutes les fonctions z_n *étant continues, la limite* ζ *est continue sur* $[a,+\infty[$ *pour tout* $a > 1$. *Elle est donc continue sur* $]1,+\infty[$.

2. *La convergence normale impliquant la convergence simple, de la question précédente on peut déduire qu'il existe* x_0 *(*$x_0 = 2$ *par exemple) tel que* $\sum z_n(x_0)$ *converge. De plus, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* z_n *est dérivable, de dérivée égale à* $z_n'(x) = \frac{-\ln(n)}{n^x}$. *On a alors* $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |z_n'(x)| = \dfrac{\ln(n)}{n^a}$. *D'après le critère des séries de Bertrand, il s'agit du terme général d'une série convergente (Rappel : pour n assez grand, majorer* $\ln(n)$ *par* $n^{\frac{a-1}{2}}$, *puis* $\frac{\ln(n)}{n^a}$ *par* $\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}$ *qui est convergente d'après le critère de Riemann). La série de fonctions* $\sum z_n'$ *converge alors normalement donc uniformèment sur* $[a,+\infty[$.
On peut donc appliquer le théorème de dérivabilité, et en déduire que la fonction ζ *est dérivable sur* $[a,+\infty[$. *Cela est vrai pour tout* $a > 1$, *la fonction* ζ *est donc* C^1 *sur* $]1,+\infty[$.

3. *Remarques sur le tracé du graphe :*

   - *Limite en* $+\infty$ *: théorème de la double limite ;*
   - *Limite en* 1^+ *: On a la minoration :*
   $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq \sum_1^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \infty.$



4. *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$. On a pour $x \geq 1$ fixé :*

   - *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^x} \geq 0$;*
   - *la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ décroit vers 0.*

   On peut donc appliquer le critère des séries alternées et en déduire que, non seulement, la série $\sum a_n(x)$ converge, mais également qu'au rang n, le reste peut être majoré par $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}$. Le reste converge donc uniformèment vers 0 et la convergence de la série $\sum a_n$ est uniforme sur $[1, +\infty[$.
   La fonction a est continue sur $[1, +\infty[$ comme limite uniforme de fonctions continues.

5. *On a pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$ fixé :*

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{x-1} n^x} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(2n)^x} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} - \sum_{n=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^{N} \frac{2}{(2n)^x}.
\end{aligned}$$

   Or, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^{N} \frac{2}{(2n)^x} &\leq \sum_{n=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^{N} \frac{2}{(2\lfloor N/2 \rfloor + 2)^x} \\
&\leq \frac{2N/2}{(2N/2)^x} \\
&= \frac{1}{N^{x-1}} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.
\end{aligned}$$

   Au final, lorsque l'on fait tendre N vers l'infini, on obtient $\left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \zeta(x) = a(x)$.

6. *D'après la question précédente, on a, pour tout* $x > 1$ *:*

$$\zeta(x) = \frac{a(x)}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}}.$$

Or, d'après l'exercice 10, $a(1) = \ln(2)$*. Au final, on a donc*

$$\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{\ln(2)}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}} = \frac{2^{x-1}.\ln(2)}{2^{x-1} - 1}.$$

On a, de plus,

$$\begin{array}{rcl} 2^{x-1} - 1 & = & e^{(x-1)\ln(2)} - 1 \\ & = & 1 + (x-1).\ln(2) - 1 + \circ(x-1) \\ & \sim & (x-1).\ln(2). \end{array}$$

Au final, on a donc $\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{2^{x-1}}{x-1}$.

Test 2

Exercice 1
Donner un équivalent de $\dfrac{1}{1+x}$ *quand* x *tend vers 0 puis un équivalent de* $\dfrac{e^x - 1 - x}{\sin x - x}$ *quand* x *tend vers 0.*

Exercice 2
Donner le développement limité à l'ordre k *en* 0 *de* $\ln(1+x)$, $\dfrac{1}{1+x}$ *et* $(1+x)^\alpha$.

Exercice 3
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 4
On considère la suite $u_n = 2r^n$, $n \geq 1$? *Pour quelles valeurs de* r *la série de terme général* u_n *converge-t-elle? Quand la série converge, que vaut sa somme? Que vaut alors* $\displaystyle\sum_{k=p}^{\infty} 2r^k$?

Chapter 3

Intégrales généralisées

3.1 Intégrales généralisées

3.1.1 Définitions, Exemples

Définition 1 $a, b \in [-\infty, +\infty]$.

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est une intégrale classique si et seulement si* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue.*
- *dans tous les autres cas,* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est dite généralisée.*

Par exemple. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}$, $\displaystyle\int_a^{+\infty}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{b}$.

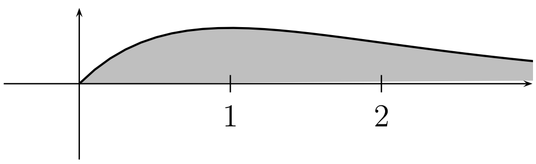
Ou bien, $a, b \in \mathbb{R}$ et f non continue sur $[a, b]$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exemples.

Fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x = 2$, $\Gamma(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$. L'aire sous la courbe est-elle finie ?



Fonction Beta d'Euler :

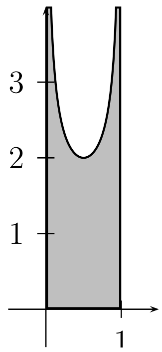
$$\beta(r, s) := \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $r = s = 1/2$, $\beta(1/2, 1/2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$. L'aire sous la courbe est-elle finie ?

Définition 2

- *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue* $(a \in \mathbb{R})$*. L'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t$ *existe. Dans ce cas, on pose :*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t.$$



- *Soit* $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *continue* ($b \in \mathbb{R}$). *L'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\lim_{X\to-\infty}\int_X^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *existe. Dans ce cas, on pose :*

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{X\to-\infty}\int_X^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue,* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent. On pose :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{\substack{X\to+\infty\\ Y\to-\infty}}\int_Y^X f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- *idem pour* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *continue.*
- *si* $f[a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ *est continue,* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent. On pose :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Retour aux exemples.

$$\int_0^X te^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} \left[-te^{-t}\right]_0^X + \int_0^X e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - (X+1)e^{-x} \longrightarrow_{x\to+\infty} 1.$$

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} &\underset{\substack{x=\sin^2\theta\\ \mathrm{d}x=2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}}{=} \int_{\mathrm{Arcsin}\sqrt{\varepsilon}}^{\mathrm{Arcsin}\sqrt{1-\varepsilon'}} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\Big(\mathrm{Arcsin}\sqrt{1-\varepsilon'} - \mathrm{Arcsin}\sqrt{\varepsilon}\Big) \to 2(\pi/2 - 0) = \pi.\end{aligned}$$

Proposition 1 *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue telle que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

- *Si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge alors* $\ell = 0$.
- *Si* $\ell \neq 0$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

Proposition 2 *Si* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue, alors* $f(x) \longrightarrow_{x\to+\infty} 0$ *n'implique pas que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Proposition 3 *Si* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue, alors* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge n'implique pas que* $f(x) \longrightarrow_{x\to+\infty} 0$.

Proposition 4 *Si* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *continue et* $\displaystyle\int_a^b \Big|f(t)\Big|\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Définition 3 *Si* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *continue et* $\displaystyle\int_a^b \Big|f(t)\Big|\,\mathrm{d}t$ *converge, on dit que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est absolument convergente. Si* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge mais que* $\displaystyle\int_a^b \Big|f(t)\Big|\,\mathrm{d}t$ *diverge, on dit que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est semi-convergente.*

Exemple: $\displaystyle\int_1^{+} \infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et semi-convergente. Pour l'utiliser, on utilise une intégration par parties.

Proposition 5 (Changement de variable) *Si* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *est continue et* $g :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ *est* C^1*, croissante et bijective, alors* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. Alors :*

$$\int_\alpha^\beta f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.1.2 Nature des intégrales généralisées

Proposition 6 *Si* $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *sont continues positives, si* $f \leq g$ *et si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

Proposition 7 *Si* $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *sont continues positives et si* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$*, alors les intégrales* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*

Proposition 8 (Riemann) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Proposition 9 *Si* $f, g :]0, b] \to \mathbb{R}^+$ *sont continues positives. Alors*

- *si* $f \leq g$ *et si* $\int_0^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*
- *si* $f \leq g$ *et si* $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, alors* $\int_0^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*
- *si* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$, *alors les intégrales* $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_0^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*
- *Riemann :* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *converge si et seulement si*$\alpha < 1$.

Exercices

Exercice 1 *Calculer lorsqu'elles convergent les intégrales généralisées suivantes:*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 *Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:*

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{4t^2+t+1}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+\sqrt{t})^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3 *Déterminer pour quelles valeurs de couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ les intégrales suivantes sont convergentes. (on dessinera dans le plan l'ensemble des couples (α,β) pour lesquels il y a convergence).*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}t$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$

4. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ *: intégrales de Bertrand, $e>0$. En déduire* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$

Exercice 4 *Soit f une fonction décroissante de $[\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$.*

1. *Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.*

   (Remarquer que l'on a, si $x \geq \alpha$, l'inégalité $xf(2x) \leq \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$.)

2. *Montrer par un contre exemple que la réciproque est fausse.*

Exercice 5 *Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.*

1. *Montrer que I est convergente.*

2. *Pour $\varepsilon > 0$, établir, en posant $x = 2t$ la relation*

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3. *En déduire I.*

Exercice 6 *Soit $a > 0$. On définit sur $[a, +\infty[$ les fonctions f et g par*

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} \quad \text{et } g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

1. *Montrer que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.*

2. *Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ n'ont pas la même nature.*

Exercice 7 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique dont l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. Montrer que la fonction f est nulle. (Raisonner par l'absurde: supposer $f(c) \neq 0$ pour un certain réel c et montrer que le critère de Cauchy est alors contredit).*

Exercice 8 *(Fonction Gamma). Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Considérons la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. *Quel est le domaine de définition de la fonction Γ?*
2. *Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.*

Exercice 9

1. *Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.*
2. *Posons, pour $n \in \mathbb{N}$*

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Test 7

Exercice 1 *Déterminer la nature des intégrales suivantes :*

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+x}{x+x^2+x^3}\,\mathrm{d}x,$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 2 *Soit* $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

1. *Quel est le domaine de définition de la fonction* Γ *sur* $\mathbb{R}$ *c'est à dire l'ensemble des* x *pour lesquels l'intégrale converge.*

2. *Montrer que pour tout* $x > 0$, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$.

3. *En déduire :* $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \Gamma(n) = (n-1)!.$

Chapter 4

Séries entières

Séries entières

4.0.3 Définition, exemples

Définition 1 *Une série entière est une série de fonctions de la forme :*

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{avec} a_n \in \mathbb{R} \text{et} x \in \mathbb{R}.$$

Toute série entière converge au moins en 1 point : $x = 0$.

Les sommes partielles sont des polynômes.

Exemple 1. $\sum_{n\geq 0} x^n$. Si $x = 1$, la somme partielle d'ordre N vaut $N + 1$, et si $x \neq 1$:

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Si $|x| < 1$, la série converge et la somme vaut $1/(1 - x)$. Si $|x| \geq 1$, la série diverge.

Exemple 2. $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. La série converge sur $\mathbb{R}$.

4.0.4 Rayon de convergence

Proposition 1 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière. Il existe un rayon* $R \in [0, +\infty]$ *tel que*

- *pour* $|x| < R$*, la série converge,*
- *pour* $|x| > R$*, la série diverge.*

Le réel R *s'appelle le rayon de convergence de la série entière.*

Attention, on ne dit rien pour $|x| = R$.

La démonstration de ces résultats s'appuie sur les résultats intermédiaires suivants.

Proposition 2 *Si* $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ *converge pour un* $x_0 \in \mathbb{R}$*, alors pour tout* x *avec* $|x| < |x_0|$*, la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *convege.*

Preuve. La série $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ converge. Le terme général tend vers 0, ce qui montre que la suite $a_n x_0^n$ est bornée :

$$\exists M, \forall n \geq 0 \quad |a_n x^n| \leq M.$$

Si $|x| < |x_0|$, on a alors :

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M\lambda^n$$

avec $0 < \lambda = |x/x_0| < 1$. La série $\sum M\lambda^n$ est une série géométrique de raison < 1. Elle est donc convergente. La série $\sum a_n x^n$ est donc absolument convergente. $\square$

Le rayon de convergence R est :

$$R := \sup \left\{ |x_0| \text{telque} \sum_{n\geq 0} a_n x_0^n \text{ converge} \right\}.$$

Proposition 3 *Si* $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ *a une limite* ℓ*, alors* $R = 1/\ell$.

Proposition 4 *Si* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *a une limite* ℓ*, alors* $R = 1/\ell$.

Attention. Il se peut que les limites précédentes n'existent pas. Cependant, le rayon de convergence est toujours bien défini.

4.0.5 Continuité de la somme d'une série entière

Proposition 5 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Pour tout* $0 < r < R$*, la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge normalement sur le segment* $[-r, r]$.

Corollaire 4 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. La somme de la série entière est continue sur* $]-R, R[$.

4.0.6 Primitive de la somme d'une série entière

Proposition 6 *Les séries entières :*

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{et} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ont même rayon de convergence R. Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ et $g :]-R, R[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{et} g(x) := \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Alors, g est dérivable sur $]-R, R[$ et $g' = f$.

4.0.7 Dérivées successives de la somme d'une série entière

Proposition 7 *Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence R. Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ et $g :]-R, R[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :*

$$f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{et} g(x) := \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

Alors, f est dérivable sur $]-R, R[$ et $f' = g$.

Corollaire 5 *La somme d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme.*

4.0.8 Opérations sur les séries entières

On peut ajouter terme à terme deux séries entières.

Proposition 8 *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_2. La série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$ (avec égalité si $R_1 \neq R_2$). Pour tout $x \in]-R, R[$, on a :*

$$\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

Le produit de deux séries entières est plus délicat.

Définition 2 *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *deux séries entières. La série "produit" est la série entière* $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ *avec :*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Proposition 9 *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_1 *et* $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_2*. La série produit* $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ *a un rayon de convergence* $R \geq R_3 := \min(R_1, R_2)$ *et pour tout* $x \in \,]-R_3, R_3[$*, on a :*

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n.$$

Développement en séries entières

4.0.9 Définition, premiers exemples

Définition 1 *Une fonction $f :]x_0 - R, x_0 + R[$ est développable en série entière en x_0 sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ si et seulement si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ avec rayon de convergence R.*

Proposition 1 *Si f est DSE en x_0 avec rayon de convergence R alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ et*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

sur $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Corollaire 6 *Il y a unicité du développement en série entière.*

Attention. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et toutes ses dérivées en 0 sont nulles. Cependant f n'est pas développable en série entière puisque sinon, f serait nulle.

4.0.10 Premiers exemples

$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$. Le rayon de convergence est 1. Donc la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n.$$

En remplaçant x par $-x$, on voit que $1/(1+x)$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n.$$

En remplaçant x par x^2, on voit que $1/(1+x^2)$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n}.$$

La fonction exponentielle est développable en série entière en 0 avec rayon de convergence $+\infty$ et

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

4.0.11 Dérivation, intégration

Proposition 2 *Si* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *sur* $]-R, R[$ *avec rayon de convergence* R *alors* f' *est DSE en 0 avec rayon de convergence* R *et*

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

sur $]-R, R[$.

Exemple. En dérivant $1/(1+x)$, on voit que $f(x) = 1/(1+x)^2$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et

$$\frac{1}{1+x^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \sum_{n\geq 1} (-1)^n n x^{n-1} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k (k+1) x^k.$$

Proposition 3 *Si* $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ *est dérivable et si sa dérivée est DSE en 0 avec rayon de convergence* R*, alors* f *est DSE en* 0 *avec rayon de convergence* R *et*

$$f(x) = f(0) + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemples. La fonction $f(x) = \ln(1+x)$ est une primitive de $1/(1+x)$. Elle est donc DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et pour $x \in]-1, 1[$

$$\ln(1+x) = 0 + \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

La fonction $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$ est une primitive de $1/(1+x^2)$. Elle est donc DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et pour $x \in]-1, 1[$

$$\mathrm{Arctan} x = 0 + \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

4.0.12 Equations différentielles

Si f est solution d'une équation différentielle et si f est développable en série entière, alors l'équation différentielle permet généralement d'établir une relation de récurrence sur les coefficients de la série entière.

