Université de Toulon et du Var
U.F.R. Sciences et Techniques

Thèse de Doctorat

spécialité
Mathématiques appliquées

présentée et soutenue publiquement par
Benoît Saussol
en Juillet 1998

pour obtenir le grade de
Docteur de l'université de Toulon et du Var

sujet de thèse
Etude statistique de systèmes dynamiques dilatants

rapporteurs
Viviane Baladi
Pierre Collet

membres du Jury
Sébastien Ferenczi
Carlangelo Liverani
Claude-Alain Pillet
Mark Pollicott
Bernard Schmitt
Sandro Vaienti *(Directeur)*

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude à Sandro Vaienti, qui a dirigé cette thèse. Grâce à ces incessants conseils et son inaltérable motivation cette formation par et pour à la recherche a été des plus passionantes.

Je remercie Viviane Baladi et Pierre Collet qui ont eu la lourde tâche de rapporter ce travail.

Mes remerciements vont aussi a Carlangelo Liverani pour sa participation au jury, et surtout pour d'innombrables échanges durant ces trois années.

Je remercie également Sébastien Ferenczi, Claude-Alain Pillet, Mark Pollicott et Bernard Schmitt pour l'honneur qu'ils me font en jugeant cett thèse.

La préparation n'aurait pas été aussi agréable sans la présence de Jean-René Chazottes, Bastien Fernandez et Vincent Penné ainsi que les nombreux autres thésards du CPT.

Ma reconnaissance va aussi aux personnels administratifs du Centre de Physique Théorique et du l'UFR sciences de l'université de Toulon et du Var.

Finalement, je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents, pour m'avoir toujours donné les moyens de mener à bien mes études.

Résumé

Cette thèse traite de deux aspects fondamentaux des systèmes dynamiques : la théorie ergodique et le côté dynamique différentiable, en un certain sens plus concret, car plus proche des modèles physiques. D'un point de vue résolument pragmatique, on s'est efforcé, autant que cela était possible, de donner non seulement des résultats asymptotiques, mais aussi des estimations à temps (ou taille) fini.

Dans un premier temps, on passe en revue certaines propriétés statistiques et caractéristiques métriques des systèmes dynamiques. Ensuite, on s'intéresse au pendant dynamique des théorèmes usuels de probabilités, comme la limite centrale. En particulier on montre que dans de nombreux cas, le temps que met le système pour revenir dans un voisinage de son état initial suit pratiquement une loi de Poisson, l'erreur commise étant fonction de la taille du voisinage et des propriétés chaotiques du système considéré.

Dans une seconde partie, on étudie des systèmes dynamiques différentiables de trois types : applications dilatantes de l'intervalle avec une infinité de branches de monotonie, applications de l'intervalle intermittentes (avec un point fixe neutre) et finalement des endomorphismes dilatants avec singularités en dimension quelconque. On établira pour ces systèmes l'existence de mesures SRB (et même d'autres états d'équilibre dans le premier cas), ainsi qu'une borne constructive sur le taux de décroissance des corrélations.

Table des matières

Introduction

On s'intéresse aux aspects statistiques de certains systèmes dynamiques à temps discret. Bien que tout à fait déterministe, ce type de système est mieux décrit de façon probabiliste. Dans les premiers chapitres, on étudiera de manière abstraite des systèmes dynamiques mesurables. Puis on considèrera le cas de systèmes ayant des structures plus fortes, dilatants par morceaux. Les endomorphismes réguliers uniformément dilatants sont bien compris, mais dès que l'on introduit des singularités ou bien une dilatation non uniforme, les problèmes sont beaucoup plus délicats.

Dans le premier chapitre, nous rappelerons des résultats plus ou moins classiques de théorie ergodique, dans le cadre général des dynamiques mesurables. L'existence des mesures invariantes ainsi que leurs propriétés seront envisagées. On s'attardera en particulier sur les propriétés de récurrence. On introduira aussi différentes notions de chaos et de complexité bien connues.

Au second chapitre on introduit l'opérateur de Perron-Frobenius (ou de transfert). On verra en quoi cet opérateur peut être un outil puissant pour résoudre les problèmes que l'on se pose. Les questions relatives aux mesures conformes seront posées dans le langage de l'opérateur de transfert.

Dans un troisième chapitre, on regardera la contrepartie dynamique de certains résultats classiques de probabilités. On considère en particulier les propriétés des temps de retour dans des petits ensembles. En restant dans un cadre général, on donnera des estimations constructives sur les différences entre (a) la distribution du temps de premier retour et la loi exponentielle (Théorème 3.3) (b) la distribution du nombre de visites dans un ensemble et la distribution de Poisson (Théorème 3.6).

Au chapitre 4, on trouvera par une méthode originale des résultats spectraux pour des applications monotones par morceaux sur des espaces non nécessairement compacts (Théorème 4.1). Avec une hypothèse additionnelle, on montrera l'existence et l'unicité des états d'équilibre pour ces systèmes (Théorèmes 4.2 et 4.3).

Dans le chapitre 5 on étudie les propriétés statistiques d'une famille d'applications de l'intervalle possédant un point fixe neutre. Pour ce type de systèmes dynamiques, l'approche spectrale directe ne donne rien, on utilisera une méthode perturbative pour estimer le taux de décroissance des corrélations. On pourra alors grâce aux résultats du chapitre 3 mener de façon complète l'étude des temps de retour (Théorèmes 5.1 et 5.2). On obtiendra une majoration des erreurs entre les lois limites et celles à taille finie en fonction du paramètre de l'application.

Au chapitre 6 la construction des mesures SRB est faite pour des applications dilatantes par morceaux de $\mathbb{R}^N$. Pour ce type d'applications uniformément dilatantes, le problème vient des singularités. Le Théorème 6.2 assure l'existence de telles mesures et aussi de fortes propriétés chaotiques, sous des hypothèses assez peu contraignantes pour ce type de systèmes. Là encore la méthode du chapitre 4 nous donnera une estimation constructive très précise sur le taux de décroissance des corrélations (Théorème 6.9). On pourra aussi établir les lois limites des temps de retour avec une estimation de la vitesse de convergence (Théorème 6.16).

L'annexe consiste en un premier temps en une revue des propriétés des espaces ordonnés utilisées tout au long de ce travail; topologie des intervalles dans les espaces totalement ordonnés et métriques projectives de Hilbert-Birkhoff sur les espaces vectoriels ordonnés. Pour terminer, on établira quelques propriétés d'analyse fonctionnelle d'un espace du type "Hölder en moyenne". Ces propriétés seront essentielles pour mener à bien l'étude des applications avec singularités considérées au chapitre 6.

Chapitre 1

Théorie Ergodique

1.1 Mesures invariantes

Nous verrons dans ce chapitre des notions qui permettent de comprendre le comportement (asymptotique) des systèmes dynamiques.

On considère le système dynamique mesurable suivant $(X, \mathcal{B}, T)$, où $(X, \mathcal{B})$ est un espace mesurable et T un endomorphisme mesurable de X.

1.1.1 Quelques définitions

Définissons tout d'abord la notion fondamentale en théorie des systèmes dynamiques mesurables, à savoir les mesures invariantes. Au travers des ensembles de mesure nulle, celles-ci permettent d'écarter certains points de l'espace X. Elles permettent donc de se focaliser sur des ensembles d'orbites particulières.

Définition 1.1. *Soit μ un mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$. On dira que μ est T-invariante lorsque pour tout mesurable $A \subset X$,*

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A).$$

Notation. *Lorsque μ est une mesure T invariante, on appellera le triplet (X, T, μ) un système dynamique.*

On dira qu'un mesurable $Y \subset X$ est de mesure pleine lorsque $\mu(Y) = 1$.

On a aussi une caractérisation en terme d'observables de l'invariance de la mesure

Propriété 1.1. *Soit μ un mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$. μ est T-invariante si et seulement si, pour toute fonction réelle $\Psi \in L^1(X, \mu)$ on a*

$$\int_X \Psi \circ T \, d\mu = \int_X \Psi \, d\mu.$$

Cette caractérisation des mesures invariantes nous dit que quel que soit l'observable Ψ d'espérance finie, sa moyenne ne dépend plus du temps. C'est à dire que la mesure invariante est concentrée sur des points qui ne sont pas "transients". Du point de vue des moyennes d'ensemble, le régime asymptotique est atteint.

Différentes mesures invariantes permettent de distinguer différents régimes de la dynamique. C'est aussi une façon de sélectionner certaines conditions initiales.

