# Suites et séries numériques

**Exercice 1 & 2** - $a_n = \cosh\left(\frac{a^n}{\sqrt{n}}\right)$ :

Pour $|a| \leq 1$, on a $0 \leq \frac{a^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 quand $n$ augmente, donc, par continuité de la fonction cosh, la suite $(a_n)$ converge vers 1.
Pour $|a| > 1$, on a $\frac{a^n}{\sqrt{n}} \geq \frac{a^n}{n}$. Par croissance comparée, ce minorant tend vers $+\infty$ lorsque $n$ augmente. Or la fonction cosh tend vers l'infini en $+\infty$, la suite $(a_n)$ diverge donc.
Dans les deux cas, la suite ne tend pas vers 0 et la série ne peut donc pas converger.

- $b_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ :

On a $b_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right) \sim \frac{2}{n^2+n-1} \sim \frac{2}{n^2}$. La suite $(b_n)$ converge donc vers 0. De plus, $\frac{2}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente. Or, c'est également un terme de signe constant, on peut donc appliquer le théorème des équivalents et en déduire que la série $\sum b_n$ converge.

- $c_n = \frac{1}{2^n}(1+1/n)^n$ :

On écrit $(1+1/n)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Or, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{n}{n} = 1$ converge vers 1, donc, par continuité de la fonction exponentielle, $(1+1/n)^n$ tend vers $e$. On a donc $c_n \sim \frac{e}{2^n}$. La suite $(c_n)$ converge donc vers 0. De plus, puisque $\frac{e}{2^n}$ est de signe constant, les séries $\sum c_n$ et $e\sum \frac{1}{2^n}$ sont de même nature d'après le théorème des équivalents, càd convergente.

- $d_n = \sqrt[6]{n^6+2n^4} - \sqrt[3]{n^3+n}$ :

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{n^6+2n^4} &= n\sqrt[6]{1+\frac{2}{n^2}} \\
&= n\left(1+\frac{1}{3n^2} - \frac{5}{18n^4} + o(\frac{1}{n^4})\right) \\
&= n + \frac{1}{3n} - \frac{5}{18n^3} + o(\frac{1}{n^3}),
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^3+n} &= n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} \\
&= n\left(1+\frac{1}{3n^2} - \frac{1}{9n^4} + o(\frac{1}{n^4})\right) \\
&= n + \frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^3} + o(\frac{1}{n^3}).
\end{aligned}$$

Au final, on a donc $d_n = -\frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \sim -\frac{1}{6n^3}$, et la suite converge vers 0. Le signe de $-\frac{1}{6n^3}$ étant constant, le théorème des équivalents s'applique et la série $\sum d_n$ est de même nature que $\sum -\frac{1}{6n^3}$, à savoir convergente d'après le critère de Riemann.

- $e_n = \frac{\ln(1+1/n)+e^{-n^2}}{\ln(1+2/n)}$ :

Pour commencer, on a $\ln(1+1/n) \sim \frac{1}{n}$ et $\ln(1+2/n) \sim \frac{2}{n}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n^2} = \lim\limits_{m\to+\infty} \sqrt{m}e^{-m} = 0$ avec le changement de variable $m = n^2$. De fait, $e^{n^2} = o(\ln(1+1/n))$ et on a $e_n \sim \frac{1}{2}$. La suite $(e_n)$ converge donc vers $\frac{1}{2} \neq 0$ et la série est divergente.

- $f_n = \frac{(n+1)^2}{(n^2+1)^3}$ :

On a $f_n = \frac{1}{n^4}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(1+\frac{1}{n^2})^3} \sim \frac{1}{n^4}$. La suite $(f_n)$ converge donc vers 0. De plus, $\frac{1}{n^4}$ est de signe constant.

D'après le théorème des équivalents, les séries $\sum f_n$ et $\sum \frac{1}{n^4}$ sont de même nature, à savoir convergente en vertu du critère de Riemann.

- $g_n = \tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$ :
On a, d'une part, $\tan\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$ et, d'autre part, $\frac{1}{2^n} > 0$. Le théorème des équivalents affirme donc que $\sum g_n$ est de même nature que la série géométrique convergente $\sum \frac{1}{2^n}$.

