Equations différentielles

1. Rappels d'analyse

On commence par rappeler des notions de bases sur les deux fonctions fondamentales dans ce cours : l'exponentielle et le logarithme népérien.

1.1. La fonction exponentielle.

$$\begin{array}{rcl} exp = e : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & e^t \end{array}$$

avec $e \approx 2,718\ldots$

Propriétés classiques :
- ${e^{a}}^{b} = {e^{a}}^{b}$
- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $a \leq b \Longleftrightarrow e^a \leq e^b$

Dérivation/intégration : La dérivée de exp est elle-même. Par conséquent, il en est de même pour "la" primitive (à une constante près). Une conséquence des règles classiques de dérivation et intégration : Si $u(t)$ est une fonction de t, on a

$$\begin{array}{rcl} (e^{u(t)})' & = & u'(t)e^{u(t)} \\ \int u'(t)e^{u(t)} & = & e^{u(t)} \quad (+conste) \end{array}$$

Limites : On a

$$\begin{array}{rcl} lim_{t\to-\infty} e^t & = & 0 \\ lim_{t\to+\infty} e^t & = & +\infty \end{array}$$

Graphes : $f(t) = Ke^{at}$ suivant le signe de K et a.

1.2. le logarithme Népérien.

$$\begin{array}{rcl} \ln : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln t \end{array}$$

Propriétés classiques : Si $a > 0$ et $b > 0$,
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
- $a \leq b \Longrightarrow \ln a \leq \ln b$

Dérivation/intégration : Si $u(t)$ est une fonction de t,

$$\begin{aligned}
(\ln t)' &= \frac{1}{t} \\
\big(\ln u(t)\big)' &= \frac{u'(t)}{u(t)} \\
\int \frac{u'(t)}{u(t)} &= \ln\big(u(t)\big) \quad (+conste)
\end{aligned}$$

Limites : On a

$$\begin{aligned}
lim_{t\to 0^+} \ln t &= -\infty \\
lim_{t\to +\infty} \ln t &= +\infty
\end{aligned}$$

Graphe :

1.3. **Relations** $exp/\ln$**.** Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproque l'une de l'autre. Ceci se traduit par :

$$\begin{aligned}
\ln(e^t) &= t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
exp(\ln t) &= t \quad \forall t > 0
\end{aligned}$$

On peut également écrire :

$$\begin{aligned}
\ln a = b &\iff a = e^b \\
\ln a \leq b &\iff a \leq e^b \quad (\text{ si } a > 0)
\end{aligned}$$

Une autre propriété parfois utile : Si $a > 0$, on a

$$a^b = e^{b \ln a}$$

1.4. **Rappel : Etude de fonction.** Etudier rapidement une fonction f consiste en

- déterminer son domaine de définition
- calculer sa dérivée f' sur le domaine sur lequel f est dérivable
- étudier le signe de f'
- dresser le tableau de variation de f : si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur un intervalle alors f est croissante (resp. décroissante) sur cet intervalle
- déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition
- tracer le graphe de f

Remarque : Un point t_0 correspond à un maximum local de f si $f'(t_0) = 0$ et pour t "voisin" de t_0 on a $f'(t) < 0$ si $t > t_0$ et $f'(t) > 0$ si $t < t_0$.

De même, un point t_1 correspond à un minimum local de f si $f'(t_1) = 0$ et pour t "voisin" de t_1 on a $f'(t) > 0$ si $t > t_1$ et $f'(t) < 0$ si $t < t_1$.

2. Equations différentielles linéaires du 1er ordre

Les équations différentielles définissent l'évolution en temps continu. Elles permettent de formaliser des relations entre vitesse d'évolution et position sous forme de modèles dynamiques. Elles interviennet dans diverses branches : biologie, physique, chimie, pharmacocinétique, mécanique, économie, etc...