Définition 1.2. *Soit $A \subset X$. On dira que A est invariant si et seulement si $T^{-1}A = A$. De même, lorsque A est mesurable, on dira qu'il est invariant modulo zéro si et seulement si $\mu(T^{-1}A \cap A) = 0$.*

Classer les différentes orbites de notre système revient en fait à trouver des ensembles invariants sur lesquels la dynamique est semblable. Nous allons concrétiser cette notion grâce à la définition suivante

Définition 1.3. *Soit (X, T, μ) un système dynamique. On dira que la mesure μ est ergodique si les seuls ensembles invariants modulo zéro sont les ensembles de mesure 0 ou 1.*

Les mesures ergodiques sont donc les mesures de probabilité qui se concentrent sur des ensembles que l'on ne peut plus subdiviser.

En fait, toute mesure invariante est une combinaison convexe de mesures ergodiques (voir [KH95]).

Définition 1.4. *Deux systèmes dynamiques (X_1, T_1, μ_1) et (X_2, T_2, μ_2) sont conjugués lorsqu'existent deux sous-ensembles mesurables de mesure pleine $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$, $\mu_1(Y_1) = \mu_2(Y_2) = 1$, et une bijection bimesurable $\Psi : Y_1 \to Y_2$, telle que*

$$\Psi \circ T_1 = T_2 \circ \Psi.$$

et pour tout ensemble mesurable $A \subset Y_1$,

$$\mu_1(A) = \mu_2(\Psi(A)).$$

La relation de conjugaison est bien évidemment une relation d'équivalence, ce qui permet de définir des classes de systèmes dynamiques. On appellera invariant métrique toute quantité qui ne dépend pas du représentant que l'on choisit dans une classe d'équivalence. Notons que l'ergodicité est un invariant métrique.

Il serait vain de parler de mesures invariantes si l'on n'avait pas d'exemples où celles-ci existent, voyons donc quelques exemples :

1.1.2 Existence de mesures invariantes

Exemple 1.1.1. *Supposons qu'il existe un point $x \in X$ périodique, de période p, c'est-à-dire que p est le plus petit entier naturel tel que $T^p(x) = x$. Alors la mesure μ définie par*

$$\mu = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{T^i x},$$

est invariante et ergodique.

Un deuxième exemple est donné par le Théorème de Bogoliubov-Krylov [KH95].

Exemple 1.1.2. *Toute endomorphisme continu d'un espace métrique compact X possède au moins une mesure borélienne invariante et ergodique.*

Quelquefois X possède une mesure particulière, comme par exemple la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, ou le volume Riemannien sur une variété Riemannienne. Il peut être intéressant d'avoir un critère permettant de dire si oui ou non il existe une mesure invariante absolument continue par rapport à une mesure donnée. C'est l'objet du Théorème de Straube [Str81] :

Théorème 1.1 (Straube). *Soit (X, B, m) un espace de probabilité, et T une application non singulière pour m. L'existence d'une mesure invariante absolument continue par rapport à m est équivalente à la proposition suivante :*

$$\exists \gamma < 1, \exists \delta > 0, \forall E, m(E) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} m(T^{-n}E) \leq \gamma.$$

Un tel critère n'est toutefois pas souvent exploitable directement. Nous verrons par la suite comment construire de telles mesures dans des cas concrets. La démonstration que l'on donne, simplifiée par rapport à la preuve originale de Straube, en suit les grandes lignes.

Notation. *On dira qu'un endomorphisme K d'un espace métrique (E, d) est une contraction lorsqu'il existe une constante $\rho \leq 1$ telle que pour tous les $u, v \in E$, $d(Ku, Kv) \leq \rho d(u, v)$. Lorsque E est un espace vectoriel normé, K est une contraction si $\|K\| \leq \rho$. Quand $\rho < 1$, on parle de contraction stricte.*

Définition 1.5. *On dira qu'un endomorphisme mesurable T d'un espace de probabilité (X, T, m) est non singulier lorsque $Tm \ll m$, c'est-à-dire que pour tout mesurable $E \subset X$, $m(E) = 0 \Longrightarrow m(T^{-1}E) = 0$.*

Preuve. *Montrons pour commencer l'implication :*

Soit μ une probabilité invariante absolument continue par rapport à μ. Soit δ tel que $m(E) < \delta \Longrightarrow \mu(E) < 1/2$. Alors on peut prendre $\gamma = 1 - \delta$. En effet, supposons qu'il existe un ensemble $E \in \mathcal{B}$ avec $m(E) < \delta$ et $m(T^{-n}E) > \gamma$. Alors

$m(T^{-n}E^c) < \delta$ donc $\mu(E^c) = \mu(T^{-n}E^c) < 1/2$. Or $\mu(E) < 1/2$, ce qui contredit $\mu(X) = 1$.

Voyons maintenant la réciproque :

T étant non singulière, $f \to f \circ T$ est une contraction sur L^∞. On peut donc définir sur L^∞ la forme linéaire positive

$$m_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int f \circ T^k dm.$$

Clairement m_n est dans la boule unité du dual de L^∞, qui est compacte pour la topologie $*$-faible (d'après Banach-Alaoglu-Bourbaki, [DS88]) , ainsi la suite possède un point d'accumulation $p \in (L^\infty_m)^*$. Il vient alors que pour tout $f \in L^\infty$, $(p(f), p(f \circ T))$ est aussi un point d'accumulation de $(m_n(f), m_n(f \circ T)) \subset \mathbb{R}^2$, or $m_n(f)$ et $m_n(f \circ T)$ diffèrent au plus de $\|f\|_\infty/n$, donc $p(f) = p(f \circ T)$. D'autre part, T étant non-singulière, pour tout mesurable E tel que $m(E) = 0$, on a $m_n(\mathbb{1}_E) = 0$ et donc $p(\mathbb{1}_E) = 0$.

On va maintenant extraire la partie σ-additive de p au moyen de la construction de Carathéodory, qui sera une mesure invariante absolument continue par rapport à m. Il restera à montrer qu'elle n'est pas identiquement nulle.

Par construction, la fonction d'ensemble μ définie par

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} p(a_i) \,\middle|\, \mathbb{1}_A \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i, 0 \le a_i \in L^\infty_m\right\},$$

est une mesure extérieure, σ-additive sur $\mathcal{B}$ qui vérifie pour $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) \le p(\mathbb{1}_A)$, et donc μ est absolument continue par rapport à m. De plus

$$\mathbb{1}_A \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Longrightarrow \mathbb{1}_{T^{-1}A} \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i \circ T.$$

Ceci entraîne $\mu(T^{-1}A) \le \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$, et comme $\mu(X) \le p(1) = 1 < \infty$, μ est en fait une mesure invariante.

Montrons alors que $\mu(X) > 0$.
Soient $0 < \varepsilon < \delta$ et $a_i \in L^\infty$ tels que $\mu(X) \ge \sum_{i=1}^{\infty} p(a_i) - \varepsilon$. On peut supposer sans perte de généralités que $\sum_{i=1}^{N} a_i \le 1$. Il existe N et un ensemble A de mesure $m(A) \ge 1 - \varepsilon$ tels que $\sum_{i=1}^{N} a_i \ge (1-\varepsilon)\mathbb{1}_A$ (puisque la série converge uniformément sur des ensembles de mesure arbitrairement grande). Donc,

$$\mu(X) \ge (1-\varepsilon)p(\mathbb{1}_A) - \varepsilon \ge (1-\varepsilon)(1 - p(\mathbb{1}_{A^c})) - \varepsilon.$$

Or d'après l'hypothèse, $m(A^c) \le \varepsilon \Longrightarrow p(\mathbb{1}_{A^c}) \le \gamma$. ε étant arbitraire, on obtient $\mu(X) \ge 1 - \gamma$. □

1.1.3 Récurrence de Poincaré

Une formidable propriété, surprenante au premier abord, est donnée par le Théorème de Poincaré. En effet, ce dernier affirme que presque tous les points d'un ensemble de mesure positive reviennent dans cet ensemble au bout d'un certain temps. En fait, ils reviennent même une infinité de fois. Cela peut paraître quelque peu contradictoire avec l'irréversibilité des phénomènes physiques, mais en fait, ce n'est pas très étonnant si l'on se rappelle du fait que les mesures invariantes sont concentrées sur des ensembles où le régime asymptotique est atteint.