Par exemple, l'unique solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ est la fonction $f(x) = \cos(x)$ (cf cours de l'an passé). Or, cette équation admet une solution développable en série entière en 0 avec rayon de convergence $+\infty$

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

En effet, le rayon de convergence est $+\infty$, la somme est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut dériver deux fois terme à terme. On voit alors que la somme est solution de l'équation différentielle. De plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. Donc cette somme est égale à $\cos(x)$. On a donc pour $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

De même, ou en dérivant terme à terme la série précédente

$$\sin(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si l'on cherche une solution développable en série entière en 0 de l'équation différentielle $(1 + x)y' - \alpha y = 0$, on obtient la relation suivante:

$$(1 + x) \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

ce qui s'écrit également

$$\sum_{n\geq 0} (n + 1)a_{n+1} x^n + \sum_{n\geq 1} (n - \alpha)a_n x^n = 0.$$

On a donc la relation de récurrence

$$(n + 1)a_{n+1} + (n - \alpha)a_n = 0.$$

C'est-à-dire

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n + 1} a_n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, les a_n sont tous nuls à partir d'un certain rang et le rayon de convergence ets $+\infty$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et si $a_0 \neq 0$, les coefficients a_n ne sont jamais nuls et

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha - n}{n + 1}\right| = 1.$$

Le rayon de convergence est alors égal à 1. Il y a donc une solution développable en série entière en 0 avec rayon de convergence 1. La solution qui prend la valeur 1 en 0, c'est-à-dire pour $a_0 = 1$, est la fonction $(1 + x)^\alpha$. Cela montre que $(1 + x)^\alpha$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n\geq 0} x^n \qquad R=1\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad R=1\\
\mathrm{Arctan}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \qquad R=1\\
\mathrm{Argth}(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \qquad R=1
\end{aligned}
$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}^{n \text{ termes}}}{n!}x^n+\ldots \qquad R=1\\
\mathrm{Arcsin}(x) &= x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{\overbrace{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}_{n \text{ termes}}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \qquad R=1\\
\mathrm{Arccos}(x) &= \frac{\pi}{2}-\mathrm{Arcsin}(x) \qquad R=1\\
\mathrm{Argsh}(x) &= x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{\overbrace{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}_{n \text{ termes}}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \qquad R=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad R=+\infty\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad R=+\infty\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad R=+\infty\\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad R=+\infty\\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad R=+\infty
\end{aligned}
$$

Part II

Algèbre

Chapter 5

Réduction des endomorphismes

Réduction des endomorphismes

5.0.13 Motivations

1. Suites à récurrence linéaire

   Exemple : la suite de Fibonacci. $u_0 = u_1 = 1$, et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Comment faire pour calculer u_1000 ?

   On introduit un système matriciel :

   $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   En posant $X_n = (u_n, u_{n+1})$, on doit donc calculer $X_n = A^n \cdot X_0$. On est donc ramené au problème du calcul de A^n avec A une matrice carrée.

   Supposons que l'on puisse trouver une base de vecteurs (v_1, v_2) tels que $Av_1 = \lambda_1 v_1$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Alors $A^n v_1 = \lambda_1^n v_1$ et $A^n v_2 = \lambda_2^n v_2$. De plus, tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ et :

   $$A^n v = x_1 A^n v_1 + x_2 A^n v_2 = x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2.$$

2. Systèmes différentiels

   Comment résoudre un systèmes différentiel ? Par exemple :

   $$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x. \end{cases}$$

   On peut l'écrire sous la forme :

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   On est donc ramené à résoudre l'équation différentielle $X' = A \cdot X$. Nous verrons plus tard que les solutions sont de la forme :

   $$X(t) = \exp(tA) \cdot X(0)$$

   avec

   $$\exp(tA) = \mathrm{Id} + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \cdot + \frac{1}{k!}(tA)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k.$$

Pour le moment, supposons que l'on puisse trouver une base de vecteurs (v_1, v_2) tels que $Av_1 = \lambda_1 v_1$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Les fonctions $f_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t} v_1$, $f_2 : t \mapsto e^{\lambda_2 t} v_2$ sont alors solutions de l'équation différentelle. En effet :

$$f_1'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{\lambda_1 t} \cdot Av_1 = Af_1(t)$$

et

$$f_2'(t) = \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{\lambda_2 t} \cdot Av_2 = Af_2(t).$$

3. Transformations géométriques Comment peut-on caractériser les transformations linéaires simples, telle qu'une homothétie, une rotation, une projection ? Que se passse-t-il si on les compose ?

5.0.14 Vecteurs propres, valeurs propres, sous-espaces propres

Dans toute la suite, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont des K-espaces vectoriels (on peut ajouter deux vecteurs; on peut multiplier un vecteur par un scalaire, c'est-à-dire par un réel ou un nombre complexe).

Définition 1 *Une application $f : E \to F$ est une application linéaire si*

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, \ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \lambda \in K, \ \forall x \in E, \ f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Si $F = E$, une application linéaire $f : E \to E$ est appelée un endomorphisme de E.

Exemples. Une rotation de $\mathbb{R}^2$ centrée à l'origine. Une homothétie ou une similitude de $\mathbb{R}^2$ centrée à l'origine. Dans $\mathbb{R}^2$, une projection sur une droite passant par l'origine parallèlement à une autre droite passant par l'origine. Dans $\mathbb{R}^3$, une projection sur un plan contenant l'origine parallèlement qui n'est pas contenue dans le plan.

Une translation de vecteur non nul n'est pas une application linéaire.

Définition 2 (endomorphismes) *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.*

- *$\lambda \in K$ est une* valeur propre *de f si il existe $v \in E$ un vecteur non nul, tel que $f(v) = \lambda v$.*
- *un vecteur $v \in E$ est un* vecteur propre *de f si $v \neq \vec{0}$ et si v et $f(v)$ sont colinéaires (il existe $\lambda \in K$ tel que $f(v) = \lambda v$; on dit alors que v est un vecteur propre associé à λ).*

- *si $\lambda \in K$ est une valeur propre de f, le* sous-espace propre *associé à λ est l'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$.*

Proposition 1 *Si $f : E \to E$ est un endomorphisme et si λ est une valeur propre de f, alors l'espace propre associé à λ est $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.*

On a des définitions similaires pour les matrices.

Définition 3 (matrices) *Soit $A \in M_n(K)$ (une matrice carrée de taille $n \times n$ dont les coefficients appartiennent à K).*

- *λ est* valeur propre *de A s'il existe $X \in K^n$ un veteur non nul tel que $A \cdot X = \lambda X$.*
- *X est un vecteur propre de A si $X \neq (0, 0, \cdots, 0)$ et si $A \cdot X = \lambda X$ pour un $\lambda \in K$. On dit alors que X est un vecteur propre associé à λ.*
- *Le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda = \{X \in K^n \mid A \cdot X = \lambda X\}$.*

5.0.15 Exemples.

1. $f = \mathrm{Id}$ ou $A = \mathrm{I}_n$. Il n'y a qu'une seule valeur propre : $\lambda = 1$. L'espace propre E_1 est égal à E. Tout vecteur non nul est un vecteur propre associé à 1.
2. matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Les valeurs propres sont les λ_i. L'espace propre E_{λ_i} sont la droite vectorielle $Ke_i = \mathrm{Vect}(e_i)$.
3. matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 1 et -2 (les termes diagonaux). Les epaces propres sont :
$$E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \{(x, y, 0) \mid x \in K,\ y \in K\}$$
et
$$E_{-2} = \mathrm{Vect}(e_3) = \{(0, 0, z) \mid z \in K\}.$$
4. matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 1 et 3 (les termes diagonaux). Les espaces propres sont $E_1 = \mathrm{Vect}\Big\{(1, 0)\Big\}$ et $E_3 = \mathrm{Vect}\Big\{(-2, 1)\Big\}$.

5. matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il n'y a qu'une seule valeur propre : 1. L'espace propre associé est $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$.

6. endomorphisme de polynômes : $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définit par $f(P) = XP'$. Les valeurs propres sont les entiers $n \geq 1$. Et l'espace propre E_n est égal à $\mathrm{Vect}(X^n)$.

7. endomorphisme de suites : soit f l'endomorphisme qui à une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ associe la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = u_0$, $v_2 = u_1$, ... Il n'y a aucune valeur propre

8. homothéties : il n'y a qu'une seule valeur propre λ et $E_\lambda = E$.

9. projecteurs ($p \circ p = p$) : il y a deux valeurs propres, 0 et 1. On a :

$$E_0 = \mathrm{Ker}(p) \quad \text{et} \quad E_1 = \mathrm{Im}(p).$$

   De plus, $E_0 \oplus E_1 = E$.

10. symétries ($s \circ s = \mathrm{Id}$) : il y a deux valeurs propres, 1 et -1. De plus, s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}.

5.0.16 Cas de la dimension finie

Rappels sur le déterminant

Définition 4 (déterminant d'une matrice 2×2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Définition 5 (déterminant d'une matrice 3×3)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Définition 6 (par récurrence) *Si $A = (a_{i,j})$, on multiplie chaque terme $a_{1,j}$ de la première ligne par $(-1)^{1+j}$ puis par le déterminant Δ_j obtenu en supprimant la première ligne et la j-ème colonne. Le déterminant cherché est égal à la somme des termes $(-1)^{1+j} \cdot a_{1,j} \cdot \Delta_j$ ainsi obtenus.*

Proposition 2 *dét(AB) = dét$(A) \cdot$ dét(B).*

Corollaire 7 *A est inversible si et seulement si dét$(A) \neq 0$. Dans ce cas,*

$$\text{dét}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{dét}(A)}.$$

Attention : $\text{dét}(A+B) \neq \text{dét}(A) + \text{dét}(B)$.

Proposition 3 *Si $f : E \to E$ est un endomorphisme, si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{E}$ et si A' est la matrice de f dans une base $\mathcal{E}'$, alors dét$(A) =$ dét(A').*

Définition 7 (déterminant d'un endomorphisme) *Si $f : E \to E$ est un endomorphisme, le déterminant de f est le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque de E.*

Proposition 4 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Alors*

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{dét}(f) \neq 0.$$

Polynôme caractéristique

Proposition 5 *Soit f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans une base quelconque de E. Alors,*

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \iff \text{dét}(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \iff \text{dét}(A - \lambda I) = 0.$$

Définition 8 *On appelle polynôme caractéristique de A :*

$$P_A(X) = \text{dét}(A - X\mathrm{I}_n).$$

On appelle polynôme caractéristique de f :

$$P_f(X) = \text{dét}(f - X\mathrm{Id}).$$

Les valeurs propres sont donc les racines du polynôme caractéristique.

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_A(X) = (1-X)(2-X)^2.$$

Définition 9 *Si λ est valeur propre de A (ou de f), elle est racine du polynôme caractéristique : $P_A(X) = (X-\lambda)^{n_\lambda} Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. L'entier n_λ s'appelle l'*ordre de multiplicité *de λ.*

Définition 10 (trace) *La trace* $\mathrm{tr}(A)$ *d'une matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est la somme des coefficients de la diagonale.*

Proposition 6 *Si* $A' = P^{-1}AP$*, alors* $\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(A)$*.*

Proposition 7 *Soit* P_A *le polynôme caractéristique de* $A \in M_n(\mathbb{R})$*. Alors* P_A *est un polynôme de degré* n*. Le terme de plus haut degré est* $(-1)^n X^n$*. Le coefficient constant est* $P_A(0) = \text{dét}(A)$*. Le coefficient de* X^{n-1} *est* $(-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)$*.*

5.0.17 Sous-espaces propres – Diagonalisabilité

Les sous-espaces propres sont en somme directe

Proposition 8 *Si* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *sont des valeurs propres deux à deux distinctes et si* $v_1, v_2, \ldots, v_p$ *sont des vecteurs propres associés, alors* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *est libre. On a une somme directe*

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Corollaire 8

$$\dim(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}) = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \cdots + \dim E_{\lambda_p}.$$

Diagonalisabilité

Définition 11 *Un endomorphisme* $f : E \to E$ *est diagonalisable s'il existe une base de* E *formée de vecteurs propres de* f*.*

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est digonalisable s'il existe une base de* $\mathbb{R}^n$ *formée de vecteurs propres de* A*.*

Proposition 9 *Une matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable si, et seulement s'il existe une matrice inversible* $P \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}AP$ *est une matrice diagonale.*

Proposition 10 f *est diagonalisable si, et seulement si :*

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Corollaire 9 *Un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable si, et seulement si :*

$$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \cdots + \dim E_{\lambda_p}.$$

Proposition 11 *Soit λ une valeur propre et n_λ sa multiplicité. Alors :*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq n_\lambda.$$

Un polynôme P est scindé sur K s'il s'écrit sous la forme :

$$P(X) = a \cdot \prod (X - \alpha_i)^{n_i}$$

avec $\alpha_i \in K$.

Corollaire 10 *Si le polynôme caractéristique est scindé sur K alors f (ou A) est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ pour tout i.*

Corollaire 11 *Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur K alors f (ou A) n'est pas diagonalisable.*

Corollaire 12 *Si le polynôme caractéristique est scindé et n'a que des racines simples, alors f ou A est diagonalisable.*

Matrices symétriques

Définition 12 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j.*

Proposition 12 *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Nous reparlerons de ce résultat dans le chapitre d'algèbre suivant.

Exercices

Échauffement

Exercice 1 *Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels.*

- *Quelle est la dimension de E ?*
- *Donner une base $\mathcal{B}$ de E.*

Soit $\Phi : E \to E$ défini par $\Phi(P) = P'$.

- *Φ est-elle linéaire ?*
- *Quelle est sa matrice dans la base $\mathcal{B}$?*

Exercice 2 *Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.*

- *Calculer A^n pour $n = 0, 1, 2, 3\ldots$*
- *Que semble valoir A^n ?*
- *Démontrer cette supposition.*
- *Faire de même avec B.*

Exercice 3 *Soit A, B deux matrices carrées de mêmes dimensions.*

- *Donner un exemple où $AB \neq BA$.*

On suppose maintenant que $AB = BA$.

- *Démontrer par récurrence sur n la formule du binôme de Newton :*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

- *Pourquoi a-t-il fallu demander $AB = BA$? Donner un exemple où la formule du binôme est fausse.*

Exercice 4 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et*

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- *On décompose $C = \lambda I + N$ (où N est une matrice qu'on précisera). Calculer N^n. En déduire C^n.*

Exercice 5 *Soient E un espace vectoriel et F, G deux s.e.v. de E.*
On rappelle la définition de $F+G$: $F+G = \left\{x+y \,\middle|\, x \in F \text{ et } y \in G\right\}$.
On rappelle la définition de $E = F \oplus G$: $E = F \oplus G \iff$ pour tout $x \in E$, il existe une unique décomposition $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

– *Démontrer que $E = F \oplus G \iff (E = F + G$ et $F \cap G = \{0\})$.*

Exercice 6 *Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Soit la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (2,1,3)$, $v_3 = (0,2,1)$.*

– *Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

– *Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

Soit $f(x) = (x+y, z-x, x+y+z)$.

– *Écrire la matrice M_f de f dans $\mathcal{B}$ et la matrice M'_f de f dans $\mathcal{B}'$.*

Exercice 7 *Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $(x,y,z,t) \in \mathcal{P} \iff$*

$$\begin{cases} x + 2y - z + t &= 0 \\ 2x - y + 3z + t &= 0 \\ 5x - 5y - 8z + 2t &= 0 \end{cases}$$

Donner une base de $\mathcal{P}$.

Exercice 8 *Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (1,2,1,1)$, $v_3 = (1,-2,1,-3)$. Donner un système d'équations linéaires de $\mathcal{P}$, dont le nombre d'équations soit minimal.*

Vecteur propres, valeurs propres, diagonalisation

Exercice 9 *Vrai ou faux ?*

1. *La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E en est un.*
2. *La somme de deux sous-espaces vectoriels de E en est un.*
3. *L'ensemble des vecteurs propres d'un endomorphisme $f : E \to E$ est un sous-espace vectoriel de E.*
4. *Le noyau d'un endomorphisme est un sous-espace propre.*
5. *L'image d'un endomorphisme est un sous-espace propre.*
6. *Un sous-espace propre n'est jamais réduit à $\{0\}$.*

7. *Une matrice carrée et sa tansposée ont les mêmes valeurs propres.*

8. *Une matrice carrée et sa tansposée ont les mêmes vecteurs propres.*

Exercice 10 *Soit f un endomorphisme de E. Rappeler la démonstration des faits suivants :*

– *Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est égal à* $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id})$.

