Suites et séries de fonctions

Exercice 1 (Étude de domaine de convergence de suites de fonctions).

Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes sur le domaine I :

- $a_n(x) = \sin(\frac{x}{2^n})$, $I = [-1, 1]$
- $b_n(x) = \sin(\frac{x}{2^n})$, $I = \mathbb{R}$
- $c_n(x) = \frac{1}{1+n \cos(x)}$, $I = [0, \pi]$
- $d_n(x) = xe^{-nx}$, $I = \mathbb{R}_+$
- $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $I =]0, 1]$
- $g_n(x) = n^2(1-x)^n \sin(\frac{\pi}{2}x)$, $I = [0, 2]$

Exercice 2 (Suite de fonctions C^1 convergeant vers la valeur absolue).

Soit la suite $(f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ x & \text{si } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

- (1) Montrer que toutes les fonctions f_n sont C^1 .
- (2) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $(x \mapsto |x|)$.

Exercice 3 (Étude de convergence).

Soit $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

Étudier la convergence simple, puis uniforme sur $\mathbb{R}_+$ et enfin sur $[\alpha, +\infty[$, avec $\alpha > 0$.

Exercice 4 (Convergence de $f_n(x_n)$).

- (1) Soit (f_n) une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f . Soit (x_n) une suite convergeant vers x . Montrer que la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

On définit maintenant la suite $(g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (2) Étudier la convergence simple de la suite (g_n) .
- (3) Étudier la convergence de la suite $(g_n(\frac{1}{n}))$. Que peut-on en conclure sur la convergence uniforme de la suite (g_n) ?

Exercice 5 (Suite de fonctions C^p).

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^p sur un intervalle I telle que $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(p-1)}(x_0)$ convergent pour un $x_0 \in I$ et telle que la suite $f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I . Montrer (f_n) converge uniformément sur I et que la limite est une fonction de classe C^p .

Exercice 6 (Suite de fonctions définies par des intégrales).

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \int_0^x g(t^n)dt$. Étudier la convergence de la suite (f_n) sur $[0, \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$.

Exercice 7 (Non inversion limite-intégrale).

Soit $f_n(x) = n \cos^n(x) \sin(x)$.

- (1) Déterminer la limite simple de la suite (f_n) .

- (2) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t)dt$.

Exercice 8 (Convergence uniforme de polynômes).

Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f .

- (1) En utilisant le critère de Cauchy, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, le polynôme $(P_n - P_{n_0})$ est constant.

On note $u_n = P_n(0) - P_{n_0}(0)$.

- (2) Montrer que la suite u_n converge.
 (3) Montrer que f est un polynôme.

Exercice 9 (Étude de domaine de convergence de séries de fonctions).

Étudier la convergence des séries de fonctions suivantes sur le domaine I :

$$\begin{aligned} - \sum a_n(x) &= \sum \frac{x}{x^2+n^2}, I = \mathbb{R} & - \sum b_n(x) &= \sum e^{-\sqrt{n} \cdot x}, I = [a, +\infty], a > 0 \\ - \sum c_n(x) &= \sum \frac{1}{1+n^2x^2}, I = [1, +\infty[& - \sum d_n(x) &= \sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}, I = \mathbb{R}_+ \\ - \sum f_n(x) &= \sum \frac{\cos(nx)}{n^2}, I = \mathbb{R} & - \sum g_n(x) &= \sum n^a x^n (1-x), I = [0, 1], a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 10 (Un calcul de série numérique).

Soit $u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ et $v_n(x) = (-1)^{n+1} x^{n-1}$.

- (1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$.

La limite, notée f , de cette série est-elle continue sur $] -1, 1[$?

- (2) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$.

- (3) En déduire que la fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et donner une expression simple de f' . En déduire une expression de f sur $] -1, 1[$.

- (4) En majorant le reste $\sum_{n=N}^{\infty} u_n(x)$, montrer que la série converge uniformément sur $[0, 1]$. En déduire que f est continue sur $[0, 1]$.

- (5) Déduire de tout ce qui précède la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 11 (Un équivalent de ζ au voisinage de 1).

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

- (1) Montrer que la série définissant la fonction ζ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. En déduire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
 (2) Montrer que la fonction ζ est C^1 sur $]1, +\infty[$.
 (3) Tracer le graphe de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$.

Soit $a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

- (4) Montrer que la série définissant la fonction a converge uniformément sur $[1, +\infty[$. En déduire que a est continue sur $[1, +\infty[$.

- (5) Montrer que l'on a : $a(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \zeta(x)$.

- (6) En déduire un équivalent de ζ lorsque x tend vers 1^+ .