Théorème 1.2 (Poincaré). *Soit A un sous-ensemble mesurable de X. Presque tous les points de A repassent dans A une infinité de fois.*

$$\mu\left(\left\{x \in A \middle| T^k x \in A \text{ pour une infinité de } k > 0\right\}\right) = \mu(A).$$

Définition 1.6. *Soit A un sous-ensemble de X, on définit le temps de retour de $x \in X$ dans A par*

$$\tau_A(x) = \inf\left\{k \geq 1 \middle| T^k x \in A\right\} \cup \{\infty\}.$$

Le théorème de Poincaré nous dit en particulier que le temps de retour de x dans A est presque partout fini sur A. Un raffinement de cette propriété est donné par le théorème de Kac, qui montre en fait que l'espérance du temps de retour est finie.

Proposition 1.3. *Quel que soit l'ensemble mesurable A on a*

$$\int_A \tau_A(x) d\mu(x) = \mu(\tau_A < \infty).$$

Preuve. Tout d'abord, remarquons que pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$\mu(\tau_A = k) = \mu(A \cap \{\tau_A > k-1\}). \tag{1.1}$$

En effet, comme $\{\tau_A > k\} = T^{-1}(A^c \cap \{\tau_A > k-1\})$ l'invariance de la mesure entraîne que $\mu(\tau_A > k) = \mu(\tau_A > k-1) - \mu(A \cap \{\tau_A > k-1\})$, d'où le résultat.

D'après Poincaré, $\mu(A \cap \{\tau_A = \infty\}) = 0$, par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_A \tau_A(x) d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mu(A \cap \{\tau_A = k\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k\left(\mu(A \cap \{\tau_A > k-1\}) - \mu(A \cap \{\tau_A > k\})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k\left(\mu(\tau_A = k) - \mu(\tau_A = k+1)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\mu(\tau_A \leq n) - n\mu(\tau_A = n+1)\right).
\end{aligned}$$

Comme la différence converge et que $\mu(\tau_A \leq n) \to \mu(\tau_A < \infty)$, il existe r tel que $n\mu(\tau_A = n+1) \to r$. Mais r est forcément nul, puisque $\mu(\tau_A = n+1)$ est sommable. Ce qui conclut la proposition. □

Lorsque μ est une mesure ergodique, la proposition précédente nous donne tout de suite le théorème de Kac:

Théorème 1.4 (Kac). *Soit $\mu_A = \frac{1}{\mu(A)}\mu_{|A}$, la restriction de la mesure ergodique μ au mesurable A de mesure positive, normalisée. On a l'égalité suivante :*

$$\int \tau_A d\mu_A = \frac{1}{\mu(A)}.$$

Preuve. Pour tout mesurable A de mesure positive, l'ensemble $\{\tau_A < \infty\}$ est d'après Poincaré (Théorème 1.2), un ensemble de mesure positive et invariant, donc $\mu(\{\tau_A < \infty\}) = 1$. La proposition 1.3 permet alors de conclure, par définition de $\mu(A)$. □

Ce théorème est valable pour toute mesure ergodique, mais nous verrons au chapitre 3 certains cas où l'on peut en plus donner une estimation asymptotique (lorsque $\mu(A) \to 0$) de la distribution des temps de retour. On établira une loi exponentielle pour les temps de retour, dans un cadre abstrait, ainsi qu'une statistique de Poisson pour le nombre de passages successifs, puis on montrera que tous les systèmes étudiés ici suivent une telle loi.

On peut aussi se demander si l'espérance globale (et non seulement conditionnée à A) du temps de retour est finie, ce n'est pas toujours le cas, mais on a la relation suivante (à notre connaissance, cette observation n'avait pas été faite):

Proposition 1.5. *Quel que soit l'ensemble mesurable A on a*

$$2\int_{\{\tau_A<\infty\}} \tau_A d\mu = \int_A \tau_A^2 d\mu + \int_A \tau_A d\mu_A.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_{\{\tau_A<\infty\}} \tau_A d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\tau_A = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(A \cap \{\tau_A > k-1\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{l=k}^{\infty} \mu(A \cap \{\tau_A = l\}) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(l+1)}{2}\mu(A \cap \{\tau_A = l\}).
\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. □

1.2 Différentes notions de chaos

Nous allons introduire tout d'abord quelques notations. Dans ce qui suit, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de probabilité.

Notation. *Pour une σ-algèbre ξ contenue dans $\mathcal{B}$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_\mu[f|\xi]$ de $f \in L^1_\mu$ sachant ξ est définie de manière unique (à une classe d'équivalence près) par :*
(i) $\mathbb{E}_\mu[f|\xi] \in L^1(X, \xi, \mu)$,
(ii) pour tout $C \in \xi$, $\displaystyle\int_C \mathbb{E}_\mu[f|\xi] d\mu = \int_C f d\mu$.

Définition 1.7. *Etant données deux partitions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ de X, on notera $\mathcal{R} \vee \mathcal{S}$ la partition raffinée :*

$$\mathcal{R} \vee \mathcal{S} = \{ R \cap S | \, R \in \mathcal{R}, S \in \mathcal{S}\}.$$

Soit T un endomorphisme de X. Pour une partition $\mathcal{A}$ on définit la partition dynamique d'ordre n par

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{A} \vee \cdots \vee T^{-n+1}\mathcal{A}.$$

On appelera les éléments de $\mathcal{A}_n$ les cylindres de taille n.

Notation. *Pour une collection d'ensembles $\mathcal{C}$ on notera $\sigma(\mathcal{C})$ la σ-algèbre engendrée par ces ensembles, c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre contenant tous les éléments de $\mathcal{C}$.*

1.2.1 Entropie

L'entropie est une mesure de la complexité d'un système. Pour les applications continues, on parle d'entropie topologique, et l'on regarde alors la complexité de la dynamique dans son ensemble. Ici nous nous intéressons plutôt à la complexité des ensembles de mesure pleine, l'entropie de Kolmogorov-Sinaï. Nous allons donner maintenant quelques définitions et propriétés relatives à l'entropie. Ces résultats sont démontrés, entre autres, dans le livre de parry [Par81].

Définition 1.8. *Soit $\mathcal{A}$ une partition (au plus dénombrable) de X. On note l'entropie de la mesure de probabilité μ par rapport à $\mathcal{A}$, $H_\mu(\mathcal{A})$, définie par*

$$H_\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) \log\left(\mu(A)\right).$$

(avec la convention $0 \log 0 = 0$).

Définition 1.9. *On note $h_\mu(T,\mathcal{A})$ la limite*[1]

$$h_\mu(T,\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{A}_n).$$

Définition 1.10. *On définit l'information conditionnelle de la partition $\mathcal{A}$ connaissant la σ-algèbre ξ par*

$$\mathbb{I}_\mu(\mathcal{A}|\xi) = -\sum_{A\in\mathcal{A}} 1\!\!1_A \log \mathbb{E}_\mu[1\!\!1_A|\xi],$$

et l'entropie conditionnelle (de $\mathcal{A}$ sachant ξ) par

$$H_\mu(\mathcal{A}|\xi) = \int \mathbb{I}_\mu(\mathcal{A}|\xi)\, d\mu.$$

Remarquons que l'information conditionnelle est une fonction positive (l'espérance d'une fonction caractéristique est inférieure à 1), et donc son intégrale est toujours définie (mais pas forcément finie).

Le lien suivant est vérifié (Théorème 2.7 dans [Par81])

Théorème 1.6. *Si l'entropie $H_\mu(\mathcal{A})$ est finie, alors*

$$h_\mu(T,\mathcal{A}) = H_\mu(\mathcal{A}|T^{-1}\mathcal{A}^\infty),$$

où $\mathcal{A}^\infty$ est la σ-algèbre engendrée par l'union des partitions dynamiques, c'est-à-dire $\mathcal{A}^\infty = \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(\mathcal{A}_n))$.

Finalement, l'entropie de T par rapport à μ est égale à

Définition 1.11. *L'entropie de Kolmogorov-Sinaï est définie par*

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{A};H_\mu(\mathcal{A})<\infty} h_\mu(T,\mathcal{A}).$$

Remarquons que l'entropie de Kolmogorov-Sinaï est un *invariant métrique*.

Théorème 1.7 (Sinaï). *Si la partition $\mathcal{A}$ est génératrice, c'est-à-dire que $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathcal{A}$ est une partition triviale (tous ses ensembles sont de mesure nulle), alors*

$$h_\mu(T) = h_\mu(T,\mathcal{A}).$$

1. L'existence de cette limite provient de la sous-additivité de la suite $H_\mu(\mathcal{A}_n)$.

Pour comprendre que l'entropie est une mesure de la complexité du système, il est intéressant d'en voir une caractérisation locale

Théorème 1.8 (Shannon-McMillan-Breiman). *Supposons (X, T, μ) ergodique, et soit ξ une partition de X. Pour presque tout $x \in X$, si l'on dénote par $\xi_n(x)$ l'élément de la partition raffinée $\xi_n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$ qui contient le point x, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(\xi_n(x)) = -h_\mu(T, \xi).$$

On en déduit que presque tous les cylindres ont une mesure semblable, ainsi l'entropie détermine le taux de croissance exponentiel du nombre de cylindres typiques. De ce point de vue, l'entropie détermine la complexité du système, car pour une même expérience (dans ce cas connaître dans quel élément de la partition ξ on se trouve) effectuée pendant un temps n, on a typiquement $\exp(nh_\mu(T, \xi))$ résultats équiprobables possibles.

