

EPCM. Examen final.
Mercredi 20 décembre 2006. Durée 3 heures.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barème indicatif: 4 points pour chaque exercice.

Exercice 1 (4 pts) On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

1. Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite (I_n) par

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

(a) En majorant la fonction à intégrer par une autre fonction, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

(b) Montrer que $I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

(Indication : On pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.)

(c) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

3. Pour $n \geq 0$, on pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

(a) Exprimer r_n en fonction de I_n .

(b) En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} r_n$.

Exercice 2 (4 pts) Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ avec $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1 + n^2 x^2} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. On cherche tout d'abord à étudier la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ en fonction de α .
 - (a) On suppose $\alpha > 2$. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ ne converge que si $x = 0$.
 - (b) On suppose $\alpha = 2$. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) . Que peut-on dire de la fonction limite f ? Qu'en déduire à propos de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) ?
 - (c) On suppose $\alpha < 2$. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) . Étudier les variations de la fonction f_n . En déduire les valeurs de α pour lesquelles la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
2. On suppose dorénavant que $\alpha < 2$. On cherche maintenant à étudier la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ en fonction de α .
 - (a) Déterminer les valeurs de α pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
 - (b) En déduire que pour $\alpha < 0$, la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $F(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$, est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (4 pts) On se propose de calculer l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx.$$

1. Soit $a > 0$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \left| \ln\left(\frac{2x}{\pi}\right) \right| dx$ converge lorsque a tend vers 0 et calculer sa valeur.
2. Par une majoration de $|\ln(\sin x)|$, montrer que l'intégrale qui définit I est convergente.

3. En utilisant la formule $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, montrer que

$$I = \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\pi/4} \ln(\sin x) dx + 2 \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx.$$

4. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, donner une autre expression de $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx$ et en déduire la valeur de I .

Exercice 4 (4 pts) On considère la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+2x)}.$$

1. Décomposer f en éléments simples.
2. En déduire le développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0.
3. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

Exercice 5 (4 pts) On dit qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement une matrice M) est **nilpotent** (respectivement **nilpotente**) s'il existe un entier k tel que $f^k = 0$ (respectivement $M^k = 0$).

1. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Montrer que A est nilpotente.
 - (b) Déterminer la dimension du noyau de A .
 - (c) Calculer le polynôme caractéristique de A . A est-elle diagonalisable ?
2. Soit f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
- (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 6 (4 pts) On considère E l'espace des fonctions continues $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) dt.$$

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E .

-.5cm On note $\|\cdot\|$ la norme associée :

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note c_n et s_n les fonctions de E définies par

$$c_n(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad s_n(x) = \sin(nx).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la famille $\{c_0, s_1, c_1, \dots, s_n, c_n\}$ est orthonormée.

-.5cm Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et si $f \in E$, la distance de f à F est définie par

$$d(f, F) = \inf_{g \in F} \|f - g\|.$$

3. On pose

$$E_0 = \text{Vect}\{c_0\} \quad \text{et} \quad E_1 = \text{Vect}\{c_0, s_1, c_1\}.$$

Soit $f \in E$ la fonction définie par $f(t) = t$.

(a) Calculer la projection orthogonale de f sur E_0 (notée $p_{E_0}(f)$) puis de f sur E_1 (notée $p_{E_1}(f)$).

(b) Déterminer $d(f, E_0)$ et $d(f, E_1)$.

(c) Déterminer

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b \cos x - c \sin x)^2 dx.$$