Les équations les plus simples qu'on rencontre en biologie (mises à part celles qui sont "triviales") sont les **équations linéaires du premier ordre**, c'est-à-dire, celles du type

$$y'(t) + ay(t) = g(t) \quad (E)$$

où $g(t)$ est une fonction de t, en général sympathique (i.e. bien dérivable etc....), et a est une constante non nulle (a peut aussi parfois être une fonction de t, $a(t)$, mais l'équation devient un peu plus difficile à résoudre). On peut associer à (E) une équation différentielle encore plus simple, appelée **équation homogène**, qui s'écrit :

$$y'(t) + ay(t) = 0 \quad (H)$$

En général, la résolution de (E) passe d'abord par la résolution de son équation homogène associée (H).

2.1. **Résolution de l'équation** (H) $y'(t) + ay(t) = 0$ **:** Comme le cas le plus simple est quand $a \neq 0$ est une constante, on va le supposer pour le moment. On considère la fonction $\omega(t) = e^{at}$. Soit $y(t)$ une solution de (H). On définit alors la fonction $z(t) = y(t)\omega(t)$. On sait que $z' = y'\omega + y\omega'$ ce qui donne

$$z'(t) = y'(t)e^{at} + ay(t)e^{at} = 0\,,$$

car y est une solution de (H). Par conséquent, y est de la forme : $y(t) = Ke^{-at}$ où K est une constante.

Réciproquement, il est clair que les fonction du type donné plus haut sont solution de (H). On vient de montrer :

Théorème 2.1. *Si a est une constante, les solutions de (H) sont toutes les fonctions du type*

$$y(t) = Ke^{-at}$$

où K est une constante (calculée, par exemple, par $K = y(0)$).

Remarque : Dans le cas plus général où a est une fonction de t, on peut démontrer exactement de la même manière (en considérant $\omega(t) = e^{\int a(t)dt}$) que les solutions de (H) sont de la forme

$$y(t) = Ke^{-\int a(t)dt}$$

2.2. **Résolution de l'équation** (E) $y'(t) + ay(t) = g(t)$ **:** Ici, on suppose encore que a est une constante non nulle. On suppose que g une fonction de t sympathique (dérivable....) et pas trop compliquée.

La résolution d'une telle équation différentielle se fait en deux étapes :
•◦ On résoud léquation homogène associée (H). Les solutions de (H), qu'on note par exemple $z(t)$ sont de la forme $z(t) = Ke^{-at}$.
•• On trouve une solution particuli'ere de (E), c'est-à-dire une certaine fonction $y_{part}(t)$, en général assez simple, qui vérifie (E).
Les solutions générales de (E) sont donc :

$$y(t) = z(t) + y_{part}(t)\,.$$

La première étape ne présente aucun problème. La difficulté est de trouver une solution particulière. Lorsque la fonction g est compliqueée, cela devient très difficile. L'idée pour trouver y_{part} est de chercher une fonction qui présente les mêmes caractéristiques que $g(t)$:

si $g(t)$ est un polynôme, on cherche y_{part} sous la forme d'un polynôme de même degré

si $g(t)$ est du type $p(t)e^{ut}$, où $p(t)$ est un polynôme, on cherche une solution particulière du même type avec un polynôme de même degré que $p(t)$

etc.......

Exemples : Trouver une solution particulière de (E) $y'(t) + 2y(t) = g(t)$ avec

a) $g(t) = 5$: on cherche une solution particulière sous la forme d'une constante $y_{part}(t) = \lambda$ pour tout t ($\lambda \in \mathbb{R}$). On trouve $\lambda = 5/2$.

b) $g(t) = 3t+1$: on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 $y_{part}(t) = \alpha t + \beta$. En identifiant on obtient $2\alpha = 3$ et $\alpha + 2\beta = 1$, ce qui donne $\alpha = 3/2$ et $\beta = -1/4$.

c) $g(t) = t^2 e^{-t}$: on cherche une solution particulière sous la forme $y_{part} = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)e^{-t}$. En identifiant, on obtient $\alpha = 1$, $\beta = -2$ et $\gamma = 2$.