– λ *est valeur propre ssi* $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id}) \neq 0$.

Exercice 11 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 12 *Soit la matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouver ses valeurs propres, ses sous-espaces propres, leur dimension. Quel est son rang ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 13 *Soit la suite de Fibonacci :*

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Soit $V_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$ *pour* $n \geq 1$.

– *Montrer que* $V_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} V_n$.

– *En déduire une relation entre* F_n *et* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$.

– *Diagonaliser* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

– *En déduire la formule explicite*

$$F_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 14 *Soit r la rotation dans $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et d'angle θ. On rappelle qu'elle est linéaire.*

– *Donner sa matrice R dans la base canonique (supposée orthonormée directe).*

– *Donner le polynôme caractéristique de R.*

– *Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de r.*

On considère maintenant la matrice R comme une matrice de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$.

– *C'est la matrice de quel endomorphisme de quel espace vectoriel ?*

– *Donner son polynôme caractéristique, ses valeurs propres et ses vecteurs propres.*

On revient à $\mathbb{R}^2$ euclidien et aux matrices réelles. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite "$y = x/2$".

– *Donner la matrice de s dans la base canonique, ses valeurs propres et ses vecteurs propres.*

Exercice 15

– *Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $2x + 3y + 4z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ (la base canonique de $\mathbb{R}^3$ étant supposée orthonormée).*

– *Quelle est la matrice de la projection de $\mathbb{R}^2$ vers F parallèlement à G, où F et G sont les s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ engendré par les vecteurs respectifs $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Faire un dessin.*

Exercice 16 *Soit E un espace vectoriel et F, G deux s.e.v. de E tels que $F \oplus G = E$. Tout $x \in E$ possède une unique décomposition $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On appelle projection sur F parralèlement à G l'application qui à x associe y.*

– *Vérifier que f est un endomorphisme de E (en particulier linéaire) et que $f \circ f = f$.*

On appelle projecteur un endomorphisme p d'un espace vectoriel E vérifiant $p \circ p = p$.

– *Vérifier que $E = E_0 \oplus E_1$.*

– *Démontrer que p est la projection sur E_1 parallèlement à E_0.*

Ainsi, les projecteurs et les projections sont les mêmes choses. On suppose maintenant E de dimension finie. Soit f la projection sur F parallèlement à G.

– *Démontrer que* $\mathrm{Tr}(f) = \dim F$.

Exercice 17 *Trouver valeurs propres et sous-espaces propres de :*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 18 (*) *Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. E tel que* $f^3 - 3f^2 + f - 3\mathrm{Id} = 0$.

– *Démontrer que* $(f^2 + \mathrm{Id}) \circ (f - 3\mathrm{Id}) = 0 = (f - 3\mathrm{Id}) \circ (f^2 + \mathrm{Id})$.

– *En déduire que* $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = \{0\}$.

– *Montrer qu'il existe des endomorphismes g, h de E tels que* $\mathrm{Id} = (f^2 + \mathrm{Id}) \circ g + (f - 3\mathrm{Id}) \circ h$. *(on cherchera g, h comme des combinaisons linéaires de puissances de f)*

– *En déduire que* $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = E$.

Exercice 19 *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Soit $f(P) = aX^2P'' + bP$.*

– *Vérifier que f définit un endomorphisme de E.*

– *Déterminer les espaces propres et valeurs propres de f.*

– *f est-elle diagonalisable ?*

Chapter 6

Géométrie affine

Géométrie affine et euclidienne

6.0.18 Espaces affines

Définition 1 *Un* espace affine *est la donnée d'un espace de points X non vide, d'un espace vectoriel E et d'une application*

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & E \\ (A, B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *relation de Chasles : pour tous points A, B, C dans X, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et*

2. *pour tout point $A \in X$ et tout vecteur $\vec{u} \in E$, il existe un unique point $B \in X$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.*

On notera $B = A + \vec{u}$ l'unique point $B \in X$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Le point B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Exemples. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$.

6.0.19 Sous-espaces affines

Définition 2 *Un sous-ensemble non vide $Y \subset X$ est un* sous-espace affine *de X dirigé par F si :*

1. *F est un sous-espace vectoriel de E;*

2. *pour tous points A et B dans Y, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ appartient à F;*

3. *pour tout point A dans Y et tout vecteur $\vec{u}$ dans F, le point $A + \vec{u}$ appartient à Y.*

Proposition 1 *Les sous-espaces affines de X sont les ensembles de la forme $A + F$ avec $A \in X$ et F sous-espace vectoriel de E.*

Exemple. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, les sous-espaces affines sont les points et les droites. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces affines sont les points, les droites et les plans.

6.0.20 Droites de $\mathbb{R}^2$

Proposition 2 *Une équation cartésienne de la droite D de $\mathbb{R}^2$ passant par les points $A := (x_0, y_0)$ et $B := (x_1, y_1)$ est :*

$$\text{dét}\begin{pmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Proposition 3 *Une équation cartésienne de la droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par le point $A := (x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} := (a, b)$ est :*

$$\text{dét}\begin{pmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{pmatrix} = 0.$$

6.0.21 Plans de $\mathbb{R}^3$

Proposition 4 *Une équation cartésienne du plan P contenant les trois points non alignés $A := (x_0, y_0, z_0)$, $B := (x_1, y_1, z_1)$ et $C := (x_2, y_2, z_2)$ est :*

$$\text{dét}\begin{pmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 z z_2 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Définition 3 *Rappelons que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors, le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini par :*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 5 *Le produit mixte est nul si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires.*

Par conséquent, si on connait une base de l'espace vectoriel qui dirige P (par exemple $\vec{u} := \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} := \overrightarrow{AC}$), un point M appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires donc si et seulement si $\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}\right] = 0$.

Définition 4 *Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u} := (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v} := (a_2, b_2, c_2)$ est défini par :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6 *Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ contenant le point (x_0, y_0, z_0) et dirigé par le plan vectoriel engendré par (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2). Une équation cartésienne de P est :*

$$\text{dét}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x - x_0 \\ b_1 & b_2 & y - y_0 \\ c_1 & c_2 & z - z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ avec :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1c_2 - c_1b_2 \\ c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}.$$

6.0.22 Droites de $\mathbb{R}^3$

Attention: pour caractériser une droite de $\mathbb{R}^3$ il faut un système de deux équations cartésiennes.

6.0.23 Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Définition 5 *Le* produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} := (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\vec{v} := (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *est* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := x_1x_2 + y_1y_2$.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} := (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ *et* $\vec{v} := (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ *est* $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Définition 6 *La* norme d'un vecteur $\vec{u} := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *est :* $||\vec{u}|| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

La norme d'un vecteur $\vec{u} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *est :* $||\vec{u}|| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Proposition 7 *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, on a :*

1. $||\vec{u}||^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$;
2. $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Proposition 8 (Propriétés du produit scalaire)

1. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$.*
2. *Les applications $\vec{w} \mapsto \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ et $\vec{w} \mapsto \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ sont des applications linéaires.*
3. *Enfin, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$.*

Proposition 9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, on a :*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$$

avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Proposition 10 (Propriétés de la norme) *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les trois propriétés suivantes :*

1. $||\vec{u}|| \geq 0$ *et* $||\vec{u}|| = 0$ *si et seulement si* $\vec{u} = \overrightarrow{0}$.
2. $||\lambda\vec{u}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{u}||$.
3. $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 7 *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* orthogonaux *si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Proposition 11 (Pythagore) *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si[:]*

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2.$$

Définition 8 *Une base est* orthonormée *si les vecteurs de la base sont de norme* 1 *et sont deux à deux orthogonaux.*

Proposition 12 *Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, on a :*

$$\vec{v} = \langle \vec{v}_1, \vec{v} \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{v}_2, \vec{v} \rangle \vec{v}_2.$$

Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, alors pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\vec{v} = \langle \vec{v}_1, \vec{v} \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{v}_2, \vec{v} \rangle \vec{v}_2 + \langle \vec{v}_3, \vec{v} \rangle \vec{v}_3.$$

Proposition 13 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble :*

$$F^{\perp} := \left\{ \vec{v} \in E \text{telque} (\forall \vec{u} \in F) \;\; \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \right\}$$

est un sous espace vectoriel de E.

Définition 9 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble $F^{\perp}$ est appelé l'*orthogonal *de F. Si $\vec{u} \in F^{\perp}$, $\vec{u}$ est* orthogonal *à F. Si $Y \subset X$ est un sous-espace affine dirigé par F et si $\vec{u} \in F^{\perp}$, $\vec{u}$ est* orthogonal *à Y. Si Y et Y' sont deux sous-espaces affine de X dirigés respectivement par F et $F^{\perp}$, Y et Y' sont* orthogonaux.

Exemple. Rappelons que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle ,$$

où $\vec{u} \wedge \vec{w}$ est le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est donc orthogonal au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (le produit mixte est nul si $\vec{w}$ appartient à ce plan).

Proposition 14 *Si $D \subset \mathbb{R}^2$ est une droite d'équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur (a, b) est orthogonal à D. Si $P \subset \mathbb{R}^3$ est un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, alors le vecteur (a, b, c) est orthogonal à P.*

Proposition 15 *Les espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires.*

Définition 10 *La* distance entre deux points *A et B est :*

$$d(A, B) := ||\overrightarrow{AB}||.$$

La distance entre deux points A et B est toujours positive. Elle est nulle si et seulement si $A = B$. Si $A := (x_0, y_0, z_0)$ et $B := (x_1, y_1, z_1)$, alors :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

L'inégalité triangulaire implique que pour tout triplet de points (A, B, C), on a :

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Définition 11 (Distance d'un point à un ensemble) *La distance du point $A \in X$ au sous-ensemble $Y \subset X$ est :*

$$d(A, Y) := \inf_{M \in Y} d(A, M).$$

Exemple. La distance du point $(0, 0, z)$ au plan horizontal d'équation $z = 0$ est $|z|$.

Définition 12 *Si Y est un sous-espace affine de X dirigé par F, la* projection orthogonale *sur Y est la projection sur Y parallèlement à $F^\perp$. La* symétrie orthogonale *par rapport à Y est la symétrie par rapport à Y parallèlement à $F^\perp$.*

Proposition 16 *Si A est un point de X et si Y est un sous-espace affine de X, il existe un unique point $B \in Y$ tel que $d(A, B) = d(A, Y)$. Le point B est le projeté orthogonal de A sur Y.*

Exercices

Exercice 1

1. *Donner une équation de la droite* $D \subset \mathbb{R}^2$ *passant par le point* $A := (1,1)$ *et dirigée par le vecteur*$(2,-3)$.

2. *Donner une équation de la droite* $D \subset \mathbb{R}^2$ *passant par les points* $A := (1,1)$ *et* $B := (3,-2)$.

3. *Donner une équation cartésienne de la droite* D *d'équation paramétrique* $\begin{array}{l} x = 2+3\lambda \\ y = 1-4\lambda \end{array}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 *Donner une équation cartésienne du plan* $P \subset \mathbb{R}^3$ *contenant les points* $A := (1,2,3)$, $B := (0,1,0)$ *et* $C := (0,0,1)$.

Exercice 3 *Soient* $A_1 := (x_1, y_1)$, $A_2 := (x_2, y_2)$ *et* $A_3 := (x_3, y_3)$ *trois points de* $\mathbb{R}^2$. *Montrer que les points sont alignés si et seulement si :*

$$\text{dét}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Exercice 4

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *on considère la droite* D *passant par le point* $A := (0,1,1)$ *et dirigée par le vecteur* $\vec{u} := (2,-1,0)$. *Soit* $B := (1,1,-2) \in \mathbb{R}^3$. *Déterminer* $d(B,D)$.

2. *Déterminer* $d(A,D)$ *si* $A := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *et si* $D \subset \mathbb{R}^2$ *est la droite d'équation* $ax + by + c = 0$.

3. *Déterminer* $d(A,P)$ *si* $A := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *et si* $P \subset \mathbb{R}^2$ *est le plan d'équation* $ax + by + cz + d = 0$.

Exercice 5 *On munit* $\mathbb{R}^3$ *du produit scalaire canonique.*

1. *On considère le vecteur* $u = (2,-3,1)$, *donner une base orthogonale de* $\mathbb{R}^3$ *contenant* u.

2. *Vérifier que* $\mathcal{B} = \{(2-1,-1);\ (1,0,-1);(1,1,0)\}$ *est une base de* R^3.

3. *Donner la base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *obtenue à partir de* $\mathcal{B}$ *en utilisant le procédé de Graam Schmidt.*

Exercice 6 *Soit* E *un espace euclidien et* E_1, E_2 *deux sous espaces Montrer que*

1. *si* $E_1 \subset E_2$ *alors* $E_2^\perp \subset E_1^\perp$*;*

2. $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$ *et* $(E_1 \cap E_2)^\perp = E_1^\perp + E_2^\perp$.

Exercice 7 *On considère* $\mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire canonique. Pour les différents sous espaces vectoriels ci dessous, trouver une base orthonormée de* E *et de son orthogonal* $E^\perp$*:*

1. $E = \overrightarrow{\{}(1, 2, 3)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$*;*

2. $E = \overrightarrow{\{}(1, 2, -1)(0, 1, 2)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$*;*

3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 0\}$*;*

4. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0, \quad x + 2z + t = 0\}$.

Exercice 8 *Dans* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique, on considère le plan* $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ z - 2y + z = 0\}$.

1. *Donner dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*, la matrice* M_p *de p la projection orthogonale sur* P*. Donner les valeurs propres, les sous espaces propres de* M_p*.* M_p *est elle diagonalisable?*

2. *Donner dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*, la matrice* M_s *de s la symétrie orthogonale par rapport à* P*. Donner les valeurs propres, les sous espaces propres de* M_s*.* M_s *est elle diagonalisable?*

3. *Soit le vecteur* $u = (1, -2, 3)$*. Calculer la distance* $d(u, P)$ *la distance entre u et* P*.*

Exercice 9 *Dans un espace euclidien* E*, on considère v un vecteur non nul, un scalaire* λ *et l'endomorphisme* f *de* E *défini par*

$$f(x) = x + \lambda \langle x, v \rangle v.$$

1. *Pour* $x \in E$*, calculer* $\|f(x)\|^2$.

2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* λ *et* v *pour que* f *soit une isométrie.*

3. *Lorsque f est une isométrie déterminer ses valeurs propres, ses vecteurs propres et donner une interprétation géom étrique de f*

Exercice 10 *Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inf érieur ou égal à 3. On considère sur $\mathbb{R}_3[X]$ l'application bilinéaire définie par*

$$\phi(P,Q) = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$.

1. *Montrer que ϕ défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.*

2. *Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire ϕ.*

3. *Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(0) + 2\int_0^1 tP'(t) = 0\}$. Vérifier que E est un sous espace vectoriel et en déterminer une base orthonormée.*

4. *Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur E dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Exercice 11 *On considère E l'espace des fonction continue $f[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t$.*

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on note c_n et s_n les fonctions de E respectivement données par $c_n(x) = \cos(nx)$ et $s_n(x) = \sin(nx)$. Montrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$ la famille $\{c_0, s_1, c_1, \cdots, s_n, c_n\}$ est orthogonale.*

2. *On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ le sous espace vectoriel $E_n = \mathrm{Vect}\{c_0, s_1, c_1, \cdots, s_n, c_n\}$. Si p_n désigne la projection orthogonale sur E_n, déterminer $p_n(f)$ pour $f \in E$.*

3. *Pour tout $f \in E$, en déduire $I(f) = \inf\limits_{a_0, b_1, a_1 \in \mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} (f - a_0 - b_1 \sin x - a_1 \cos x)^2\,\mathrm{d}x$.*

Exercice 12

1. *Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$.*

2. *Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe le vecteur $(1, 0, 1)$.*

Exercice 13

1. *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^n$ et soit V un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si V est stable par f (i.e. $f(V) \subset V$) alors $V^\perp$ est stable par f.*

2. *Montrer que si f est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ alors ses valeurs propres sont nécessairement de module 1, et son d éterminant est égal à ± 1.*

3. *En déduire que si f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ alors n écessairement 1 ou -1 est valeur propres.*

4. *En admettant que les seules isométrie de $\mathbb{R}^2$ sont les rotations et les symétries orthogonales par rapport à une droite, déterminer toutes les isométries de $\mathbb{R}^3$. Les caractériser en fonction du déterminant, et des sous espaces propres associé à ± 1.*

   Déterminer la nature des transformations de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique sont les suivantes

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Espaces Euclidiens

6.0.1 Définition, exemples

Définition 1 *E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (dimension finie ou non).*

- $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ *est une forme* bilinéaire symétrique *si :*
  - $\phi(x, y) = \phi(y, x)$
  - $\phi(x + x', y) = \phi(x, y) + \phi(x', y)$,
  - $\phi(\lambda x, y) = \lambda\phi(x, y)$.
- *ϕ est positive si $\phi(x, x) \geq 0$ pour tout x.*
- *ϕ est définie positive si $\phi(x, x) \geq 0$ pour tout x avec égalité si et seulement si $x = 0$.*

Définition 2 *E ev sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme ϕ bilinéaire symétrique définie positive est dir préhilbertien et ϕ est un produit scalaire.*
Si E est de dimension finie, E est un espace euclidien.