1.2.2 Types de mélange

Le chaos peut aussi être interprété comme le fait que les corrélations entre deux mesures effectuées à des temps éloignés sont très faibles. Cette notion intuitive peut-être formulée de différentes manières, et nous allons dans cette thèse nous intéresser plus particulièrement aux suivantes, classées par ordre croissant

Définition 1.12. *On dira que le système dynamique (X, T, μ) est faiblement mélangeant ssi quels que soient les sous-ensembles A et B de X,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\mu(T^{-k}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)\right| = 0.$$

Définition 1.13. *On dira que le système dynamique (X, T, μ) est mélangeant ssi quels que soient les sous-ensembles mesurables A et B de X,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Notons que le mélange et le mélange faible sont des invariants métriques.

Propriété 1.2. *Le système dynamique (X, T, μ) est mélangeant ssi quels que soient les observables $f, g \in L^2(X, \mu)$ on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f \circ T^n g \; d\mu = \int_X f \; d\mu \int_X g \; d\mu.$$

D'un point de vue plus pragmatique, on peut se demander à quelle vitesse le mélange s'opère. L'étude de la *décroissance des corrélations* sera faite de façon complète aux chapitres suivants. Pour l'instant, on peut simplement dire que cette vitesse dépend fortement des observables (en général il existe des observables qui se décorrèlent à une vitesse arbitrairement lente). Par la suite, on établira des taux de décroissance exponentiels (Chapitres 4 et 6) et polynômiaux (Chapitre 5) des corrélations pour des observables régulières. Il faut préciser ici que cette régularité n'est plus un invariant métrique, mais seulement invariant par conjugaison plus régulière (du type isotone, Hölder, ou différentiable).

Définition 1.14. *Soit ξ une partition (au plus dénombrable) de X. On dira que ξ est une partition faiblement Bernoulli pour (X, T, μ), ssi il existe une suite $\beta(n)$ de limite nulle telle que pour tout $n, k, l \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{\substack{R \in \xi_k \\ S \in T^{-(n+k)}\xi_l}} |\mu(R \cap S) - \mu(R)\mu(S)| \quad \leq \quad \beta(n).$$

Proposition 1.9. *Si ξ est une partition génératrice et faiblement Bernoulli, alors (X, T, μ) est mélangeant.*

On montrera pour certains systèmes étudiés lors des chapitres suivants la propriété de faible Bernoullicité.

Définition 1.15. *On dira que la partition ξ est uniformément mélangée par $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$, avec une vitesse $\gamma(n)$ si quels que soient k, l, n, $R \in \sigma(\xi_k)$ et $S \in T^{-(n+k)}\sigma(\xi_l)$,*

$$|\mu(R \cap S) - \mu(R)\mu(S)| \leq \gamma(n).$$

Définition 1.16. *$(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ est α-mélangeant pour ξ ssi il existe une suite $\alpha(n)$ de limite nulle telle que pour tout $k, l, n \in \mathbb{N}$, $R \in \xi_k$ et $S \in T^{-(n+k)}\sigma(\xi_l)$ on ait*

$$|\mu(R \cap S) - \mu(R)\mu(S)| \leq \alpha(n)\mu(R).$$

Proposition 1.10. *Si $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ est α-mélangeant pour ξ non triviale, alors les cylindres de ξ sont de mesure exponentiellement petite.*

Preuve. *ξ n'est pas une partition en ensembles de mesure 0 ou 1, donc $\rho_0 = \sup_{C \in \xi} \mu(C) < 1$. Le système étant α mélangeant, il existe n tel que $\rho = \rho_0 + \alpha(n)$ soit strictement inférieur à 1. Étant donné un cylindre $C_m = \bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-j} A_j$ de longueur m, en écrivant $m = kn + p$ avec $p > 0$, il vient*

$$\begin{aligned}
\mu(C_{kn+1}) &\leq \mu(A_0 \cap T^{-n}A_n \cap T^{-2n}A_{2n} \cap \cdots \cap T^{-kn}A_{kn}) \\
&\leq \mu(A_0 \cap T^{-n}A_n \cap T^{-2n}A_{2n} \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}A_{(k-1)n})(\mu(A_{kn}) + \alpha(n)) \\
&\leq \rho\mu(C_{(k-1)n+1}).
\end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate on obtient donc $\mu(C_m) \leq \rho^{-1}\rho^{m/n}$. □

Remarque 1.2.1. *D'après la proposition précédente, tous les cylindres d'une partition α-mélangeante non triviale sont de mesure exponentiellement décroissante. En particulier, cela implique (par le Théorème de Shannon-McMillan-Breiman) que l'entropie métrique de la partition ξ est strictement positive. On a même une borne triviale $h_\mu(T,\xi) \geq \log(\rho^{-1})/n$, avec $\rho = \rho(n)$ et n le plus petit entier tel que $\rho(n) < 1$, où*

$$\rho(n) = \alpha(n) + \sup_{C\in\xi} \mu(C).$$

Une propriété encore plus forte est le φ-mélange. Bien que dans cette thèse les systèmes dynamiques considérés ne seront généralement pas φ-mélangeants, nous allons quand même donner la définition pour des raisons de complétude (voir aussi le chapitre 3).

Définition 1.17. *(X,T,μ) est φ-mélangeant pour ξ ssi il existe une suite $\varphi(n)$ de limite nulle telle que pour tout $k,l,n \in \mathbb{N}$, $R \in \xi_k$ et $S \in T^{-(n+k)}\xi_l$ on ait*

$$|\mu(R\cap S) - \mu(R)\mu(S)| \leq \varphi(n)\mu(R)\mu(S).$$

Il est clair qu'une partition φ-mélangeante est aussi faiblement Bernoulli. L'importance de la propriété de Bernoullicité faible est montrée par le théorème de Friedman et Ornstein [FO70]

Théorème 1.11 (Friedman-Ornstein). *Deux systèmes faiblement Bernoulli sont conjugués si et seulement si ils ont même entropie. En particulier, toute application ayant une partition génératrice faiblement Bernoulli est métriquement isomorphe (conjuguée) à un décalage de Bernoulli.*

Cette dernière propriété est très forte, puisqu'elle nous dit qu'il existe une représentation de notre système dynamique qui est du type *jeux de dé*, donc complètement imprévisible.

Chapitre 2

L'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius

Dans ce chapitre, nous verrons comment l'étude de l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius (ou opérateur de transfert) peut nous aider à construire des mesures invariantes particulières et trouver certaines propriétés statistiques des systèmes dynamiques ainsi engendrés.

Définissons tout d'abord notre cadre de travail, à savoir les applications inversibles par morceaux. Pour une présentation très complète de ces systèmes on peut citer [Hof86, Kel89] où des propriétés d'isomorphismes avec des systèmes symboliques sont établies, et les conséquences qui en découlent analysées.

Définition 2.1. *Soit T un endomorphisme bimesurable de l'espace mesurable X. On appellera T une transformation* inversible par morceaux *ssi il existe une partition mesurable $\mathcal{Z}$ au plus dénombrable de X telle que la restriction de T à chaque $Z \in \mathcal{Z}$ soit injective.*

2.1 Mesures conformes

Définition 2.2. *Étant donné un endomorphisme inversible par morceaux T de X et un potentiel φ (une application de X dans $\mathbb{R}$), le triplet (X, T, φ) sera appelé système pondéré.*

φ est appelé *potentiel* par analogie avec la mécanique statistique. En fait beaucoup de termes de systèmes dynamiques sont issus de la thermodynamique. On renvoie à l'ouvrage de Ruelle [Rue78] pour une présentation du *Formalisme thermodynamique.*

Définition 2.3. *On dira que la mesure de probabilité m sur X est une mesure conforme pour le système pondéré (X, T, φ) ssi pour tout sous ensemble $A \subset X$*

où A est injective on a :

$$m(TA) = \int_A \exp(-\varphi)dm.$$

Pour une mesure conforme m, la dérivée de Radon-Nykodim de m par rapport à la mesure itérée Tm est connue, égale à $\exp(-\varphi)$. Ceci donne aux mesures conformes des propriétés dynamiques très intéressantes. Celles-ci sont mieux exprimées au travers d'un opérateur dual à la dynamique, l'opérateur de Perron-Frobenius.