Méthode de la variation de la constante : Lorsque la fonction g est "compliquée", il devient parfois difficile de trouver une solution particulière de l'équation. On peut alors utiliser la méthode dite *de la variation de la constante*. Le principe est le suivant :

On a résolu l'équation homogène (H) dont les solution sont $z(t) = Ke^{-at}$ où K est une constante. On cherche alors les solutions de (E) sous la forme $y(t) = K(t)e^{-at}$ où maintenant, K représente une fonction de t et non plus une constante. On écrit alors que y est une solution de (E) ssi $y'(t) + ay(t) = g(t)$, ce qui donne

$$K'(t)e^{-at} - aK(t)e^{-at} + aK(t)e^{-at} = g(t)\,.$$

La fonction K est donc déterminée par

$$K'(t) = g(t)e^{at}\,.$$

Exercice : Utiliser cette méthode pour résoudre les equations différentielles données dans les exemples plus haut.

3. Utilisation en biologie

Les équation différentielles interviennent par exemple pour modéliser l'évolution d'un système au cours du temps. On peut ainsi utiliser les outils mathématiques abstraits pour donner des prédictions. La difficulté est bien entendu de trouver une bonne modélisation du système que l'on veut étudier.

Quelques principes : On suppose que $N = N(t)$ désigne la quantité (ou la concentration) d'une substance ou bien le nombre d'individus dans une population, etc.... On veut savoir comment évolue N au cours du temps et donc, étudier les variations de N.

Pour une petite variation de temps Δt on observe (en mesurant) une variation ΔN (en gros, on a $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$). Si on permet à Δt de prendre des valeurs arbitrairement petites, on obtient

$$lim_{t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t} = N'(t)\,.$$

Bien entendu, $N'(t)$ représente la **vitesse** d'évolution de N.

Des exemples d'application :

– développement d'un organisme, d'une culture de microbes, de bactéries
– évolution d'une population animale ou humaine
– élimination de médicaments

Exemple 1 : Elimination d'un médicament

On note $Q(t)$ la quantité d'un médicament (ou tout simplement un produit) dans le sang au temps t, quantité que l'on souhaite étudier. On part de l'hypothèse

Pendant un petit intervalle de temps Δt, la quantité de médicament éliminée ΔQ est proportionnelle à Δt et la substance présente dans le sang.

Ceci se traduit mathématiquement par

$$\Delta Q = -k \Delta t Q$$

où k est une constante positive (le signe $-$ traduit le fait que le produit est **éliminé**). En faisant tendre Δt vers 0, on obtient l'équation différentielle

$$Q'(t) = -kQ(t)$$

ce qui donne $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ où Q_0 est une constante positive qui désigne la quantité de médicament présente dans le sang au temps $t = 0$.

Exemple 2 : Evolution d'une population

On note $N(t)$ le nombre d'individus (par exemple des humains habitants un certain pays) à l'instant t. L'idée la plus naturelle est la suivante (équation de conservation pour la population) :

$$\frac{dN}{dt} = \text{naissance} - \text{morts} + \text{migrations}\,.$$

Il faut modéliser le second membre de cette équation. L'approche due à Malthus en 1798 est la suivante :

– on suppose qu'il n'y a pas de migration
– on suppose que le nombre de naissances et le nombre de morts sont pproportionnels à N

On obtient l'équation

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN$$

où b et d sont des constantes positives. D'où $N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$. On peut alors faire deux observations :

Si $b > d$ alors la population croît exponentiellement avec $lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$.

Si $b < d$ alors la population meurt.

En général il est peu probable qu'une population tende vraiment vers $+\infty$. Pour rendre compte vraiment de l'évolution d'une population, il faut tenir compte du milieu dans lequel elle évolue. Apparaissent alors des **facteurs limitants** : la quantité de nourriture disponible (relative à la population), les conditions climatiques, etc....

Pour améliorer le modèle de Malthus, Verhulst proposa (vers 1840) un modèle un peu plus compliqué qui *s'auto-limite* pour empêcher la population de grossir exponentiellement vers l'infini :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\big(1 - \frac{N}{K}\big)$$

où r et K sont des constantes positives. Il n'est pas excessivement difficile de prouver que les solutions de cette équation sont de la forme

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

avec $N_0 = N(0)$. On a alors $lim_{t \to +\infty} N(t) = K$. La constante K est donc la valeurs limite qu'atteindra la population si on la laisse évoluer. Pratiquement, il y a grosso modo deux cas de figure : $N_0 > K$ et $N_0 < K$. On a les graphes suivants :

Problème : Validité d'un tel modèle dans la pratique ?