Exemples.

- $E = \mathbb{R}^n$ et $\phi(a, y) = \sum x_i y_i$.
- $E = \mathbb{R}^n$ et $\phi(x, y) = \sum \lambda_i x_i y_i$ avec $\lambda_i > 0$.
- $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi(A, B) = \mathrm{Trace}({}^tAB) = \sum a_{i,j} b_{i,j}$.
- $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\phi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Définition 3 *$\langle\cdot, \cdot\rangle$ produit scalaire sur E.*
La norme d'un vecteur *$x \in E$ est :* $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *$\langle\cdot, \cdot\rangle$ produit scalaire sur E. Alors :*

$$\Big|\langle x, y\rangle\Big| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. Le polynôme $P(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle$ est un polynôme de degré 2 qui soit n'a pas de racine, soit a une racine double. Son discriminant $b^2 - 4ac$ est ≥ 0 et ne s'annule que si P a une racine double. $\square$

Proposition 2 (Propriétés de la norme) *Pour tous vecteurs x et y et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les trois propriétés suivantes :*

1. $||x|| \geq 0$ *et* $||x|| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(inégalité triangulaire).*

Preuve de l'inégalité triangulaire. On a $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle$ et on applique Cauchy-Schwarz. □

6.0.2 Orthogonalité

Définition 4 *Deux vecteurs x et y sont* orthogonaux *si* $\langle x, y\rangle = 0$. *On note* $x \perp y$.

Proposition 3 (Pythagore) *Les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si[:]*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 .$$

Définition 5 *Une base est* orthonormée *si les vecteurs de la base sont de norme* 1 *et sont deux à deux orthogonaux.*

Proposition 4 *Si* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormée de E, alors pour tout vecteur x de E, on a :*

$$x = \langle e_1, x\rangle e_1 + \langle e_2, x\rangle e_2 + \cdots + \langle e_n, x\rangle e_n.$$

Proposition 5 (Procédé d'orthgonalisation de Schmidt) *Si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de E, il existe une base orthonormée* $(e'_1, \ldots, e'_n)$ *telle que pour tout* $k \leq n$, $\mathrm{Vect}(e'_1, \ldots, e'_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Proposition 6 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble :*

$$F^\perp := \Big\{x \in E \text{telque} (\forall x \in F)\ \langle x, y\rangle = 0\Big\}$$

est un sous espace vectoriel de E.

Définition 6 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble $F^\perp$ est appelé l'*orthogonal *de F. Si $x \in F^\perp$, x est* orthogonal *à F.*

Proposition 7 *Les espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires.*

Définition 7 *Si F est un sev de E, la projection orthogonale sur F est la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Proposition 8 *Si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de F, sev de E, et si p_F est la projection orthogonale sur F, alors :*

$$p_F(x) = \langle e_1, x\rangle e_1 + \cdots + \langle e_k, x\rangle e_k.$$

Proposition 9 *Si F sev de E et si p_F est la projection orthogonale sur F, alors pour tout x dans E, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui minimise la fonction $y \mapsto ||y - x||$:*

$$\forall y \in F, \quad ||p_F(x) - x|| \leq ||y - x||$$

avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$.

6.0.3 Isométries et matrices orthogonales

Définition 8 *Une application $f : E \to E$ est une isométrie sur $||f(x)|| = ||x||$.*

Exemple. Rotation dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 10 *f est un isométrie si et seulement si $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. En particulier, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.*

Proposition 11 *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée. Alors, f est une isométrie si et seulement si $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée.*

Définition 9 *Une matrice $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tQ \cdot Q = I_n$.*

Exemple. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Proposition 12 *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée, f est une isométrie si et seulement si la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale.*

Proposition 13 *Si Q est une matrice orthogonale, alors dét$(Q) = \pm 1$.*

6.0.4 Endomorphismes symétriques et matrices symétriques

Définition 10 *$f : E \to E$ est symétrique si pour tout x, y, on a :*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle .$$

Définition 11 *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique si ${}^tA = A$.*

Proposition 14 *$(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée, f est symétrique si et seulement si la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est symétrique.*

Proposition 15 *Si f est un endomorphisme symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Corollaire 13 *Si A est une matrice symétrique, alors A est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une matrice Q orthogonale telle que :*

$${}^tQAQ(= Q^{-1}AQ) = D$$

avec D diagonale.

Devoir à la maison à rendre le 11 septembre

6.0.1 Annales 2003, Partie I, Exercice I.

Il y avait 3 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 45mn maximum.

Un développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Un équivalent de H_n**

   Soit n un entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Si k est un entier non nul, montrer que : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire l'encadrement suivant : $\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$.

   (c) Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

2. **Suites adjacentes**

   Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est-à-dire que :
   (v_n) est croissante, (w_n) est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq w_n + 1$. En déduire que la suite (v_n) est majorée.

   (b) Montrer que la suite (w_n) est minorée.

   (c) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

3. **Constante d'Euler**

   On pose, pour $n \geq 1$, $c_n = H_n - \ln n$ et $d_n = c_n - \frac{1}{n}$.

   (a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

   (b) Montrer que les suite (c_n) et (d_n) convergent vers une même limite. On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).

   (c) Montrer que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Corrigé de l'exercice I, Partie I, Annales 2003

1. **Un équivalent de H_n**

   (a) Si k est un entier non nul et si $k \leq t \leq k+1$, on a :

   $$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

   En intégrant ces deux inégalités de k à $k+1$, on obtient :

   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

   (b) Si l'on somme les inégalités précédentes de $k=1$ à $k=n-1$, on obtient :

   $$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n - 1 \\ \leq \ & \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \int_1^n \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \ln n \\ \leq \ & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} = H_n - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

   On a donc :

   $$H_n \leq \ln n + 1 \quad \text{et} \quad \ln n + \frac{1}{n} \leq H_n.$$

   (c) D'après la question précédente :

   $$\underbrace{1 + \frac{1}{n \ln n}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{\ln n}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

   D'après le théorème des gendarmes, $H_n/\ln n$ tend donc vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Cela montre que $H_n \sim \ln n$.

2. **Suites adjacentes**

   (a) Revenons à la définition de $\lim_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|v_n - w_n| \leq \varepsilon$.

En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n - w_n \leq 1$ (et donc $v_n \leq w_n + 1$).
La suite (w_n) est décroissante. Par conséquent, pour $n \geq n_0$ on a $v_n \leq w_n + 1 \leq w_{n_0} + 1$. La suite (v_n) est croissante. Par conséquent, pour tout $n \leq n_0$, on a $v_n \leq v_{n_0} \leq w_{n_0} + 1$. La suite (v_n) est donc majorée par $w_{n_0} + 1$.

(b) La suite (w_n) est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \leq n_0$, on a $w_n \geq w_{n_0} \geq v_{n_0} - 1$. La suite (v_n) est croissante. Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, on a $w_n \geq v_n - 1 \geq v_{n_0} - 1$. La suite (w_n) est donc minorée par $v_{n_0} - 1$.

(c) La suite v_n est croissante et majorée. Elle converge donc vers une limite $\ell_1 \in \mathbb{R}$. La suite (w_n) est décroissante et minorée. Elle converge donc vers une limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$. La suite $(v_n - w_n)$ converge vers 0. On a donc $\ell_1 - \ell_2 = 0$. Pa conséquent, les deux suites convergent vers la même limite $\ell_1 = \ell_2$.

3. **Constante d'Euler**

(a) Pour $n \geq 1$, la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \,]n, n+1[$ tel que

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c).$$

Comme $c \in \,]n, n+1[$, on a :

$$\frac{1}{n+1} < f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{n}.$$

(b) Montrons que les suites (c_n) et (d_n) sont adjacentes. Tout d'abord, :

$$c_{n+1} - c_n = \Big(H_{n+1} - \ln(n+1)\Big) - \Big(H_n - \ln n\Big) = \frac{1}{n+1} - \Big(\ln(n+1) - \ln n\Big) \leq 0.$$

La suite (c_n) est donc décroissante. Ensuite :

$$d_{n+1} - d_n = \left(c_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(c_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \Big(\ln(n+1) - \ln n\Big) \geq 0.$$

La suite (d_n) est donc croissante. Enfin :

$$c_n - d_n = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les suites (c_n) et (d_n) sont adjacentes. Elles ont donc la même limite.

(c) Nous venons de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln n = \gamma.$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n - \ln n - \gamma = 0,$$

ce qui s'écrit également $H_n - \ln n - \gamma = o(1)$ ou encore :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

Devoir à la maison à rendre le 18 septembre

6.0.1 Annales 2003, Partie I, Exercice III.

Il y avait 3 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 45mn maximum.

Règle de Raabe-Duhamel.

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, montrer que : si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2. Soit β un réel non nul et (u_n) une suite de réels strictement positifs satisfaisant à : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   (a) Montrer que, si l'on pose, pour $n \geq 1$ et α réel $\alpha > 0$, $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, on a : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   (b) Si $\beta > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge. (On pourra choisir le réel $\alpha \in]1, \beta[$).

   (c) Si $\beta < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

3. Déterminer, en utilisant la règle de Raabe-Duhamel (résultats 2b et 2c ci-dessus), la nature des séries de terme général u_n :

   (a) $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

   (b) $u_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ où a et b sont deux réels qui ne sont pas des entiers négatifs. (On discutera selon la valeur de $b - a$)

Corrigé de l'exercice III, Partie I, Annales 2003

1. Notons que pour $n \geq n_0$, on a :

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \cdot u_{n_0} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdots \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \cdot u_{n_0} = v_n \cdot \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}.$$

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum v_n \cdot \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ converge. Comme pour $n \geq n_0$, le terme de cette série convergente majore u_n, et comme $u_n > 0$, la série $\sum u_n$ est convergente.

2. (a) On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\alpha}{n} - 1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Si $\beta > 1$ et si $1 < \alpha < \beta$, alors d'après le critère de Riemann, la série $\sum v_n$ est convergente. De plus, $\beta - \alpha > 0$ et donc, pour n suffisamment, $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 0$, c'est à dire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

D'après la question 1, la série $\sum u_n$ est convergente.

(c) Si $\beta < \alpha < 1$, alors la série v_n diverge et pour n suffisamment grand :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

D'après la question 1, si $\sum u_n$ était convergente, alors $\sum v_n$ serait convergente, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, $\sum u_n$ est divergente.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\big((n+1)!\big)^2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1/2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut appliquer la règle de Raabe-Duhamel avec :

$$\beta=\frac{1}{2}<1.$$

La série $\sum u_n$ diverge.

(b) On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a+n}{b+n}=\left(1+\frac{a}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{b}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)=1-\frac{b-a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $b-a<1$, la série est divergente et si $b-a>1$, la série est convergente.

Enfin, si $b-a=1$, on a :

$$u_n=\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}=\frac{a}{a+n}.$$

Comme $a\neq 0$ (ce n'est pas un entier négatif), $u_n\sim a/n$ qui est de signe constant. La série $\sum u_n$ est donc de même nature que la série $\sum 1/n$ qui diverge.

Devoir à la maison à rendre le 27 septembre

6.0.1 Annales 2004, Partie I, Exercice III.

Il y avait 2 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 1h15 maximum.

Etude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente.

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum_{n\geq n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0, r_n son reste de rang n : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

1. On pose pour $n \geq 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.
   Calculer r_n puis montrer que $\sum_{n\geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

2. On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.
   Nous allons chercher un équivalent de (r_n).
   Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

   (a) Montrer que $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier N supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\sum_{k=n+1}^{N} \dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \dfrac{1}{k^2}$.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

   $$\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   (d) Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$. Que peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geq 1} r_n$?

3. On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

   (a) Justifier la convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n$.

   (b) Expression intégrale de r_n.
   Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite (I_n) par

   $$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x.$$

   i. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   ii. Montrer que $I_n = \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-x)^k$.

   iii. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer r_n en fonction de I_n.

   (c) Conclusion

   i. En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :

   $$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

   où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.

   ii. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} r_n$.

Corrigé de l'exercice I, Partie I, Annales 2004

1. On a :
$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}.$$
La suite (r_n) est une suite géométrique de raison $1/2 < 1$. La série $\sum_{n\geq 0} r_n$ est donc convergente, de somme :
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

2. (a) Si $k \geq 1$, la fonction $1/t^2$ est décroissante sur $[k, k+1]$. Donc pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$
(b) En intégrant l'encadrement précédent sur l'intervalle $[k, k+1]$, on obtient :
$$\frac{1}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$
En sommant de $k = n+1$ à $k = N$, on obtient :
$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}.$$
(c) Par conséquent :
$$\sum_{j=n+2}^{N+1} \frac{1}{j^2} \underset{j=k+1}{=} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}.$$
En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient :
$$r_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq r_n.$$
Autrement dit :
$$\frac{1}{n+1} \leq r_n = r_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(d) On a donc l'encadrement :

$$\underbrace{\frac{1/(n+1)}{1/n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1} \leq \frac{r_n}{1/n} \leq \underbrace{\frac{1/(n+1)}{1/n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1} + \underbrace{\frac{1/(n+1)^2}{1/n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}.$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\frac{r_n}{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Cela montre que $r_n \sim \frac{1}{n}$. Comme $1/n \geq 0$ et comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on voit que la série $\sum r_n$ diverge.

3. (a) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée. Elle est donc convergente.

(b) i. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

Par conséquent :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela montre que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

ii. Notons que pour $x \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \right) \mathrm{d}x \\ &= \Big[\ln(1+x) \Big]_0^1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(-x)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\ &= \ln 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

iii. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2.$$

De plus :

$$r_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 - (I_n - \ln 2) = -I_n.$$

(c) Conclusion

i. On va faire une intégration par parties en primitivant x^n (de sorte à faire apparaître le terme $1/(n+1)$) et en dérivant $1/(1+x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= (-1)^n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1+x}\right]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0,1]$, on a l'encadrement :

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq x^{n+1},$$

ce qui conduit à :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}.$$

Par conséquent :

$$\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

ii. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2(n+1)}$ est une série alternée, donc convergente.
Posons
$$u_n = I_n - \frac{(-1)^n}{2(n+1)}.$$
Comme $u_n = O(1/n^2)$, il existe une constante C telle que :
$$|u_n| \leq C \cdot \frac{1}{n^2}$$
La série $\sum 1/n^2$ est convergente, la série $\sum |u_n|$ est donc convergente. En d'autre termes, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
La série $\sum_{n\geq 1} r_n = \sum_{n\geq 1} -I_n$ est donc convergente, car somme de deux séries convergentes :
$$\sum r_n = -\sum \frac{(-1)^n}{2(n+1)} - \sum u_n.$$

Devoir à la maison à rendre le 4 octobre

6.0.1 Annales 2006, Partie I, Exercice I.

Il y avait 3 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 45mn maximum.

Étude d'une suite récurrente.

On note I l'intervalle $\left]0; \frac{1}{\sqrt{6}}\right[$. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ et $u_1 = \frac{1}{10}$.

On note f la fonction définie sur I par $f(x) = x - 2x^3$.