Définition 2.4. *L'opérateur de Perron-Frobenius du système pondéré (X, T, φ) est donné formellement par :*

$$Pf(x) = \sum_{y;T(y)=x} \exp(\varphi(y))f(y).$$

Remarque 2.1.1. *Nous avons aussi une autre écriture pour l'opérateur :*

$$Pf = \sum_{Z\in\mathcal{Z}} \exp(\varphi \circ T_{|Z}^{-1}) f \circ T_{|Z}^{-1} \mathbb{1}_{TZ}.$$

Proposition 2.1. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) m est une mesure conforme,
(ii) pour tout ensemble A où T est injective,

$$m(A) = \int P(\mathbb{1}_A)dm,$$

(iii) pour toute fonction $f \in L^1(X, m)$,

$$\int f\, dm = \int Pf\, dm,$$

(iv) pour toute fonction $f \in L^\infty(X, m)$ et $g \in L^1(X, m)$,

$$\int fg \circ T\, dm = \int Pf\, g\, dm.$$

La dernière caractérisation nous dit que P est l'opérateur dual de l'opérateur de composition $Uf = f \circ T$.

Preuve. On montre d'abord que (i) entraîne (ii). Soit $Z \in \mathcal{Z}$. Par définition, la restriction $T_{|Z}$ de T à Z est une bijection sur TZ, que l'on notera T pour simplifier. La mesure p sur TZ définie par $p(B) = m(T^{-1}B)$ est équivalente à la restriction de m sur TZ car $\exp(\pm\varphi)$ ne s'annule pas. Or la dérivée de Radon-Nykodim de p par rapport à m ne peut être que $\exp(-\varphi \circ T^{-1})$, d'où (ii) puisque

$m(A) = p(TA)$ et $P\mathbb{1}_A = \exp(\varphi \circ T^{-1})\mathbb{1}_{TA}$ pour tout sous-ensemble A de Z. Le cas général vient en écrivant $A = \cup_{Z\in\mathcal{Z}} A \cap Z$.

En remplaçant $T_{|Z}$ par $T_{|Z}^{-1}$ et φ par $-\varphi$, on prouve que (ii) implique (i).

En prenant $f = \mathbb{1}_A$ dans (iii) on obtient (ii), et un argument de convergence montre que (ii) entraîne (iii).

Finalement, (iv) est une conséquence de (iii) si l'on remarque que $P(fg \circ T) = Pf\ g$, et en prenant $g = 1$ dans (iv) on obtient (iii). $\square$

Nous allons voir maintenant deux cas particuliers où l'on peut avoir des mesures conformes :

Exemple 2.1.1. *On considère le cas où X est une région bornée Ω de $\mathbb{R}^N$ pour un entier N quelconque, et T une application différentiable inversible par morceaux sur une partition régulière $\mathcal{Z}$. Alors le potentiel $\varphi = -\log|\det DT|$ est bien défini, et la mesure de Lebesgue normalisée est conforme pour (X, T, φ).*

Voyons maintenant un théorème qui donne l'existence de mesures conformes dans un cas où l'on suppose des conditions de régularité sur l'application et le potentiel.

Théorème 2.2. *Soient X un espace compact, T un endomorphisme surjectif de X, et φ un potentiel, tels que l'opérateur de Perron-Frobenius agisse continûment sur $C(X)$. Alors il existe une constante $p \in \mathbb{R}$ telle que le système $(X, T, \varphi - p)$ possède une mesure conforme.*

Preuve. P étant un opérateur linéaire continu sur $C(X)$, on peut définir l'opérateur dual P^*, agissant sur le dual de $C(X)$ de la façon suivante :

$$(P^*m)(f) = m(Pf) \qquad \forall f \in C(X).$$

L'opérateur P^* est alors continu sur $C(X)^*$ pour la topologie $*$-faible. Par le théorème de Riesz, on peut voir P^* comme agissant sur $M(X)$, l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X. On considère alors l'application sur $M(X)$ définie par

$$m \mapsto \frac{1}{P^*m(X)} P^*m,$$

(remarquons que $P^*m(X) > 0$ puisque T est surjective) cette application est continue pour la topologie $*$-faible héritée de $C(X)^*$ par le théorème de Riesz. Or $M(X)$ est un ensemble convexe compact pour cette topologie (d'après la compacité de la boule unité de $C(X)^*$, voir [DS88]). Le théorème de Schauder-Tychonoff (voir encore [DS88]) permet donc d'affirmer qu'il existe un point fixe m. Alors la mesure m est conforme pour $(X, T, \varphi - \log P^*m(X))$. $\square$

Corollaire 2.3. *Supposons que pour tout* $Z \in \mathcal{Z}$, $\varphi_{|Z}$, $T_{|Z}^{-1} : TZ \to Z$ *et* $\mathbb{1}_{TZ}$ *soient continues. Si en outre* T *est surjective et* $\|P\mathbb{1}\|_\infty < \infty$, *alors* $(X, T, \varphi - p)$ *possède une mesure conforme pour une constante* $p \in \mathbb{R}$.

Preuve. *Les hypothèses entraînent que* $f \mapsto \exp(\varphi \circ T_{|Z}^{-1}) f \circ T_{|Z}^{-1} \mathbb{1}_{TZ}$ *est un opérateur linéaire continu sur* $C(X)$, *pour tout* $Z \in \mathcal{Z}$. *L'écriture donnée dans la remarque 2.1.1 permet alors de conclure que* P *est un opérateur linéaire continu sur* $C(X)$, *comme somme absolument convergente (car* $\|P\mathbb{1}\|_\infty < \infty$*) d'opérateurs linéaires continus.* □

Supposer qu'une fonction caractéristique $\mathbb{1}_{TZ}$ est continue peut sembler étrange. Elle est trivialement vérifiée lorsque chaque morceau de l'application est surjectif. De plus, dans bien des cas on peut, en agrandissant la topologie de X, rendre ces fonctions continues. Nous verrons plus tard (chapitre 4) les limitations d'un tel procédé.

Nous sommes dès lors à même de voir l'utilité des mesures conformes.

2.2 Analyse spectrale

Bien qu'ayant un lien très fort avec la dynamique, les mesures conformes n'en sont pas pour autant invariantes en général. Voyons donc un critère permettant d'affirmer l'existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à une mesure conforme.

Théorème 2.4. *Soit* (X, T, φ) *un système pondéré, avec une mesure conforme* m. *Une mesure de probabilité* μ *absolument continue par rapport à* m, *de densité* h *positive est invariante ssi* $Ph = h$.

Preuve. *il suffit de prendre* $f = h$ *dans le point (iv) de la proposition 2.1, on obtient alors l'invariance de* μ. □

On a alors le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 2.5. *Une mesure conforme est invariante ssi* $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$.

La structure de l'opérateur de Perron-Frobenius permet de caractériser les mesures invariantes (la démonstration est issue de [Led74, HK82b]). On renvoie au chapitre 1 pour les définitions et propriétés relatives à l'entropie.

Théorème 2.6. *Soit* (X, T, φ) *un système pondéré, avec une mesure conforme* m. *Si* μ *est une probabilité invariante absolument continue par rapport à* m *de densité* h, *avec*[1] $\mu(\log h - \log h \circ T) = 0$, *alors pour toute partition mesurable*

1. D'après le Lemme 14 dans [HK82b], il suffit que l'on ait $(\log h - \log h \circ T)^+ \in L^1_\mu$.

$\mathcal{Z}$ telle que T soit injective sur chaque élément de la partition, la somme de l'information conditionnelle et du potentiel est de moyenne nulle

$$\int \mathbb{I}_\mu(\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) + \varphi \; d\mu = 0.$$

Si de plus $H_\mu(\mathcal{Z}) < \infty$, alors l'entropie est la moyenne du potentiel

$$h_\mu(T, \mathcal{Z}) = -\int \varphi \; d\mu.$$

Preuve. On renormalise le potentiel de telle sorte que la mesure invariante soit conforme par rapport à ce potentiel, en posant

$$\varphi_\mu = \varphi + \log h - \log h \circ T.$$

Il vient alors que l'opérateur de transfert P_μ (avec le potentiel φ_μ) vérifie $P_\mu 1\!\!1 = 1\!\!1$. Ainsi on a l'égalité dans L^1_μ

$$\mathbb{E}_\mu(1\!\!1_Z|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) = P_\mu(1\!\!1_Z) \circ T,$$

car pour tout $B \in T^{-1}\mathcal{Z}^\infty$,

$$\int_{T^{-1}B} 1\!\!1_Z d\mu = \int P_\mu(1\!\!1_Z) 1\!\!1_B d\mu = \int_{T^{-1}B} P_\mu(1\!\!1_Z) \circ T d\mu.$$

Mais par définition de l'information conditionnelle,

$$\mathbb{I}_\mu(\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) = -\sum_{Z\in\mathcal{Z}} 1\!\!1_Z \log \mathbb{E}_\mu(1\!\!1_Z|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty)$$

et comme $T_{|Z}$ est injective, $\mathbb{E}_\mu(1\!\!1_Z|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) = \exp(\varphi_\mu)$ presque partout sur Z. Donc

$$0 = \mathbb{I}_\mu(\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) + \varphi_\mu = \mathbb{I}_\mu(\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) + \varphi + \log h - \log h \circ T.$$

La conclusion du premier point vient alors en intégrant par rapport à μ car $\mu(\log h - \log h \circ T) = 0$.