- $h_n = \frac{n!}{n^n+2n+\ln(n)}$ :
On a clairement $0 \leq h_n \leq \frac{n!}{n^n}$. Or, puisque $\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = (1-1/n)^n$ tend vers $\frac{1}{e}$ lorsque $n$ augmente, le critére de d'Alembert permet d'affirmer que $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum h_n$ converge. Notamment, la suite $(h_n)$ tend vers 0.

- $i_n = \frac{n^{\ln(n)}}{n^n}$ : On a $0 \leq i_n = \frac{1}{n^{n-\ln(n)}} \leq \frac{1}{n^2}$ pour $n$ assez grand. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum i_n$ converge. Notamment, la suite $(i_n)$ tend vers 0.

**Exercice 8.a** - Cas $\alpha > 1$, $\beta \geq 0$ : On a $0 \leq \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge d'après le critère de Riemann. En vertu du théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ converge donc.

- Cas $\alpha > 1$, $\beta < 0$ : Par croissance comparée, on a $(\ln(n))^\beta \leq n^{\frac{\alpha-1}{2}}$ pour $n$ assez grand. Mais alors, $0 \leq \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \leq \frac{1}{n^{\alpha-\frac{\alpha-1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$. Or, $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ et on peut conclure comme précédemment.

- Cas $\alpha < 1$ : Toujours par croissance comparée, on a $(\ln(n))^\beta \leq n^{\frac{1-\alpha}{2}}$ pour $n$ assez grand et donc $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \geq \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ avec $\frac{\alpha+1}{2} < 1$. Là encore, le théorème de comparaison permet de conclure.

**Exercice 9** -$b_n = \left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)^{-n}$ : Ici, prendre la valeur absolue ne change rien car tous les termes sont positifs.
On a $b_n = e^{-n\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)}$. Or $-n\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right) = -\ln(n) - \frac{(\ln(n))^2}{2n} + o\left(\frac{(\ln(n))^2}{2n}\right)$. En passant à l'exponentielle, on obtient $b_n \sim e^{-\ln(n)} = \frac{1}{n}$. La série diverge donc, d'après le théorème des équivalents, tous les termes étant, comme on l'a déjà remarqué, positifs.

-$d_n = \frac{(-1)^n}{n^n\sqrt{n}}$ : Etudions la convergence absolue. On a $0 \leq |d_n| \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 2$. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum d_n$ est absolument convergente, donc convergente.

-$f_n = \frac{(-1)^n}{n^{1+n^a}}$ : Pour $a \geq 0$, on a $0 \leq |f_n| \leq \frac{1}{n^2}$ et le théorème de comparaison permet de conclure à la convergence absolue, donc à la convergence.
Pour $a < 0$, on a $n^a\ln(n)$ qui converge vers 0 quand $n$ augmente, donc $e^{n^a\ln(n)} = n^{n^a}$ qui converge vers 1. Alors, $|f_n|$, qui est évidemment positif, est équivalent à $\frac{1}{n}$ et le théorème des équivalents indique que $\sum |f_n|$ diverge. Il n'y a donc pas convergence absolue.
Essayons, cependant, d'appliquer le critère des séries alternées.
Bien évidemment, la suite $(\frac{1}{n^{1+n^a}})$ est positive et tend vers 0. Montrons, qu'elle est décroissante à partir d'un certain rang. Pour cela, on pose $f(x) = x^{1+x^a} = e^{(1+x^a)\ln(x)}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x} + \frac{a\ln(x)}{x^{-a+1}} + \frac{1}{x^{-a+1}}\right)e^{(1+x^a)\ln(x)} \\ &= x^{x^a}(1+ax^a\ln(x)+x^a) \end{aligned}$$

Or $ax^a\ln(x) + x^a$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers l'infini. A partir d'un certain rang, la signe de $f'$ est donc celui de $\frac{1}{n}x^{1+x^a}.1$ à savoir $+$. A partir d'un certain rang, $(f(n))$ est donc croissante, et $(\frac{1}{n^{1+n^a}})$ décroissante. Le critère des séries alternées s'applique et la série $\sum f_n$ est convergente.