1. Étude de la convergence

   (a) Déterminer les variations de f sur I puis comparer $f(I)$ et I.

   (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Théorème de Cesàro
   Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel non nul n, qui converge vers un réel ℓ.
   On définit alors la suite (M_n) pour tout entier naturel non nul n, par $M_n = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$.
   M_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (v_n).

   (a) Traduire à l'aide de quantificateurs le fait que la suite (v_n) converge vers ℓ.

   (b) Soit n un entier naturel non nul, et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que

   $$|M_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} |v_k - \ell| + \max_{p<k\leq n} |v_k - \ell|.$$

   (c) Conclure avec soint que si la suite (v_n) converge vers ℓ, alors (M_n) converge aussi vers ℓ (ce résultat porte le nom de théorème de Cesàro).

3. Applications à la recherche d'un équivalent de (u_n)

(a) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{(x-2x^3)^2} - \dfrac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

En déduire la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

(b) Utiliser tous les résultats précédents pour donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la suite (u_n) (on pourra simplifier $\sum_{k=1}^{n} v_k$).

Corrigé de l'exercice I, Partie I, Annales 2006

1. Étude de la convergence

   (a) On a
   $$f'(x) = 1 - 6x^2 > 0$$
   sur I. Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur I. De plus, $f(0) = 0$ et
   $$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{6\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} < \frac{1}{\sqrt{6}}.$$
   Par conséquent :
   $$f(I) = \left]0; \frac{2}{3\sqrt{6}}\right[\subset I.$$

   (b) On voit par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in I$. En effet, $u_1 = 1/10 \in I$ et si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I$. De plus, pour tout $x \in I$:
   $$f(x) = x - 2x^3 < x.$$
   Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$. La suite (u_n) est décroissante.

   (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée paar 0. Elle converge donc. Soit ℓ la limite. Quand $n \to +\infty$, $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. Or, $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ converge vers $\ell - 2\ell^3$ (la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$). Par unicité de la limite d'une suite, on a donc $\ell = \ell - 2\ell^3$, ce qui montre que $\ell = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0.

2. Théorème de Cesàro

   (a)
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad |v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

   (b) D'après l'inégalité triangulaire, on a :
   $$\begin{aligned} |M_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) - \ell\right| &= \frac{1}{n}\Big|(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) - n\ell\Big| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |v_k - \ell|. \end{aligned}$$

Pour $n \geq p$, on peut majorer $v_k - \ell$ par $\max\limits_{p<k\leq n} |v_k - \ell|$. On a alors,

$$\begin{aligned}
|M_n - \ell| &\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p} |v_k - \ell| + (n-p) \sum_{k=n+1}^{p} \max_{p<k\leq n} |v_k - \ell|\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |v_k - \ell| + \frac{n-p}{n} \max_{p<k\leq n} |v_k - \ell| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |v_k - \ell| + \max_{p<k\leq n} |v_k - \ell|.
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour tout $k > p$, $|v_k - \ell| \leq \varepsilon/2$. Quand $n \to +\infty$, $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{p} |v_k - \ell|$ tend vers 0. Par conséquent, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |v_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $n_1 = \max(p, n_0)$. Alors, pour tout $n > n_1$, on a :

$$|M_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |v_k - \ell| + \max_{p<k\leq n} |v_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Applications à la recherche d'un équivalent de (u_n)

(a) Observons que

$$\frac{1}{(x-2x^3)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x-2x^3)^2}{x^2(x-2x^3)^2} = \frac{4x^4 - 4x^6}{x^4(1-2x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1-2x^2)^2}.$$

On a donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(x-2x^3)^2} - \frac{1}{x^2} = 4.$$

Comme la suite (u_n) converge vers 0, on a donc :

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{(u_n - 2u_n^3)^2} - \frac{1}{u_n^2} \longrightarrow 4.$$

(b) Nous allons utiliser le théorème de Cesàro. Pour cela, observons que :

$$\begin{aligned}
M_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \\
&= \frac{1}{n}\left(\cancel{\frac{1}{u_2^2}} - \frac{1}{u_1}^2 + \cancel{\frac{1}{u_3^2}} - \cancel{\frac{1}{u_2^2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{u_n^2}} - \cancel{\frac{1}{u_{n-1}^2}} + \frac{1}{u_{n+1}^2} - \cancel{\frac{1}{u_n^2}}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2}\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = 4.$$

Cela montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n u_{n+1}^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2}\right) = 4.$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}\cdot 2\sqrt{n} = 1.$$

Par conséquent, u_{n+1} est équivalent à $1/(2\sqrt{n})$ quand n tend vers $+\infty$, ou encore :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Devoir à la maison à rendre le 20 octobre

6.0.1 Annales 2005, Partie I, Exercice II.

Il y avait 3 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 60mn maximum.
Quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.

Soit n un entier naturel non nul. On note $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrés réelles d'ordre n.

On dit qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$) est **nilpotent** (respectivement **nilpotente**) s'il existe un entier k tel que $f^k = 0$ (respectivement $M^k = 0$).

1. Etude d'un exemple

   On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Montrer que A est nilpotente.

   (b) Déterminer la dimension du noyau de A.

   (c) Calculer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ?

2. Etude d'endomorphismes nilpotents particuliers

   Les deux questions suivantes sont indépendantes.

   (a) Soit f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Comparer Ker$f$ et Imf, puis calculer la dimensionde Ker$f$.

   (b) Soit f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

   Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans cette base.

3. Diagonalisation des matrices nilpotentes.

   (a) Déterminer les matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables.

   (b) Application : Déterminer les matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont nilpotentes.

Corrigé de l'exercice II, Partie I, Annales 2005

1. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Les deux premières colonnes de la matrice A sont indépendantes. Le rang de la matrice est donc au moins 2. D'après le théorème du rang, la dimension du noyau est donc au plus 1. Comme la troisième colonne de A est nulle, le vecteur $(0,0,1)$ est dans le noyau. La dimension du noyau est donc égale à 1 (et le noyau est la droite engendrée par $(0,0,1)$).

   (c) Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = \text{dét}(A - XI_3) = \text{dét}\begin{pmatrix} -X & 5 & 0 \\ 0 & -X & 0 \\ 2 & 3 & -X \end{pmatrix} = -X^3.$$

   Il n'y a donc qu'une seule valeur propre : $\lambda = 0$. La dimension de l'espace propre associé (c'est-à-dire le noyau de A) est égale à 1. La somme des dimensions des espaces propres est égale à 1. Elle n'est pas égale 3 (la dimension de l'espace). Par conséquent, A n'est pas diagonalisable.

2. (a) Comme $f^2 = 0$, si $y \in \text{Im}f$, c'est-à-dire si $y = f(x)$, alors $f(y) = f^2(x) = 0$. Donc y est dans $\text{Ker}f$. Autrement dit, $\text{Im}f \subset \text{Ker}f$. La dimension de l'image est au moins 1 car $f \neq 0$. D'après le théorème du rang, si la dimension de l'image est ≥ 2, alors la dimension du noyau est ≤ 1, ce qui n'est pas possible puisque $\text{Im}f \subset \text{Ker}f$. Par conséquent, la dimension de l'image est 1 est d'après le théorème du rang, la dimension du noyau est 2.

   (b) Supposons que $a_1x + a_2f(x) + \ldots a_{n-1}f^{n-1}(x) = 0$. On montre alors par récurrence sur k que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

   En effet, l'hypothèse de récurrence est vrai au rang $k = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= f^{n-1}\Big(a_1x + a_2f(x) + \ldots + a_{n-1}f^{n-1}(x)\Big) \\ &= a_1f^{n-1}(x) + a_2\underbrace{f^n(x)}_{=0} + \ldots + a_{n-1}\underbrace{f^{2n-2}(x)}_{=0}. \end{aligned}$$

   Donc, $a_1 = 0$.

Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= f^{n-k}\Big(a_k f(x) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(x)\Big) \\ &= a_k f^{n-1}(x) + a_{k+1} \underbrace{f^n(x)}_{=0} + \ldots + a_{n-1} \underbrace{f^{2n-k-1}(x)}_{=0}. \end{aligned}$$

Donc $a_k = 0$.

On a donc $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$, ce qui montre que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Comme elle contient n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, c'est une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice de f dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) Soit A une matrice nilpotente et soit λ une valeur propre de A. Il existe un entier n tel que $A^n = 0$. Il existe un vecteur v non nul tel que $A \cdot v = \lambda v$. Alors, $A^n v = \lambda^n v = 0$. Donc $\lambda^n = 0$ et $\lambda = 0$. Il n'y a donc qu'une seule valeur propre : 0.

   Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ avec D diagonale. Comme la seule valeur propre est 0, les termes diagonaux de D sont tous nuls. Donc $D = 0$. Et $A = PDP^{-1} = 0$.

   La seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle.

   (b) Si A est une matrice symétrique, alors A est diagonalisable. Si de plus A est nilpotente, alors $A = 0$. La seule matrice symétrique et nilpotente est donc la matrice nulle.

Devoir à la maison à rendre le 27 octobre

6.0.1 Annales 2004, Partie I, Exercice II.

Il y avait 2 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 1h15 maximum.

Racines carrées de matrices

On rappelle que $\mathbb{M}_n[3](\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels. Soit $A \in \mathbb{M}_n[3](\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice $R \in \mathbb{M}_n[3](\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$. Le but de l'exercice est de chercher les racines carrées de la matrice A dans les deux exemples suivants qui sont **indépendants**.

Exemple 1 Cas où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Réduction de A
   Déterminer le polynôme caractéristique de A puis justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathbb{M}_n[3](\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

3. Racines carrées de D
   Soit S une racine carrée de D.

   (a) Montrer que $DS = SD$.

   (b) Montrer que la matrice S est diagonale.

   (c) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note respectivement s_i et d_i les coefficients diagonaux des matrices S et D. Exprimer s_i en fonction de d_i puis en déduire les racines carrées de la matrice D.

4. Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. (On ne demande pas de calculer P.)

Exemple 2 Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. **Question préliminaire : Endomorphismes nilpotent**
   Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ **nilpotent**, c'est-à-dire vérifiant $f^N = 0$ pour un certain entier naturel N.
   Il existe alors un entier non nul k tel que $f^{k-1} \neq 0$ et $f^k = 0$.
   Le but de la question est de montrer que $k \leq 3$.
   Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^{k-1}(x) \neq 0$.

   (a) Montrer que pour $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, le vecteur $f^i(x)$ est non nul. (on rappelle que $f^0(x) = x$)

   (b) Montrer que les vecteurs $\left(f^i(x)\right)_{0 \leq i \leq k-1}$ forment une famille libre.

   (c) Que peut-on en déduire pour k ? Justifier votre réponse.

   Remarque Si une matrice M représente dans une base un endomorphisme f niltpotent, on dit que M est **nilpotente**.

6. Supposons qu'il existe R une racine carrée de A.

   (a) Calculer A^2, A^3. En déduire que R est nilpotente.

   (b) Calculer alors R^4. Comparer avec A^2 puis conclure.

Corrigé de l'exercice II, Partie I, Annales 2004

1. Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \text{dét}(A - X\mathrm{I}_3) \\
&= \text{dét}\begin{pmatrix} 11-X & -5 & 5 \\ -5 & 3-X & -3 \\ 5 & -3 & 3-X \end{pmatrix} \\
&= (11-X)(3-X)(3-X) + 75 + 75 - 25(3-X) - 9(11-X) - 25(3-X) \\
&= -X^3 + 17X^2 - 16X = -X(X^2 - 17X + 16) = -X(X-1)(X-16).
\end{aligned}$$

La matrice A a donc 3 valeurs propres distinctes : 0, 1 et 16. Si v_1 est un vecteur propre associé à 0, v_2 un vecteur propre associé à 1 et v_3 un vecteur propre associé à 16, et si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3), alors $D = P^{-1}AP$ et donc, $A = PDP^{-1}$.

2. Si $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D, alors $R = PSP^{-1}$ et

$$R^2 = PS\cancel{P^{-1}P}SP^{-1} = PS^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Réciproquement, si $R^2 = A$, alors

$$S^2 = P^{-1}R\cancel{PP^{-1}}RP = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = D.$$

3. (a) Si S est une racine carrée de D, alors $DS = S^2S = S^3 = SS^2 = SD$.

(b) Si $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors

$$DS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 16g & 16h & 16i \end{pmatrix} \text{et} SD = \begin{pmatrix} 0 & b & 16c \\ 0 & e & 16f \\ 0 & h & 16i \end{pmatrix}.$$

L'égalité des deux matrices montre que les coefficients a, b, c, d, f, g, h sont nuls :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale.

(c) La mtrice S^2 est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à s_i^2. Si $S^2 = D$, on a alors $s_i^2 = d_i$. Par conséquent, $s_1^2 = 0$ et $s_1 = 0$; $s_2^2 = 1$ et $s_2 = \pm 1$; $s_3^2 = 16$ et $s_3 = \pm 4$. La matrice D a donc 4 racines carrées :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{et} S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(d) La matrice A a donc 4 racines carrées qui sont :

$$PS_1P^{-1}, \quad PS_2P^{-1}, \quad PS_3P^{-1}\text{et}PS_4P^{-1}.$$

4. (a) Supposons par l'absurde que $f^i(x) = 0$ avec $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Alors $\ell = k - 1 - i \geq 0$ et :

$$f^{k-1}(x) = f^\ell\Big(f^i(x)\Big) = f^\ell(0) = 0.$$

On a une contradiction puisque $f^{k-1}(x) \neq 0$.

(b) Supposons par l'absurde que la famille $\Big(f^i(x)\Big)_{0 \leq i \leq k-1}$ n'est pas libre. On peut alors trouver une combinaison linéaire :

$$a_0 f^0(x) + a_1 f^1(x) + \ldots + a_{k-1} f^{k-1}(x) = 0$$

avec les a_i non tous nuls. Soit $p \geq 0$ le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. Alors :

$$a_p f^p(x) + a_{p+1} f^{p+1}(x) + \ldots + a_{k-1} f^{k-1}(x) = 0.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 &= f^{k-1-p}\Big(a_p f^p(x) + a_{p+1} f^{p+1}(x) + \ldots + a_{k-1} f^{k-1}(x)\Big) \\ &= a_p f^{k-1}(x) + \cancel{a_{p+1} f^k(x)} + \ldots + \cancel{a_{k-1} f^{2k-2-p}(x)}. \end{aligned}$$

Il reste donc $a_p f^{k-1}(x) = 0$ avec $f^{k-1}(x) \neq 0$. Donc $a_p = 0$, ce qui conterdit le fait d'avoir pris le plus petit p tel que $a_p \neq 0$.

(c) On a une famille libre de k veteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Donc $k \leq 3$.

5. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$R^6 = R^2 \cdot R^2 \cdot R^2 = A^3 = 0.$$

La matrice R est nilpotente.

(b) On a $R^4 = R^2 \cdot R^2 = A^2 \neq 0$. Par conséquent, le plus petit entier k pour lequel $A^k = 0$ est supérieur ou égal à 4. Cela est en contradiction avec la question 5 dans laquelle on montre que $k \leq 3$. Donc, A n'a pas de racine carrée.

Devoir à la maison à rendre le 17 novembre

6.0.1 Annales 2003, Partie I, Exercice II.

Il y avait 3 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 1h.

Endomorphismes f vérifiant : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$**.**

A. Propriétés

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E vérifiant : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

   (a) Montrer que nécessairement n est un entier pair et déterminer le rang de f en fonction de n.

   (b) Montrer que, pour tout vecteur x de E, $(f \circ f)(x) = 0$.

2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et $\dim E = 2\mathrm{rang}(f)$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

B. Cas général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E de rang p vérifiant $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

3. Donner p en fonction de n.

4. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans E, soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de F et soit $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ une base de $\mathrm{Ker} f$.

   (a) Que peut-on dire de la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$?

   (b) Montrer que la famille $\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\big)$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

   (c) Posons, pour tout entier i compris entre 1 et p, $e_{p+i} = f(e_i)$; calculer $f(e_{p+i})$.

   (d) montrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{2p})$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

C. Application

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer, en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de$\mathrm{Im} f$ et, sans aucun calcul, déterminer A^2.

6. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.