On obtient la seconde partie en appliquant le Théorème 1.6, ce qui nous donne lorsque $H_\mu(\mathcal{Z}) < \infty$

$$H_\mu(\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) = h_\mu(T, \mathcal{Z}) < \infty.$$

Comme l'entropie conditionnelle est la moyenne de l'information conditionnelle (qui par définition est positive) on a $\mathbb{I}_\mu(\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) \in L^1_\mu$, et alors

$$h_\mu(T, \mathcal{Z}) = \int \mathbb{I}_\mu(\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{Z}^\infty) d\mu = -\int \varphi d\mu.$$

□

Au delà de l'existence de la densité positive associée à la valeur propre 1, le reste du spectre de l'opérateur est susceptible de fournir d'importantes informations sur la dynamique.

Définition 2.5. *On dira que l'opérateur de Perron-Frobenius P du système (X, T, φ) possède un trou spectral sur un espace de Banach B lorsque P a la décomposition spectrale suivante :*

(i) en tant qu'opérateur sur B, P n'a un nombre fini de valeurs propres de module 1, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicité finie $m_1, \dots, m_r$.

(ii) P admet la décomposition suivante

$$P = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Pi_i + Q,$$

avec Q de rayon spectral strictement inférieur à 1, et Π_i les projections sur les espaces propres associés aux valeurs propres λ_i qui vérifient

$$\Pi_i \Pi_j = 0 \quad \forall i \neq j, \qquad \Pi_i Q = Q \Pi_i = 0 \quad \forall i.$$

La proposition suivante illustre l'importance de la présence d'un trou spectral du point de vue des propriétés dynamiques. Ces résultats font partie du “folklore”, ils sont présentés dans la littérature pour des espaces de Banach B particuliers (voir [HK82b], [Ryc83] et [Kel85]). A des fins de complétude, on donne ici une version valable pour tout espace de Banach[2] B dense et continûment injecté dans L^1_m.

Proposition 2.7. *Supposons que (X, T, φ) possède une mesure conforme m et que l'opérateur de Perron-Frobenius associé ait un trou spectral sur un sous-espace de Banach $B \subset L^1_m$ dense avec injection continue. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) 1 appartient au spectre de P, et si l'on suppose que $\lambda_1 = 1$, alors $h = \Pi_1 \mathbb{1}$ est un point fixe de P, de plus c'est une densité ($h \geq 0$ et $m(h) = 1$). La mesure $\mu = hm$ est donc une probabilité invariante, absolument continue par rapport à m.

(ii) Les projections Π_j, P et donc Q ont une unique extension sur L^1. De plus $\Pi_j(L^1_m) \subset B$ pour tout $j = 1..r$; pour tout $f \in L^1_m$, $Q^n f \to 0$ dans L^1_m quand $n \to \infty$, et $S = \{f \in L^1_m \,|\, \exists \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, Pf = \lambda f\} \subset B$ est de dimension finie.

(iii) Il y a exactement m_1 mesures invariantes ergodiques absolument continues par rapport à m. De plus μ définie au (i) est la “plus grande” mesure invariante absolument continue, c'est-à-dire que toute mesure invariante absolument

2. En particulier, la positivité de l'opérateur est utilisée uniquement sur L^1_m, plutôt que sur B, ce qui nécessiterait que B soit un espace de Banach réticulé (*Banach lattices*). On renvoie à [Bir79] et [Sch74] pour l'étude abstraite des opérateurs positifs.

continue par rapport à m est également absolument continue par rapport à μ.

(iv) Le spectre périphérique de P est complètement cyclique: pour tout $|\lambda| = 1$ et f tel que $Pf = \lambda f$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ les couples $((f/|f|)^k|f|, \lambda^k)$ sont des éléments propres de P. En particulier, l'ensemble $G = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ des valeurs propres de module 1 est un sous-groupe du cercle unité de dimension finie, ce qui implique que toute valeur propre de module 1 est une puissance entière d'une racine de l'unité.

(v) Il existe une partition de X (modulo μ) $\{W_{j,l} | j = 1..m_1, l = 0..L_j - 1\}$, telle que tous les ensembles $W_{j,l}$ vérifient $TW_{j,l} = W_{j,l+1 \bmod L_j}$. De plus, pour tout $j = 1..m_1$ et $l = 0..L_j - 1$ le système $(W_{j,l}, T^{L_j}, \mu_{W_{j,l}})$ est mélangeant[3] , avec une décroissance exponentielle des corrélations pour les observables f telles que $fh\mathbb{1}_{W_{j,l}} \in B$. (si B est une algèbre il suffit pour cela que $f \in B$ car $h\mathbb{1}_{W_{j,l}} \in B$)

Preuve. (i) Pour tout $j = 1..r$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, notons que la convergence suivante a lieu dans $\mathcal{L}(B)$:

$$P_{n,\lambda} := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(P/\lambda)^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\} \\ \Pi_j & \text{si } \lambda = \lambda_j \end{cases} \tag{2.1}$$

En effet, en utilisant la décomposition spectrale de P il vient

$$P_{n,\lambda} = \sum_{\lambda_i=\lambda} \Pi_i + \frac{1}{n}\sum_{\lambda_i\neq\lambda} \frac{1-(\lambda_i/\lambda)^n}{1-\lambda_i/\lambda}\Pi_i + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(Q/\lambda)^k.$$

Mais $P_{n,1}$ préserve la mesure m, donc sa limite $h = \Pi_1\mathbb{1}$ est non nulle , ce qui implique que 1 est valeur propre de P. Comme de plus $P_{n,1}$ est positif, $h \geq 0$.

(ii) Comme P_{n,λ_j} est une contraction de L^1_m, Π_j a une unique extension (par densité de B) sur L^1_m par (2.1), cette dernière a la même image $\Pi_j(B)$ (elle est de dimension finie, donc fermée dans L^1_m). Comme P est continu sur L^1_m, $Q = P - \sum_i \Pi_i$ a aussi une extension unique sur L^1_m, et elle vérifie $Q^n f \to 0$ dans L^1_m quand $n \to \infty$ pour tout $f \in L^1_m$. Par conséquent, $S \subset B$.

(iii) Posons $E_1 = \{f \in L^1_m | Pf = f\}$. Pour toute mesure μ_j invariante ergodique absolument continue par rapport à m il existe une fonction $g_j \geq 0$ de moyenne unité appartenant à E_1. Or les densités des mesures ergodiques (qui ont des ensembles M_j de mesure pleine disjoints) forment une famille libre. Le nombre n de ces mesures ergodiques est donc borné par $\dim E_1 = m_1$.

3. On rappelle la notation déjà introduite μ_A, qui représente la restriction de la mesure μ à l'ensemble de mesure positive A, normalisée.

Pour tout $f \in E_1$, on a $P|f| \geq |f|$, ce qui implique (puisque P préserve m) que $P|f| = |f|$. Par ailleurs, pour tout $j = 1..n$, l'invariance de M_j nous donne $|f|\mathbb{1}_{M_j} \in E_1$. L'ergodicité de la mesure μ_j entraîne alors que $|f|\mathbb{1}_{M_j}$ est multiple de $h\mathbb{1}_{M_j}$. Ceci montre que $\left\{ |h|\mathbb{1}_{M_j} \middle| j = 1..n \right\}$ est une famille génératrice de E_1, donc $n = m_1$.

