Suites et séries numériques

Exercice 0
Donner les développements limités à l'ordre n en 0 des fonctions suivantes :

$a)\quad \dfrac{1}{1-x} \quad b)\quad \ln(1-x) \quad c)\quad \ln(1+x^2) \quad d)\quad \sinh x$

Donner les développements limités à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

$e)\quad {}^5\sqrt{1+x} \quad f)\quad (1-x)^{\frac{1}{x}} \quad g)\quad \ln(1+\sin x) \quad h)\frac{1}{\cos(x)}$

Exercice 1
Calculer les limites des suites suivantes :

$a)\quad \cosh(\dfrac{a^n}{\sqrt{n}}) \qquad b)\quad \ln(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}) \qquad c)\quad \dfrac{1}{2^n}(1+\dfrac{1}{n})^n$

$d)\quad {}^6\sqrt{n^6+2n^4} - {}^3\sqrt{n^3+n} \qquad e)\quad \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})+e^{-n^2}}{\ln(1+\frac{2}{n})} \qquad f)\quad \dfrac{(n+1)^2}{(n^2+1)^3}$

$g)\quad \tan(\dfrac{1}{2^n}) \qquad h)\quad \dfrac{n!}{n^n+2n+\ln(n)} \qquad i)\quad \dfrac{n^{\ln n}}{(n)^n}$

indication : Pensez à calculer un équivalent.

Exercice 2
a) Déterminer pour chaque suite de l'exercice précédent si c'est le terme général d'une série convergente ou non.
b) En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$1)\quad \dfrac{n^a}{a^n}, a \in \mathbb{R}_+^* \quad 2)\quad \dfrac{n!}{a^n}, a \in \mathbb{R}_+^* \quad 3)\quad (\dfrac{1}{n+1})^n \quad 4)\quad \dfrac{n}{3^n}$

Exercice 3
Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^n u_k$ en décomposant u_n en éléments simples. En déduire que cette série converge et donner la valeur de sa somme. De la même manière, démontrer que les séries de terme général $v_n = \frac{n+2}{n(n^2-1)}$ $(n \geq 2)$ et $w_n = \ln(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})$ convergent et calculer leur somme.

Exercice 4
Soit $z_n = \dfrac{n^3}{n!}$, $n \geq 0$.
a) Déterminer les réels a, b, c tels que $z_n = \dfrac{a}{(n-3)!} + \dfrac{b}{(n-2)!} + \dfrac{c}{(n-1)!}$.
b) En déduire que la série de terme général z_n converge et calculer sa somme.

Exercice 5
Soient les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel $n, u_n \geq 0$ et $v_n = \dfrac{u_n}{\alpha + u_n}$, $\alpha > 0$. Démontrer que les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Exercice 6
On considère les suites équivalentes $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $\sum v_n$ est convergente. En faisant un développement limité de u_n, montrer que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 7
On rappelle le résultat suivant pour deux séries $\sum u_k$, $\sum v_k$ à termes positifs équivalents :
◦ Si les séries divergent, leurs sommes partielles de rang N, S_N et S'_N, sont équivalentes.
◦ Si les séries convergent, les restes partiels de rang N, R_N et R'_N, sont équivalents.
a) Démontrer que la série de terme général $u_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$, $n > 0$ converge puis donner un équivalent de son reste R_N.
b) Démontrer que la série de terme général $v_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n\ln(n)}$, $n > 0$ diverge puis donner un équivalent de la somme partielle S_N.

Exercice 8 : Séries de Bertrand
Soit $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, $n \geq 2$, où α est un réel différent de 1 et β est un réel quelconque.
a) Montrer que si $\alpha > 1$ la série converge et si $\alpha < 1$, elle diverge.
b) Donner la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n}) + ne^{-\frac{1}{n}}}{n^\beta \ln n}$ en fonction du réel β.

Exercice 9
Etudier la convergence absolue et la convergence des séries de terme général suivant :

a) $(-1)^n(\tan(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) - \sin(\dfrac{1}{\sqrt{n}}))$	*b*) $(1 - \dfrac{n}{\ln n})^{-n}$
c) $\ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$	*d*) $\dfrac{(-1)^n}{n^n\sqrt{n}}$
e) $\cos n \sin(\dfrac{1}{n^2})$	*f*) $\dfrac{(-1)^n}{n^{(1+n^a)}}, a \in \mathbb{R}$

Exercice 10
a) Montrer que $u_n = (\prod_{k=1}^{n}(1+\dfrac{k}{n^2})) - 1 \geq \sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}$.
b) En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 11
a) Démontrer que le produit de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle même est divergente.
b) Démontrer que le produit de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ par elle-même est convergente.