7. Déterminer les vecteurs d'une telle base $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Corrigé de l'exercice II, Partie I, Annales 2003

Endomorphismes f vérifiant : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

A. Propriétés

1. (a) D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = 2 \dim \mathrm{Im} f$$

car $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$. Or le rang de f est $\mathrm{rang}(f) = \dim \mathrm{Im} f$. Donc, la dimension n de E est paire et $\mathrm{rang}(f) = n/2$.

(b) Si $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$. Donc $f\big(f(x)\big) = 0$.

2. (a) Si $y \in \mathrm{Im} f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors

$$f(y) = f\big(f(x)\big) = (f \circ f)(x) = 0.$$

Donc $y \in \mathrm{Ker} f$. Cela montre que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

(b) Par hypothèse, on a :

$$\mathrm{rang}(f) = \dim \mathrm{Im} f = \frac{1}{2} \dim E.$$

Par conséquent :

$$\dim \mathrm{Ker} f = \dim E - \dim \mathrm{Im} f = \frac{1}{2} \dim E = \dim \mathrm{Im} f.$$

Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ et $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Ker} f$, on a égalité des sous-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f.$$

B. Cas général

3. D'après la question 1.a, on a $p = n/2$.

4. (a) Comme les espaces F et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires, la famille

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p, e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$$

est une base de E.

(b) Soit $x \in E$. On peut écrire :

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p + \lambda'_1 e'_1 + \cdots + \lambda'_p e'_p.$$

Comme les e'_i appartiennent au noyau de f, on a :

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots \lambda_p f(e_p) + \underbrace{\lambda'_1 f(e'_1)}_{=0} + \cdots + \underbrace{\lambda'_p f(e'_p)}_{=0}.$$

On voit donc que $f(x)$ est combinaison linéaire des $f(e_i)$. La famille

$$\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\big)$$

est génératrice de $\mathrm{Im} f$. De plus, elle contient p vecteurs et $\dim \mathrm{Im} f = p$. C'est donc une base de $\mathrm{Im} f$.

(c) On a $e_{p+i} = f(e_i) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$ et donc $f(e_{p+i}) = 0$.

(d) La famille $(e_{p+1}, \ldots, e_{2p})$ est une base de $\mathrm{Im} f$ d'après la question 4.b. C'est donc une base de $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$. D'après la question 4.a, la famille

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{2p})$$

est une base de E. La matrice de f dans cette base est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_i)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_{2p})$. Pour $i \in [1, p]$, on a $f(e_i) = e_{p+i}$ et $f(e_{p+i}) = 0$. La matrice de f dans cette base est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ & I_p & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

C. Application

5. On voit que l'image de f est engendrée par les vecteurs $f(e_1) = f(e_4) == -e_2 + e_3$ et $f(e_2) = f(e_3) = -e_1 + e_4$. Une base de $\mathrm{Im} f$ est donc $(-e_2 + e_3, -e_1 + e_4)$. En particulier $\dim \mathrm{Im} f = 2$. La dimension du noyau est 2 et elle contient les vecteurs $e_1 - e_4$ et $e_2 - e_3$. Une base de $\mathrm{Ker} f$ est donc $(e_1 - e_4, e_2 - e_3)$. On voit donc que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$. On a donc $f \circ f = 0$, ce qui montre que $A^2 = 0$.

6. D'après la question 4.d, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure.

7. Il suffit de prendre (v_1, v_2) une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ et de poser $v_3 = f(v_1)$ et $v_4 = f(v_2)$. On peut par exemple prendre $v_1 = e_1$ et $v_2 = e_2$, $v_3 = -e2 + e_3$ et $v_4 = -e1 + e_4$. En effet, montrons que l'espace vectoriel F engendré par v_1 et v_2 est un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$. Notons d'abord que $\dim F = 2$. De plus, si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F \cap \mathrm{Ker} f$ alors $f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = 0 = \lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_4 = 0$. Or, (v_3, v_4) est une famille libre, donc $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Donc $F \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$ et F et $\mathrm{Ker} f$ sont en somme directe. Comme chacun est de dimension 2 dans un espace de dimension 4, on a bien $F \oplus \mathrm{Ker} f = E$.

Devoir à la maison à rendre le 24 Novembre

6.0.1 Annales 2005, Partie I, Exercice I.

Il y avait 3 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 1h.

Calcul de l'intégrale de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. **Existence de I**

   On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$. Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$ puis montrer que $I = \int_0^{+} \infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On pourra intégrer par partes l'intégrale $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ $(A > 1)$.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit I_n et J_n par : $I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Soient $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et$k$ un entier natruel non nul.
   Ecrire $\sin x \cos(2kx)$ à l'aide d'une différence de deux "sinus" et en déduire une relation entre $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ et $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$.

   (c) Calculer J_n.

3. **Lemme de Lebesgue**

   Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ où a et b sont des réels avec $a < b$. On pose, pour tout entier naturel n, $L_n = \int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$. Montrer en utilisant une intégration par parties que la suite (L_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On définit la fonction ϕ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\phi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ pour $x \in\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\phi(0) = 0$.

   (a) Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de ϕ.

   (b) Montrer que ϕ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On **admet** pour la fin de l'exercice que ϕ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (cela se démontre avec des claculs de développements limités).

5. **Conclusion**

   Montrer que $\lim\limits_{n \to = \infty} (I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale I.

Corrigé de l'exercice I, Partie I, Annales 2005

Calcul de l'intégrale de Dirichlet $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. **Existence de I**

   La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car $\sin x$ et x sont continue sur $\mathbb{R}$ et que x ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, f est continue en 0 car :
   $$\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$$
   et donc
   $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$
   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente (car f est continue sur $[0, 1]$). De plus, une intégration par parties donne :
   $$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   Notons que
   $$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$
   et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On voit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Enfin $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \cos 1 - \frac{\cos A}{A} = \cos 1$. Par conséquent, la limite suivante existe :
   $$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   Cela montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. (a) On a :
   $$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{t=(2n+1)u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{(2n+1)u}(2n+1)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

(b) En utilisant la formule :

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(b+a) - \sin(b-a)}{2}$$

on obtient :

$$\sin x \cos(2kx) \frac{1}{2}\Big(\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x\Big).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin x \cos(2kx) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin(2k+1)x - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin(2n+1)x - \sin x\Big).\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} - 1\right).$$

(c) On a donc :

$$\begin{aligned}J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) + 1\right)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt)\,\mathrm{d}t\right) + \frac{\pi}{2} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin(2k\frac{\pi}{2})}{2k} - \frac{\sin 0}{2k}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3. **Lemme de Lebesgue**

On a :

$$L_n = \int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-g(t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b g'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\left|\cos(nt)\right| \leq 1$. Donc :

$$|L_n| \leq \frac{g(a)+g(b)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b \left|g'(t)\right|\mathrm{d}t \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

4. (a) Pour $x > 0$, on a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + ø(x^3)$$

et donc

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x\left(1 - x^2/6 + ø(x^2)\right)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + ø(x^2)\right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + ø(x).$$

Par conséquent :

$$\phi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = -\frac{x}{6} + ø(x).$$

(b) La fonction ϕ est continue et dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme différence de deux inverses de fonctions dérivables ne s'annulant pas. pour la dérivabilité en 0, on voit donc d'une part que $\phi(x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$. Par conséquent, ϕ est continue en 0. D'autre part :

$$\frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \frac{\phi(x)}{x} \longrightarrow_{x\to 0} -\frac{1}{6}.$$

Par conséquent, ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = -1/6$.

5. **Conclusion**

On admet que ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et on peut donc appliquer le lemme de Lebesgue. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin(2n+1)t \,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin(2n+1)t \,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

De plus, quand $n \to +\infty$, on a $I_n \to I$. Par conséquent :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Devoir à la maison à rendre le 11 septembre

6.0.1 Annales 2003, Partie I, Exercice I.

Il y avait 3 exercices. Temps estimé pour celui-ci: 45mn maximum.

Un développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Un équivalent de H_n**

   Soit n un entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Si k est un entier non nul, montrer que : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire l'encadrement suivant : $\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$.

   (c) Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

2. **Suites adjacentes**

   Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est-à-dire que : (v_n) est croissante, (w_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq w_n + 1$. En déduire que la suite (v_n) est majorée.

   (b) Montrer que la suite (w_n) est minorée.

   (c) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

3. **Constante d'Euler**

   On pose, pour $n \geq 1$, $c_n = H_n - \ln n$ et $d_n = c_n - \frac{1}{n}$.

   (a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

   (b) Montrer que les suite (c_n) et (d_n) convergent vers une même limite. On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).

   (c) Montrer que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Corrigé de l'exercice I, Partie I, Annales 2003

1. **Un équivalent de H_n**

   (a) Si k est un entier non nul et si $k \leq t \leq k+1$, on a :
   $$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$
   En intégrant ces deux inégalités de k à $k+1$, on obtient :
   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

   (b) Si l'on somme les inégalités précédentes de $k=1$ à $k=n-1$, on obtient :
   $$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n - 1 \\ \leq\ &\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln n \\ \leq\ &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} = H_n - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$
   On a donc :
   $$H_n \leq \ln n + 1 \quad \text{et} \quad \ln n + \frac{1}{n} \leq H_n.$$

   (c) D'après la question précédente :
   $$\underbrace{1 + \frac{1}{n \ln n}}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ n\to\infty}} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{\ln n}}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ n\to\infty}}.$$
   D'après le théorème des gendarmes, $H_n/\ln n$ tend donc vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Cela montre que $H_n \sim \ln n$.

2. **Suites adjacentes**

   (a) Revenons à la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|v_n - w_n| \leq \varepsilon$.

En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n - w_n \leq 1$ (et donc $v_n \leq w_n + 1$).
La suite (w_n) est décroissante. Par conséquent, pour $n \geq n_0$ on a $v_n \leq w_n + 1 \leq w_{n_0} + 1$. La suite (v_n) est croissante. Par conséquent, pour tout $n \leq n_0$, on a $v_n \leq v_{n_0} \leq w_{n_0} + 1$. La suite (v_n) est donc majorée par $w_{n_0} + 1$.

(b) La suite (w_n) est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \leq n_0$, on a $w_n \geq w_{n_0} \geq v_{n_0} - 1$. La suite (v_n) est croissante. Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, on a $w_n \geq v_n - 1 \geq v_{n_0} - 1$. La suite (w_n) est donc minorée par $v_{n_0} - 1$.

(c) La suite v_n est croissante et majorée. Elle converge donc vers une limite $\ell_1 \in \mathbb{R}$. La suite (w_n) est décroissante et minorée. Elle converge donc vers une limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$. La suite $(v_n - w_n)$ converge vers 0. On a donc $\ell_1 - \ell_2 = 0$. Pa conséquent, les deux suites convergent vers la même limite $\ell_1 = \ell_2$.

3. **Constante d'Euler**

(a) Pour $n \geq 1$, la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que
$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c).$$
Comme $c \in]n, n+1[$, on a :
$$\frac{1}{n+1} < f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{n}.$$

(b) Montrons que les suites (c_n) et (d_n) sont adjacentes. Tout d'abord, :
$$c_{n+1} - c_n = \Big(H_{n+1} - \ln(n+1)\Big) - \Big(H_n - \ln n\Big) = \frac{1}{n+1} - \Big(\ln(n+1) - \ln n\Big) \leq 0.$$
La suite (c_n) est donc décroissante. Ensuite :
$$d_{n+1} - d_n = \left(c_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(c_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \Big(\ln(n+1) - \ln n\Big) \geq 0.$$
La suite (d_n) est donc croissante. Enfin :
$$c_n - d_n = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Les suites (c_n) et (d_n) sont adjacentes. Elles ont donc la même limite.

(c) Nous venons de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln n = \gamma.$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n - \ln n - \gamma = 0,$$

ce qui s'écrit également $H_n - \ln n - \gamma = o(1)$ ou encore :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

Devoir à la maison à rendre le 1 décembre

6.0.1 Annales 2004, Partie II.

Durée : 2 heures.

Un calcul de l'intégrale de Gauss, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Le but de ce problème est de calculer l'intégrale de Gauss, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ en utilisant une suite de fonctions qui converge vers $x \mapsto e^{-x^2}$.

Les deux premiers paragraphes sont **indépendants**, le troisième paragraphe utilise les résultats démontrés dans les deux paragraphes précédents.

Questions préliminaires

1. Montrer que l'intégrale I est bien définie.
2. On définit sur $[0, 1[$ la fonction Ψ par $\Psi(t) = t + \ln(1 - t)$.
   (a) Etudier les variations et le signe de Ψ.
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de Ψ.

I. Un équivalent des intégrales de Wallis et une application

Pour tout entier naturel n, on définit la suite des intégrales de Wallis (I_n) par : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

3. **Une relation de récurrence**
   (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Justifier que (I_n) est une suite de réels strictement positifs.
   (c) Montrer que pour $n \geq 1$, on a $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la suite (u_n) par $u_n = nI_{n-1}I_n$.
   Montrer que (u_n) est une suite constante et en déduire que $I_{n-1}I_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
5. **Equivalent de I_n**
   (a) Montrer que pour $n \geq 1$, on a $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.
   (b) En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

(c) Donner alors un équivalent de (I_n) à l'infini.

6. **Application :**

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (J_n) par

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que pour $n \geq 1$, $J_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) \,\mathrm{d}x$.

(b) En déduire la limite de (J_n) en $+\infty$.

II. Intégration sur un intervalle non borné de la limite d'une suite de fonctions

Si (f_n) est une suite convergente de fonctions définies sur l'intervalle non borné $[0, +\infty[$, on souhaite trouver une condition suffisante pour pouvoir permuter limite et intégrale, c'est-à-dire avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x$. Le but de ce paragraphe est donc de donner cette condition suffisante.

A. La convergence uniforme est insuffisante...

7. Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0, +\infty[$ la suite de fonctions (g_n) par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} & \text{si } x \in [0, n[\\ -\dfrac{x}{n^2} + \dfrac{2}{n} & \text{si } x \in [n, 2n[\\ 0 & \text{si } x \in [2n, +\infty[\,. \end{cases}$$

(a) Représenter le graphe de g_2.

(b) Soit $n \geq 1$, montrer que g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(x) \,\mathrm{d}x$ en utilisant des conditions géométriques.

(c) Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x$?

B. Une condition suffisante : convergence uniforme sur tout segment et domination

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues sur $[0,+\infty[$ qui converge uniformément sur tout segment $[0,a]$ inclus dans $[0,+\infty[$ avec $a>0$ vers une fonction f.
On suppose en plus que la suite (f_n) est dominée, c'est-à-dire qu'il existe une fonction g continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et telle que $\forall n\geq 1,\ |f_n|\leq g$.

8. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

9. Soit $\varepsilon>0$.

   (a) On définit sur $[0,+\infty[$ la fonction ϕ par $\phi(t)=\displaystyle\int_t^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   Déterminer la limite de ϕ en $+\infty$ puis justifier l'exsitence d'un réel $A>0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}$.

   (b) En déduire que pour tout $n\geq 1$,
   $$\int_0^{+\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x\leq\int_0^{A}\left|f_n(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}.$$

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

III. Application au calcul de l'intégrale de Gauss

Pour tout en tier naturel n non nul, on définit sur $[0,+\infty[$ la suite de fonctions (f_n) par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,\sqrt{n}[\\ 0 & \text{si } x \in [\sqrt{n},+\infty[\,. \end{cases}$$

On note aussi f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

10. Soit x un réel strictement positif.

    (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $f_n(x) \leq f(x)$ (on pourra utiliser la fonction Ψ).

    (b) Montrer que pour tout entier n vérifiant $n > x^2$, on a

    $$\left|f_n(x) - f(x)\right| = e^{-x^2}\left(1 - e^{n\Psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}\right).$$

    (c) En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.

11. Soit a un réel strictement positif.
    Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$ vers f.

12. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ puis conclure quant à la valeur de I.

Corrigé de la Partie II, Annales 2004

Questions préliminaires

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Il n'y a donc un problème qu'en $+\infty$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$. Donc, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, on a $0 \leq x^2 e^{-x^2} \leq 1$. Sur $[A, +\infty[$, on a donc $0 \leq e^{-x^2} \leq 1/x^2$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, A]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^A e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est également convergente. Cela montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

2. (a) Si $t \in [0, 1[$, alors $1 - t \in]0, 1]$. Or $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0, 1]$. La fonction Ψ est donc continue et dérivable sur $[0, 1[$ comme composée et somme de fonctions continues et dérivables. Notons que :
$$\Psi'(t) = 1 - \frac{1}{1-t} = -\frac{t}{1-t}.$$
On voit donc que $\Psi'(t) < 0$ pour $t \in]0, 1[$. La fonction Ψ est donc strictement décroissante sur $[0, 1[$. Notons également que $\Psi(0) = 0 + \ln(1) = 0$. La fonction Ψ est donc négative sur $]0, 1[$ et nulle en 0.