La dernière partie est obtenue en remarquant que les densités des mesures ergodiques μ_j sont exactement données par $\frac{1}{m(M_j)}\Pi_1\mathbb{1}_{M_j} \leq \frac{1}{m(M_j)}\Pi_1$ car la projection Π_1 est positive. Chaque mesure μ_j est donc absolument continue par rapport à μ (donc $\mu_j = \mu_{M_j}$) et l'on conclut en notant que toute mesure invariante est une combinaison convexe finie des μ_j.

(iv) Soient $f \in S$ et λ de module 1 telles que $Pf = \lambda f$. Soit $s = f/|f|$ le signe de f et $g = |f|$ son module. On a $P(sg) = \lambda sg$, donc $P(\frac{s}{\lambda s \circ T}g) = g$. D'où

$$\int \frac{s}{\lambda s \circ T} g \, dm = \int P(\frac{s}{\lambda s \circ T} g) \, dm = \int g \, dm.$$

Comme $\left|\frac{s}{\lambda s \circ T}\right| = 1$ et $g \geq 0$, il vient $\frac{s}{\lambda s \circ T} = 1$ m-presque partout sur $\{g \neq 0\}$, donc $s^k g = \lambda^k s^k \circ Tg$ m-presque partout pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En appliquant l'opérateur il vient $P(s^k g) = P(\lambda^k s^k \circ Tg) = \lambda^k s^k g$. On a donc montré que le spectre périphérique de P est complètement cyclique.

(v) Soit $j \in \{1, \ldots, m_1\}$. M_j étant invariant, les restrictions P_j, $\Pi_{i,j}$ et Q_j de P, Π_i et Q à $L^1_m(M_j)$ agissent sur $L^1_m(M_j)$ et $P_j = \sum_{i=1}^r \lambda_i \Pi_{i,j} + Q_j$. Par (iv) l'ensemble G_j des valeurs propres de P_j de module 1 est un sous-groupe fini du cercle unité. De plus 1 est une valeur propre simple car μ_{M_j} est ergodique. Soit alors L_j le plus petit entier tel que $\lambda^{L_j} = 1$ pour tout $\lambda \in G_j$. La décomposition spectrale donne

$$P_j^{L_j} = \sum_{i=1}^r \Pi_{i,j} + Q_j^{L_j}.$$

Soit $n = \sum_{i=1}^r \mathrm{rang}(\Pi_{i,j})$. Si $n = 1$ alors 1 est la seule valeur propre de $P_j^{L_j}$ du cercle unité. Sinon, par (iii), il existe une unique partition $\mathcal{P}$ de M_j telle que pour tout $V \in \mathcal{P}$, V soit invariant par T^{L_j}, $\mu(V) > 0$ et (V, T^{L_j}, μ_V) soit ergodique. Or $T^{-1}\mathcal{P}$ est aussi une telle partition, donc $\mathcal{P} = T^{-1}\mathcal{P}$. T est donc une permutation de $\mathcal{P}$. Or pour tout $V \in \mathcal{P}$, $W = \cup_{k=1}^{L_j} T^{-k}V$ est invariant par T et (T, μ_{M_j}) est ergodique, donc $W = M_j$. Soit alors K le plus petit entier tel que $T^{-K}V = V$. $\{V, T^{-1}V, \ldots, T^{-K+1}V\}$ est donc une partition en ensembles disjoints sur lesquels $(T^{-k}V, T^{L_j}, \mu_{T^{-k}V})$ est ergodique, C'est donc la partition $\mathcal{P}$ elle même, d'où $K = n$. Donc T^n est une permutation cyclique de $\mathcal{P}$, ce qui implique que L_j est un multiple de n. Montrons qu'en fait $n = L_j$, c'est-à-dire *que P^n ne possède pas de valeurs propres différentes de 1 sur le cercle unité. Les n ensembles de $\mathcal{P}$ étant invariants par T^n, T^n a au moins n mesures ergodiques invariantes. Ceci implique par (iii) que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à n, et donc pour tout i tel que $\mathrm{rang}(\Pi_{i,j}) \neq 0$, $\lambda_i^n = 1$. Donc n est un multiple de L_j.*

On a donc établi l'existence d'une partition de M_j en L_j éléments permutés cycliquement par T^{L_j}, et sur chaque élément W de la partition, T^{L_j} est ergodique. En fait, elle est même beaucoup plus: Il est clair que 1 est l'unique valeur propre de module 1 de la restriction de l'opérateur P^{L_j} à $L^1_m(W)$, de plus elle est simple. Pour tout $g \in L^\infty_{\mu_W}$, et $f \in L^1_{\mu_W}$ d'intégrale nulle on a $Pf1\!\!1_W h = Qf1\!\!1_W h$, donc

$$\begin{aligned}\left|\int f\, g\circ T^{L_j t} d\mu_W\right| &= \left|\int g P^{L_j t}(fh1\!\!1_W)dm\right| \\ &\leq \|g\|_\infty \|Q^{L_j t} fh1\!\!1_W\|_1 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

car $Q^t f \longrightarrow 0$ dans L^1_m lorsque $t \to \infty$. Donc (W, T^{L_j}, μ_W) est mélangeant. En outre, Q est de rayon spectral (sur B) strictement inférieur à 1 donc il existe $\rho < 1$ tel que $\|Q^t\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \rho^t$ pour tout t assez grand. Si l'on suppose de plus que $f1\!\!1_W h \in B$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int f\circ g\circ T^{L_j t} d\mu_W\right| &\leq \|g\|_\infty \|\|Q^{L_j t} fh1\!\!1_W\|_B \\ &\leq \|g\|_\infty \|fh1\!\!1_W\|_B \rho^{L_j t}.\end{aligned}$$

□

On établira au chapitre 6 des conditions qui permettent d'appliquer un théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, assurant l'existence d'un trou spectral pour des applications du type de celles citées dans l'exemple 2.1.1. Toutefois, il est des transformations où ce trou spectral n'est pas attendu. Ce sera le cas pour les applications intermittentes traitées au chapitre 5. Mais même dans ces cas-là, une approche spectrale indirecte permet de donner des résultats. La technique employée consiste à considérer le *système induit* sur un certain sous-ensemble, qui lui est susceptible de posséder un trou spectral [Tha80, You97].

Par ailleurs, l'approche spectrale demande une structure assez rigide afin de fonctionner (espaces de Banach, injections compactes). Un autre point délicat est la connaissance de la mesure conforme. En effet, elle est généralement nécessaire pour travailler avec des classes d'équivalence de fonctions (sous espaces de L^1_m). Nous utiliserons au chapitre 4 une méthode alternative qui permet de construire dans le même temps la mesure conforme et la densité. Plutôt que de considérer des classes de fonction presque partout égales par rapport à une mesure conforme, d'autres approches ont été utilisées avec succès; citons [BK90] où grâce au caractère unidimensionnel du problème il suffit de négliger des ensembles dénombrables. En dimension supérieure, l'entropie topologique apparaît comme une quantité pertinente pour "mesurer" les ensembles (voir par exemple [Buz97]).

Chapitre 3

Statistique asymptotique

Ici on s'intéresse aux contreparties de certains théorèmes de probabilités dans le domaine des systèmes dynamiques.

3.1 Moyennes temporelles d'observables

3.1.1 La loi des grands nombres

Citons tout d'abord le théorème ergodique de Birkhoff-Kinchin (voir par exemple [Par81]).

Théorème 3.1. *Pour tout $\varphi \in L^1(\mu)$, la moyenne temporelle de φ existe presque partout et dans L^1. C'est-à-dire*

$$\frac{1}{n} S_n \varphi := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \psi.$$

Où la convergence a lieu presque partout et dans L^1 vers une limite $\psi \in L^1$. Clairement, ψ est invariante et $\mu(\psi) = \mu(\varphi)$.

Ce théorème est extrêmement utile pour l'étude de systèmes dynamiques. On l'utilise souvent aussi sous la forme suivante

Corollaire 3.2. *Si l'on suppose que la mesure μ est ergodique, alors les moyennes temporelles et d'ensembles sont égales*

$$\frac{1}{n} S_n \varphi \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu(\varphi).$$

L'hypothèse ergodique de Boltzmann propose de considérer un système de particules (par exemple un gaz) comme étant ergodique. Cette hypothèse est mathématiquement démontrée pour certains Billards.