   (b) Rappelons que $\ln(1 + u) = u - u^2/2 + u^2\varepsilon(u)$. Par conséquent :
$$\Psi(t) = t + \left(-t - \frac{t^2}{2}\right) + t^2\varepsilon(t) = -\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t).$$

I. Un équivalent des intégrales de Wallis et une application

3. **Une relation de récurrence**

   (a) On a
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$
et
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

(b) Notons que $\sin x$ est continue et positive sur $[0, \pi/2]$. Il est est de même de $\sin^n x$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $I_n \geq 0$. Pour tout n, $\sin^n(\pi/2) = 1$. Comme la fonction $x \mapsto \sin^n x$ est continue, il existe $\delta_n > 0$ tel que $\sin^n x > 1/2$ sur $[\pi/2 - \delta_n, \pi/2]$. On voit alors que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x \geq \int_{\pi/2-\delta_n}^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x \geq \int_{\pi/2-\delta_n}^{\pi/2} \frac{1}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{\delta_n}{2} > 0.$$

La suite (I_n) est donc une suite de réels strictement positifs.

(c) Une intégration par parties montre que

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^n x \,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\Big[-\cos x \cdot \sin^n x\Big]_0^{\pi/2}}_{0} + \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} n \sin^{n-1} x \cdot (1 - \sin^2 x) \,\mathrm{d}x = nI_{n-1} - nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1} \mathrm{et} I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}.$$

4. D'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = (n+1)I_n \cdot \frac{n}{n+1} I_{n-1} = nI_nI_{n-1} = u_n.$$

La suite (u_n) est donc une suite constante. On a donc pour tout $n \geq 1$

$$nI_{n-1}I_n = u_n = u_1 = 1 \cdot I_0 \cdot I_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Autrement dit

$$I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}.$$

5. **Equivalent de I_n**

(a) pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin x \in [0, 1]$. Par conséquent, pour $n \geq 1$

$$\sin^{n+1} x \leq \sin^n x \leq \sin^{n-1} x.$$

Les inégalités sont préservées lorsque l'on intègre entre 0 et $\pi/2$, ce qui montre que $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.

(b) Rappelons que $I_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. On a donc, pour $n \geq 1$,

$$\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

D'après la question 3.c., on a donc

$$\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1$. Cela montre que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

(c) En utilisant le résultat de la question précédente et celui de la question 4, on obtient :

$$I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1} I_n = \frac{\pi}{2n}.$$

Par conséquent :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

6. **Application :**

(a) Faisons le changement de variable $x = \sqrt{n} \cdot \cos t$. L'application $t \mapsto \sqrt{n} \cdot \cos x$ est une bijection dérivable et décroissante de $[0, \pi/2]$ dans $[0, \sqrt{n}]$. On a donc :

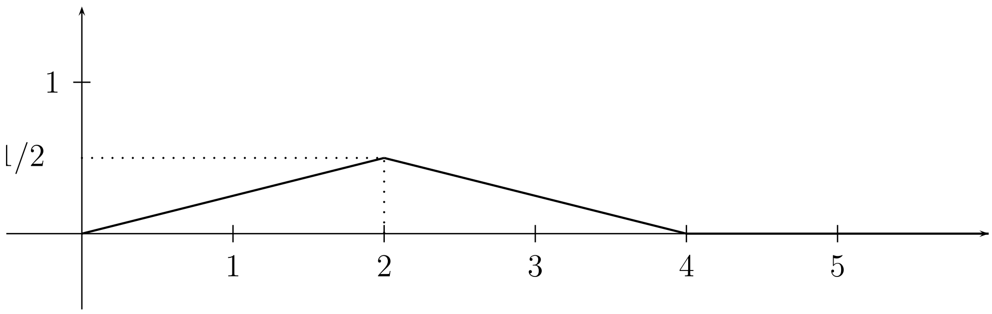
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^0 \left(1 - \cos^2 t\right)^n \cdot (-\sqrt{n} \cdot \sin t)\, \mathrm{d}t = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\, \mathrm{d}x.$$

(b) On a donc

$$J_n = \sqrt{n} \cdot I_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}} \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

II. Intégration sur un intervalle non borné de la limite d'une suite de fonctions

A. La convergence uniforme est insuffisante...



7. (a)

   (b) La fonction g_n est continue sur chaque intervalle $[0, n[$, $]n, 2n[$ et $]2n, +\infty[$ car sur chacun de ces intervalles, g_n est un polynôme (de degré 1). Le problème de la continuité de g_n ne se pose donc qu'en n et en $2n$. On vérifie facilement que

   $$\lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} g_n(x) = \frac{1}{n} = \lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} g_n(x)$$

   et

   $$\lim_{\substack{x \to 2n \\ x < 2n}} g_n(x) = 0 = \lim_{\substack{x \to 2n \\ x > 2n}} g_n(x).$$

   La fonction g_n est donc continue en ces deux points. L'intégrale $\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire sous le graphe de g_n, c'est-à-dire l'aire d'un triangle de base $2n$ et de hauteur $1/n$. On a donc

   $$\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

   (c) On a

   $$\forall x \geq 0 \quad 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n} \longrightarrow_{n \to +\infty} 0.$$

   Par conséquent, la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle. Cependant

   $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

B. Une condition suffisante : convergence uniforme sur tout segment et domination

8. La fonction f est continue sur tout segment $[0, a]$ avec $a > 0$, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Elle est donc continue sur $[0, +\infty[$.

   En passant à la limite sur la majoration $|f_n| \leq g$, on obtient $|f| \leq g$. Comme $\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, on en déduit que $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. Par conséquent, $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente (donc convergente).

9. (a) On a

   $$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x + \phi(t) \text{et} \lim_{t\to+\infty} \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Par conséquent,

   $$\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0.$$

   Comme $\varepsilon/4 > 0$, cela implique l'existence d'un réel A tel que pour tout $t \geq A$, $\left|\phi(t)\right| < \varepsilon/4$. En particulier, pour $t = A$, on a

   $$\int_A^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}.$$

   (b) Pour tout $n \geq 1$, on a alors

   $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x &= \int_0^A \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^A \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} \left|f_n(x)\right| \mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^A \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x + 2\int_A^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^A \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

   (c) Comme A est fixé et comme $f_n \to f$ uniformément sur $[0, A]$, on sait que pour n suffisamment grand,

   $$\sup_{x\in[0,A]} \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2A}.$$

   On a alors

   $$\int_0^A \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x \leq A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour n suffisamment grand, on a

$$\left|\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

III. Application au calcul de l'intégrale de Gauss

10. (a) Si $\sqrt{n} \leq x$, alors $f_n(x) = 0 < f(x)$. Si $\sqrt{n} > x$, alors $n > x^2$ et $0 < x^2/n < 1$. On a alors $\Psi(x^2/n) < 0$. Notons que

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) = \exp\left(n\Big(\Psi(x^2/n) - x^2/n\Big)\right).$$

Comme $\Psi(x^2/n) < 0$, on a

$$f_n(x) < \exp(-nx^2/n) = f(x).$$

(b) En reprenant le calcul précédent, on voit que si $n > x^2$, alors

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = f(x) - f_n(x) = \exp(-x^2) - \exp\left(n\Big(\Psi(x^2/n) - x^2/n\Big)\right) = e^{-x^2}\Big(1 - e$$

(c) Quand $n \to +\infty$, $x^2/n \to 0$ et

$$\Psi\left(\frac{x^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{n}\right)^2 = -\frac{x^4}{2n^2}.$$

Par conséquent,

$$n\Psi\left(\frac{x^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^4}{2n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \mathrm{et} e^{n\Psi\left(\frac{x^2}{n}\right)} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1.$$

Au final,

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = e^{-x^2}\left(1 - e^{n\Psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

Cela montre que $f_n(x) \longrightarrow_{n\to+\infty} f(x)$ pour tout $x > 0$. Notons que pour $x = 0$, $f_n(0) = 1 \to f(0) = 1$. On a montré que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0, +\infty[$.

11. si $x \leq a$, alors $x^2/n \leq a^2/n$ et $\Psi(x^2/n) \geq \Psi(a^2/n)$. Par conséquent

$$1 - e^{n\Psi(x^2/n)} \leq 1 - e^{n\Psi(a^2/n)}.$$

De plus,

$$e^{-x^2} \leq 1.$$

Par conséquent

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| \leq 1 - e^{n\Psi(a^2/n)} \longrightarrow_{n \to +\infty} 0.$$

Cela montre que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers f.

12. On a donc convergence uniforme sur tout segment et domination par f avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ qui converge. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Cela donne

$$I = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

EPCM. Contrôle continu n°1.
Lundi 9 octobre 2006. Durée 2 heures.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif: Exercice 1: 2 pts; Exercice 2: 2 pts; Exercice 3: 4 pts; Exercice 4: 6 pts; Exercice 5: 6 pts.

Exercice 1 *Déterminer la nature des séries suivante :*

1. $\sum u_n$ *avec* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/3} + (-1)^n}$

2. $\sum v_n$ *avec* $v_n = \dfrac{n^3}{(n^2+1) \cdot 2^n}$.

Exercice 2 *Étudier la convergence (simple et uniforme) des suites de fonctions suivantes sur le domaine I:*

1. $a_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$, $I = [-1, 1]$

2. $b_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. *Étudier la convergence (simple et uniforme) sur l'intervalle* $[0, 1]$ *de la suite de fonctions* (f_n) *définie par :* $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$,

2. *Soit* $g_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 1 & \text{si } x \in]1/n, 1] \end{cases}$.

   (a) *Montrer que la suite* (g_n) *converge simplement sur* $[0, 1]$.

   (b) *La convergence est-elle uniforme sur* $[0, 1]$ *?*

Exercice 4 *Pour* $n \geq 1$ *on note* $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n}$.

1. *Pour quelles valeurs de* $x \in \mathbb{R}$ *la série numérique* $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ *converge-t-elle ?*

   Lorsque cette série converge, on note $f(x)$ *la valeur la somme :*

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{n\geq 1} f_n(x).$$

2. *La série* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[-1, 1]$ *?*

3. *La série* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[-a, a]$ *avec* $a \in]0, 1[$ *?*

4. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge uniformément sur* $[-1, 1]$.

5. *En déduire que* f *est continue sur* $[-1, 1]$.

Exercice 5 Règle de Raabe-Duhamel.

1. *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes strictement positifs telle qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *vérifiant :* $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, *montrer que : si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*

2. *Soit* β *un réel non nul et* (u_n) *une suite de réels strictement positifs satisfaisant à :* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

   (a) *Montrer que, si l'on pose, pour* $n \geq 1$ *et* α *réel* $\alpha > 0$, $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, *on a :* $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

   (b) *Si* $\beta > 1$, *montrer que la série* $\sum u_n$ *converge. (On pourra choisir le réel* $\alpha \in]1, \beta[$*).*

   (c) *Si* $\beta < 1$, *montrer que la série* $\sum u_n$ *diverge.*

3. *Déterminer, en utilisant la règle de Raabe-Duhamel (résultats 2b et 2c ci-dessus), la nature des séries de terme général* u_n *:*

(a) $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

(b) $u_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ *où* a *et* b *sont deux réels qui ne sont pas des entiers négatifs. (On discutera selon la valeur de* $b-a$*)*

Corrigé du contrôle continu n°1.

Exercice 1 1. *Attention, la suite $|u_n|$ n'est pas une suite décroissante. On ne peut donc pas appliquer le théorème des séries alternées. On va faire un développement limité :*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} \cdot \frac{1}{1+(-1)^n/n^{1/3}} = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} - \frac{1}{n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right).$$

On a donc :

$$u_n = v_n - w_n \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right).$$

La série $\sum v_n$ converge car c'est une série alternée. De plus, w_n est équivalent à $1/n^{2/3}$. C'est le terme général d'une série <u>à termes positifs</u> qui diverge (d'après le critère de Riemann). La série $\sum w_n$ est donc divergente.

Par conséquent, $\sum u_n$ est la différence d'une série convergente et d'une série divergente. Donc $\sum u_n$ est une série divergente.

2. *On va appliquer le critère de d'Alembert. Notons que :*

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n^2+1)\cdot 2^n}{n^3} \cdot \frac{(n+1)^3}{\Big((n+1)^2+1\Big)\cdot 2^{n+1}} \sim \frac{n^5}{2n^5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$

Par conséquent, la série $\sum v_n$ est convergente.

Exercice 2 (Fait en T.D.)

1. $a_n(x) = \sin(\frac{x}{2^n})$ *sur* $[-1,1]$ *:*

   - *Convergence simple : Pour tout $x \in [-1,1]$, $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc, par continuité de la fonction sinus, (a_n) converge simplement vers la fonction nulle.*
   - *Convergence uniforme : Pour tout $x \in [-1,1]$, $|\sin(\frac{x}{2^n}) - 0| \leq |\sin(\frac{1}{2^n})|$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il y a donc convergence uniforme.*

2. $b_n(x) = \sin(\frac{x}{2^n})$ *sur* $\mathbb{R}$ *:*

- *Convergence simple : Idem.*
- *Convergence uniforme : Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a, pour* $x = 2^n$, $|b_n(2^n) - 0| = \sin(1)$. *Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.*

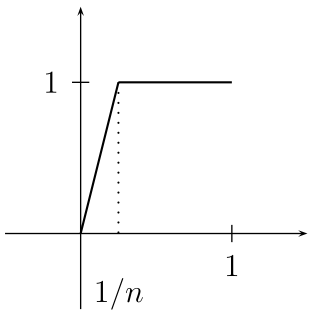
Exercice 3

1. - *Convergence simple : pour tout* $x > 0$, $1 + nx$ *tend vers l'infini quand* n *tend vers l'infini. Donc,* $1/(1+nx)$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini. Pour* $x = 0$, *la suite* $1/(1+nx)$ *est constante égale à* 1. *La suite* f_n *converge donc simplement sur* $[0,1]$ *vers la fonction* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x \in \,]0,1]\,. \end{cases}$$

   - *Convergence uniforme : les fonctions* f_n *sont continues sur* $[0,1]$ *mais la limite* f *n'est pas continue sur* $[0,1]$ *(elle n'est pas continue en* 0*). La convergence ne peut donc pas être uniforme sur* $[0,1]$.

2. *Commençons par tracer le graphe de* g_n *:*



   (a) *Si* $x \in \,]0,1]$ *et si* n *est un entier supérieur à* $1/x$, *alors* $x \geq 1/n$ *et donc,* $g_n(x) = 1$. *Pour tout* $x \in \,]0,1]$, *la suite* $\big(g_n(x)\big)$ *est donc stationnaire (elle finit par être constante) et la limite vaut* 1. *De plus,* $g_n(0) = 0$ *pour tout* $n \geq 0$. *La suite* (g_n) *converge donc simplement vers la fonction* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x \in \,]0,1]\,. \end{cases}$$

(b) *Les fonctions g_n sont continues sur $[0,1]$. La limite simple g n'est pas continue en 0. La convergence ne peut donc pas être uniforme.*

Exercice 4

1. *Si $|x| > 1$, la suite $f_n(x)$ de converge pas vers 0. La série $\sum f_n(x)$ ne converge donc pas si $|x| > 1$. Si $|x| \leq 1$, la suite $|f_n(x)|$ est décroissante et tend vers 0. La série $\sum f_n(x)$ est alors une série alternée. La série $\sum f_n(x)$ est donc convergente si, et seulement si, $|x| \leq 1$.*

2. *La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-1,1]$. En effet, le supremum de $|f_n(x)|$ sur $[-1,1]$ est $1/(2n)$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2n}$ est divergente (critère de Riemann).*

3. *La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$ avec $a \in]0,1[$. En effet, le supremum de $|f_n(x)|$ sur $[-a,a]$ est $a^{2n}/(2n)$. Le critère de d'Alembert permet de conclure que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a^{2n}}{2n}$ est convergente puisque :*

$$\frac{a^{2n+2}/(2n+2)}{a^{2n}/2n} = a^2 \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a < 1.$$

4. *Comme mentionné plus haut, la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est une série alternées de fonctions sur $[-1,1]$ avec $|f_{n+1}| \leq |f_n|$ et $|f_n|$ qui tend uniformément vers 0 sur $[0,1]$. En effet,*

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   D'après le théorème des séries de fonctions alternées, la série de fonction $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[-1,1]$.

5. *Les fonctions f_n sont continues car ce sont des polynômes. La série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$. la somme est donc continue.*

Exercice 5 *Voir Corrigé du devoir à la maison 2.*

EPCM. Contrôle continu n°2.

Lundi 6 novembre 2006. Durée 2 heures.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif: Exercice 1: 5 pts; Exercice 2: 4 pts; Exercice 3: 4 pts; Exercice 4: 3 pts; Exercice 5: 5 pts; Exercice 6: 7 pts.

Attention. Le sujet est long mais le bareme est sur 28. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.

Exercice 1 (5pts) *On pose pour* $n \geq 1$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

1. *Soit* k *un entier supérieur ou égal à* 1. *Montrer que* $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{t^3} \leq \frac{1}{k^3}$.
2. *En déduire que pour tout entier* $N > n \geq 1$, *on a :*
$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3}.$$
3. *En déduire que pour tout entier naturel non nul* n, *on a :*
$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq r_n \leq \frac{1}{2n^2}.$$
4. *Donner alors un équivalent de* (r_n) *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.
5. *Que peut-on conclure sur la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} r_n$ *?*

Exercice 2 (4pts) *Soit* $f_n(x) = \frac{-nx}{3+4n^2x^2}$.

1. *Étant donné* $x_0 \neq 0$, *donner un équivalent de* $f_n(x_0)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.
2. *En déduire que que la suite* (f_n) *converge simplement et déterminer la limite* f.
3. *Dresser le tableau de variations de* f_n.
4. *Étudier la convergence uniforme de la suite* (f_n) *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (4pts) *On considère les séries de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *et* $\sum_{n\geq 0} g_n(x)$ *avec :*

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{et} g_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

1. *Montrer que les séries* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} g_n$ *convergent normalement sur* $[-a, a]$ *pour tout* $a > 0$.
   On appelle $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *et* $G(x) = \sum_{n\geq 0} g_n(x)$ *les sommes.*
2. *Montrer que les fonctions* F *et* G *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
3. *Montrer que les fonctions* F *et* G *sont dérivables, que* $F' = G$ *et que* $G' = F$.

Exercice 4 (3pts) *Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation*

$$(x,y,z,t) \in F \iff \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y+3t=0 \\ x-y+z-t=0. \end{array}$$

Donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 5 (5pts) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de A.*
2. *Quelle est l'image du vecteur $v_1 = (1,1,1)$? En déduire que 3 est valeur propre.*
3. *Déterminer les autres valeurs propres de A.*
4. *Déterminer les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre.*
5. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

Exercice 6 (7pts) *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (3x+y, x+3y)$. On note (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

1. *Déterminer la matrice A de f dans la base (e_1,e_2).*
2. (a) *Trouver les valeurs propres de f.*
   (b) *Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé.*
   On notera v_1 et v_2 les deux vecteurs propres ainsi choisis.
3. (a) *Ecrire la matrice A' de f dans la base (v_1,v_2).*
   (b) *Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1,e_2) à la base (v_1,v_2).*
4. *Calculer A^n pour $n \geq 1$.*

EPCM. Corrigé du Contrôle continu n°2.

Exercice 1 1. *Si $k \geq 1$, la fonction $1/t^3$ est décroissante sur $[k, k+1]$. Donc pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :*

$$\frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{t^3} \leq \frac{1}{k^3}.$$

2. *En intégrant l'encadrement précédent sur l'intervalle $[k, k+1]$, on obtient :*

$$\frac{1}{(k+1)^3} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^3}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^3}.$$

En sommant de $k = n+1$ à $k = N$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^3} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3}.$$

3. *Par conséquent :*

$$\sum_{j=n+2}^{N+1} \frac{1}{j^3} \underset{j=k+1}{=} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3}.$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient :

$$r_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)^2} \leq r_n.$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq r_n \mathrm{et} r_n \leq \frac{1}{2n^2}.$$

4. *On a donc l'encadrement :*

$$\underbrace{\frac{1/2(n+1)^2}{1/2n^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \leq \frac{r_n}{1/2n^2} \leq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\frac{r_n}{1/2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Cela montre que $r_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

5. *Comme* $1/2n^2 \geq 0$ *et comme la série* $\sum \frac{1}{2n^2}$ *converge, on voit que la série* $\sum r_n$ *converge.*

Exercice 2 1. *Si* $x_0 \neq 0$*, on a :*

$$3 + 4n^2x_0^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n^2x_0^2$$

et donc

$$f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-nx_0}{4n^2x_0^2} = -\frac{1}{4nx_0}.$$

2. *On voit donc que pour* $x_0 \neq 0$, *on a* $f_n(x_0) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. *De plus,* $f_n(0) = 0$ *pour tout* n. *On voit donc que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. *Cela signifie que la suite* (f_n) *converge simplement vers la fonction identiquement nulle.*

3. *Pour tout* $x \neq 0$, *on a* $3 + 4n^2x^2 > 0$ *et donc, la fonction* f_n *est définie sur* $\mathbb{R}$. *Elle y est continue et dérivable comme quotient de deux fonctions (polynômiales) continues et dérivables (la fonction au dénominateur ne s'annulant pas). La fonction* f_n *est impaire. On a :*

$$f_n'(x) = -n\frac{(3 + 4n^2x^2) - x \cdot (8n^2x)}{(3 + 4n^2x^2)^2} = -n\frac{3 - 4n^2x^2}{(3 + 4n^2x^2)^2}$$

qui est de même signe que $4n^2x^2 - 3$. *La dérivée s'annule pour* $x = \pm\sqrt{3}/(2n)$. *Elle est négative entre les racines et positive en dehors. On a :*

$$f_n\left(\frac{\sqrt{3}}{2n}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{12} \text{et} f_n\left(-\frac{\sqrt{3}}{2n}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Quand $x \to \pm\infty$, $f_n(x) \sim -1/(4nx)$. *Par conséquent* $f_n(x) \longrightarrow_{x\to\pm\infty} 0$. *On a donc le tableau de variations suivant.*

			$-\sqrt{3}/(2n)$		$\sqrt{3}/(2n)$		
$f_n'(x)$		+	*0*	-	*0*	+	
$f_n(x)$	*0*	$\nearrow$	$\sqrt{3}/12$	$\searrow$	$-\sqrt{3}/12$	$\nearrow$	*0*

4. *On voit que :*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x)\right| = \frac{\sqrt{3}}{12} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

La suite (f_n) *ne converge donc pas uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3 1. *Si* $x \in [-a, a]$, *alors :*

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{a^{2n}}{(2n)!} \text{et} \left|g_n(x)\right| \leq \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les séries $\sum \frac{a^{2n}}{(2n)!}$ *et* $\sum \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *convergent, d'après le critère de d'Alembert. En effet :*

$$\frac{a^{2n+2}/(2n+2)!}{a^{2n}/(2n)!} = \frac{a^2}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 < 1$$

et
$$\frac{a^{2n+3}/(2n+3)!}{a^{2n+1}/(2n+1)!} = \frac{a^2}{(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 < 1.$$
Les séries $\sum_{n\geq 0} f_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} g_n$ *sont donc normalement convergentes sur* $[-a, a]$.

2. *Les fonctions f_n et g_n sont continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_{n\geq 0} f_n$ et $\sum_{n\geq 0} g_n$ sont normalement convergentes, donc uniformément convergentes sur $[-a, a]$. Les sommes F et G sont donc continues sur $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Elle sont donc continues en tout point de $\mathbb{R}$. Elles sont continues sur $\mathbb{R}$.*

3. *Les séries convergent en 0 (on a même démontré qu'elles convergent sur $\mathbb{R}$). Notons que pour $n = 0$, $f_n'(x) = g_n'(x) = 0$, et pour tout $n \geq 1$:*

$$f_n' = g_n \text{et} g_n' = f_n.$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, les séries des dérivées $\sum_{n\geq 0} f_n'$ et $\sum_{n\geq 0} g_n'$ sont donc uniformément convergentes sur $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $a > 0$, les sommes F et G sont dérivables sur $]-a, a[$ et que :

$$F'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = G(x) \text{et} G'(x) = \sum_{n\geq 0} g_n'(x) = F(x).$$

Comme cela est vrai pour tout $a > 0$, les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $F' = G$ et $G' = F$.

Exercice 4 *On a :*

$$\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y+3t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x=-y-z \\ -2y-2z-y+3t=0 \\ -y-z-y+z-t=0 \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{l} x=-y-z \\ z=-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}t \\ t=-2y \end{array} \iff \begin{array}{l} x=-y-z \\ z=-\frac{9}{2}y \\ t=-2y \end{array} \iff \begin{array}{l} x=\frac{7}{2}y \\ z=-\frac{9}{2}y \\ t=-2y. \end{array}$$

On voit donc que :

$$F := \text{Vect}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que F est de dimension 1.

Exercice 5 *1. Le polynôme caractéristique de A est :*

$$\begin{aligned} \textit{dét}(A - X\mathrm{I}_3) &= \textit{dét}\begin{pmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 7 & -5-X & 1 \\ 6 & -6 & 3-X \end{pmatrix} \\ &= (3-X)(-5-X)(3-X) - 76 - 6 - 6(-5-X) + 7(3-X) + 6(3-X) \\ &= -X^3 + X^2 + 14X - 24. \end{aligned}$$

2. *On a :*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le vecteur v_1 *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 3*.*

3. *Comme* 3 *est valeur propre, on peut factoriser* $(X-3)$ *dans le polynôme caractéristique* $P_A(X)$ *:*

$$P_A(X) = -(X-3)(X^2+2X-8).$$

Les racines de X^2+2X-8 *sont* 2 *et* -4*. Ce sont les autres valeurs propres de* A*.*

4. *Il y a* 3 *valeurs propres distinctes dans un espace de dimension* 3 *:* $\mathbb{R}^3$*. Les* 3 *sous-espaces propres associés sont donc de dimension* 1*. Le sous-espace propre associé à* 3 *et la droite engendrée par* v_1*.*

On a :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 3x-y+z=2x \\ 7x-5y+z=2y \\ 6x-6y+3z=2z \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 7x-7y+z=0 \\ 6x-6y+z=0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x=y-z \\ 7y-7z-7y+z=0 \\ 6y-6z-6y+z=0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x=y-z \\ z=0. \end{array}$$

Le sous-espace propre associé à 2 *est donc la droite engendrée par* $v_2 := (1,1,0)$*.*

On a :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 3x-y+z=-4x \\ 7x-5y+z=-4y \\ 6x-6y+3z=-4z \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{l} 7x-y+z=0 \\ 7x-y+z=0 \\ 6x-6y+7z=0 \end{array} \iff \begin{array}{l} y=7x+z \\ 6x-42x-6z+7z=0 \end{array} \iff \begin{array}{l} y=43x \\ z=36x. \end{array}$$

Le sous-espace propre associé à -4 *est donc la droite engendrée par* $v_2 := (1,43,36)$*.*

5. *La matrice* A *est diagonalisable car elle a* 3 *valeurs propres distinctes dans un espace de dimension* 3*.*

Exercice 6 1. *La matrice de* f *dans la base* (e_1,e_2) *est :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. (a) *Le polynôme caractéristique de* A *est :*

$$P_A(X) = (3-X)(3-X) - 1 \cdot 1 = (3-X)^2 - 1.$$

Les racines de P_A *sont donc les solutions de* $(3-X)^2 = 1$*, c'est-à-dire* $3 - X = \pm 1$*, c'est-à-dire* $X = 3-1 = 2$ *et* $X = 3+1 = 4$*.*

(b) *On a :*

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 3x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{matrix} \iff x + y = 0.$$

Le vecteur $v_1 = (1, -1)$ *est un vecteur propre associé à* 2*.*
On a :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 3x + y = 4x \\ x + 3y = 4y \end{matrix} \iff x = y.$$

Le vecteur $v_2 = (1, 1)$ *est un vecteur propre associé à* 4*.*

3. (a) *On a* $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   (b) *On a* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. *On commence par rechercher* P^{-1}. *Pour cela on résoud le système :*

$$P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} x + y = X \\ -x + y = Y \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{l} 2y = X + Y \\ 2x = X - Y \end{array} \iff \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y. \end{array}$$

Par conséquent :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$A^n = PA^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

EPCM. Examen final.

Mercredi 20 décembre 2006. Durée 3 heures.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif: 4 points pour chaque exercice.

Exercice 1 (4 pts) *On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.*

1. *Justifier la convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n$.*

2. *Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite (I_n) par*

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

   (a) *En majorant la fonction à intégrer, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.*

   (b) *Montrer que $I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.*

   (c) *En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.*

3. *Pour $n \geq 0$, on pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.*

   (a) *Exprimer r_n en fonction de I_n.*

   (b) *En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :*

$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

   où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.

   (c) *En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} r_n$.*

Exercice 2 (4 pts) *Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. *On cherche tout d'abord à étudier la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ en fonction de α.*

(a) *On suppose $\alpha > 2$. Montrer que la suite* $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 1}$ *ne converge que si* $x = 0$.

(b) *On suppose $\alpha = 2$. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n). Que peut-on dire de la fonction limite f ? Qu'en déduire à propos de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) ?*

(c) *On suppose $\alpha < 2$. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n). Étudier les variations de la fonction f_n. En déduire les valeurs de α pour lesquelles la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.*

2. *On suppose dorénavant que $\alpha < 2$. On cherche maintenant à étudier la série* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *en fonction de α.*

   (a) *Déterminer les $\alpha < 2$ pour lesquels la série* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

   (b) *En déduire que pour $\alpha < 0$, la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par* $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$, *est continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3 (4 pts) *On se propose de calculer l'intégrale généralisée suivante :*

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

1. *Soit $a > 0$. Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_0^a \ln x\,\mathrm{d}x$ *converge et calculer sa valeur.*

2. *Montrer que l'intégrale qui définit I est convergente.*

3. *En utilisant la formule* $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, *montrer que*

$$I = \frac{\pi\ln 2}{2} + 2\int_0^{\pi/4} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

4. *À l'aide du changement de variable* $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, *donner une autre expression de* $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ *et en déduire la valeur de I.*

Exercice 4 (4 pts) *On considère la fraction rationnelle*

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+2x)}.$$

1. *Décomposer f en éléments simples.*
2. *En déduire le développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0.*
3. *Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?*

Exercice 5 (4 pts) *On dit qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement une matrice M) est* **nilpotent** *(respectivement* **nilpotente***) s'il existe un entier k tel que $f^k = 0$ (respectivement $M^k = 0$).*

1. *On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.*
   (a) *Montrer que A est nilpotente.*
   (b) *Déterminer la dimension du noyau de A.*
   (c) *Calculer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ?*
2. *Soit f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.*
   (a) *Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.*
   (b) *Écrire la matrice de f dans cette base.*

Exercice 6 (4 pts) *On considère E l'espace des fonctions continues $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$, on pose*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.*

On note $\| \cdot \|$ la norme associée :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

2. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on note c_n et s_n les fonctions de E définies par*

$$c_n(x) = \cos(nx) \quad \textit{et} \quad s_n(x) = \sin(nx).$$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la famille $\{c_0, s_1, c_1, \cdots, s_n, c_n\}$ est orthonormée.

Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et si $f \in E$, la distance de f à F est

$$d(f, F) = \inf_{g \in F} \|f - g\|.$$

3. *On pose*

$$E_0 = \mathrm{Vect}\{c_0\} \quad \textit{et} \quad E_1 = \mathrm{Vect}\{c_0, s_1, c_1\}.$$

   Soit $f \in E$ la fonction définie par $f(t) = t$.

   (a) *Calculer la projection orthogonale de f sur E_0 (notée $p_{E_0}(f)$) puis de f sur E_1 (notée $p_{E_1}(f)$).*

   (b) *Déterminer $d(f, E_0)$ et $d(f, E_1)$.*

   (c) *Déterminer*

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} \big(x - a - b\cos x - c\sin x\big)^2 \, \mathrm{d}x.$$