3.1.2 Théorème central limite

La limite ergodique donnée ci-dessus traduit une sorte de loi des grands nombres. Par conséquent, si les variables aléatoires sont (suffisamment) indépendantes, les fluctuations des sommes ergodiques autour de la limite sont Gaussiennes, d'amplitude $\sqrt{n}$. C'est ainsi que le théorème de la limite centrale apparaît dans le contexte des systèmes dynamiques. Si l'on définit pour une observable $\varphi \in L^2_\mu$ l'intégrale d'autocorrélation

$$C_n(\varphi) = \int \varphi \circ T^n \varphi d\mu - \left(\int \varphi d\mu \right)^2,$$

la somme temporelle $S_n\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i x$, et la variance asymptotique de $S_n\varphi$

$$\sigma^2_\varphi = C_0(\varphi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi), \tag{3.1}$$

on dira que φ satisfait le théorème de la limite centrale si $\sigma_\varphi \neq 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \mu \left\{ x \mid \frac{S_n\varphi(x) - n\mu(\varphi)}{\sigma_\varphi \sqrt{n}} \leq y \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{y} \exp(-t^2/2) dt.$$

Lorsque φ satisfait le théorème de la limite centrale, alors si l'on renormalise le temps, on peut montrer que le processus ainsi construit converge faiblement à la mesure de Wiener. Le système apparaît donc de ce point de vue comme un mouvement Brownien.

Si la série dans l'équation 3.1 converge absolument vers une valeur non nulle et que $T^*_\mu \varphi$ converge presque partout vers $\mu(\varphi)$, alors le théorème central limite est vérifié (voir [Liv96]). Ceci est toujours vérifié pour les observables dont la vitesse de décroissance des corrélations est sommable. La vitesse de décroissance des corrélations joue aussi un rôle crucial pour quantifier la relaxation à l'équilibre.

3.2 Apparition d'évènements rares

Dans cette section nous allons établir la distribution limite des temps de retour dans un voisinage. Ce type de questions à été envisagé entre autres par Pitskel, Collet, Galves et Schmitt. Les résultats que l'on donne ici sont dans l'esprit de [GS97]. Toutefois leur application à des systèmes concrets demande un peu plus de travail, ceci étant en partie dû au fait que l'on regarde des quantités localisées autour d'un point, et que le comportement limite dépend fortement de ce point.

Le champ d'application des théorèmes qui suivent est très divers. Le parti a été pris de donner des hypothèses assez abstraites, ce qui permet de traiter de nombreux exemples de systèmes dynamiques. En particulier, tous les systèmes considérés dans ce travail vérifient les hypothèses.

On considère un système dynamique (X, T, μ). Le Théorème de Kac 1.4 nous dit que pour tout mesurable U de mesure positive, si μ est ergodique alors l'espérance conditionnelle de τ_U —le temps de premier retour dans U— sachant U est finie, égale à $1/\mu(U)$. Sous une hypothèse assez générale, il est possible d'obtenir des renseignements plus importants sur la distribution de τ_U lorsque U est "petit". Posons à cet effet $c(U) = \sup_k |c(k, U)|$, avec

$$c(k, U) = \mu_U(\tau_U > k) - \mu(\tau_U > k).$$

On a alors le théorème suivant (par définition $c(U) \leq 1$)

Théorème 3.3. *La distribution des temps de retour normalisés dans le voisinage U diffère au plus de la loi exponentielle de $d(U) = 4\mu(U) + c(U)(2 - \log c(U))$, c'est-à-dire*

$$\sup_{t \geq 0} \max \left\{ \left| \mu\left(\tau_U > \frac{t}{\mu(U)}\right) - \mathrm{e}^{-t} \right|, \left| \mu_U\left(\tau_U > \frac{t}{\mu(U)}\right) - \mathrm{e}^{-t} \right| \right\} \leq d(U).$$

Remarque 3.2.1. *Remarquons que cette méthode ne donne pas d'estimation sur les densités, mais seulement sur les distributions. En fait tant que $\mu(U)$ est positive, la loi des temps de retour est discrète, donc singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Ceci nous permet d'obtenir une borne inférieure pour la vitesse de convergence. Plus précisément, on a pour tout entier $k \geq 0$,*

$$\varepsilon_{k,U} = \left|\mu\left(\tau_U > k\right) - \mathrm{e}^{-k\mu(U)}\right| + \left|\mu\left(\tau_U > k + 1/2\right) - \mathrm{e}^{-(k+1/2)\mu(U)}\right| \geq \frac{\mathrm{e}^{-k\mu(U)}}{4}\mu(U).$$

En particulier, $\varepsilon_{0,U} \geq \mu(U)/4$.

Preuve. [Remarque 3.2.1] Soit $k \geq 0$ un entier. Comme τ_U ne prend que des valeurs entières, la distribution pour $t = k/\mu(U)$ et $t' = (k + 1/2)/\mu(U)$ est la même, donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k,U} &\geq |\exp(-k\mu(U)) - \exp(-(k+1/2)\mu(U))| \\
&\geq \exp(-k\mu(U))(1 - \mathrm{e}^{-\mu(U)/2}) \\
&\geq \frac{\mathrm{e}^{-k\mu(U)}}{4}\mu(U).
\end{aligned}$$

□

Preuve. [Théorème 3.3] Soit U un ensemble mesurable de X, de mesure positive. D'après la relation 1.1 on a pour tout $k > 0$

$$\begin{aligned}
\mu(\tau_U > k) &= \mu(\tau_U > k-1) - \mu(U)\mu_U(\tau_U > k-1) \\
&= \mu(\tau_U > k-1) - \mu(U)(\mu(\tau_U > k-1) + c(k, U)) \\
&= \mu(\tau_U > k-1)(1 - \mu(U)) - \mu(U)c(k, U).
\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$\mu(\tau_U > k) = (1-\mu(U))^k - \mu(U)\sum_{j=1}^{k} c(j,U)(1-\mu(U))^{k-j}.$$

On a pour tout $t > 0$, *en posant* $k_t = [t/\mu(U)]$

$$\left|\mu(\tau_U > k_t) - (1-\mu(U))^{k_t}\right| \le \mu(U)\sum_{j=1}^{k_t} |c(j,U)| \le t c(U). \tag{3.2}$$

Soit alors $z = -\log c(U)$, *et* $k_z = [z/\mu(U)]$. *On a*

$$(1-\mu(U))^{k_z} \le \mathrm{e}^{-k_z\mu(U)} \le c(U)\mathrm{e}^{\mu(U)} \le c(U) + 2\mu(U),$$

et de plus pour $t > z$

$$\begin{array}{rcl} \mu(\tau_U > k_t) & \le & \mu(\tau_U > k_z) \\ & \le & (1-\mu(U))^{k_z} + zc(U) \\ & \le & 2\mu(U) + c(U)(1-\log c(U)). \end{array}$$

On obtient donc la majoration suivante, pour tout $t > z$

$$\left|\mu(\tau_U > k_t) - (1-\mu(U))^{k_t}\right| \le 2\mu(U) + c(U)(1-\log c(U)).$$

Et pour $t \le z$ *cette dernière estimation est vérifiée en appliquant l'inégalité 3.2. On montre alors par un petit calcul que*

$$|(1-\mu(U))^{k_t} - \mathrm{e}^{-t}| \le 2\mu(U),$$

on obtient que pout tout $t \ge 0$

$$\left|\mu(\tau_U > k_t) - \mathrm{e}^{-t}\right| \le 4\mu(U) + c(U)(1-\log c(U)).$$

Ce qui prouve la première partie du théorème. Comme de plus

$$\left|\mu_U(\tau_U > k_t) - \mu(\tau_U > k_t)\right| = |c(k_t,U)| \le c(U),$$

on obtient que pout tout $t \ge 0$

$$\left|\mu_U(\tau_U > k_t) - \mathrm{e}^{-t}\right| \le 4\mu(U) + c(U)(2-\log c(U)).$$

$\square$

Nous avons choisi dans le théorème 3.3 de donner des hypothèses générales permettant d'établir la loi exponentielle, à savoir que $d(U) \ll 1$, en particulier, il faut que $\mu(U) \ll 1$. Toutefois, la quantité $c(U)$ peut paraître un peu obscure, c'est pourquoi nous allons maintenant donner un critère permettant de majorer $c(U)$. Ce genre de condition est une généralisation de la "self-mixing" condition introduite par Hirata [Hir95].

Lemme 3.4. *Soit $U \subset X$ un ensemble mesurable. Alors on a la majoration suivante*

$$c(U) \leq \inf \{ a_N(U) + b_N(U) + N\mu(U) | \, N \in \mathbb{N}\}.$$

où les quantités précédemment citées sont définies pour tout N par

$$\begin{aligned} a_N(U) &= \mu_U(\bigcup_{j=1}^{N} T^{-j}U) \quad (= \mu_U(\tau_U \leq N)), \\ b_N(U) &= \sup_{l \in \mathbb{N}} \sup_{V \in \sigma(\mathcal{U}_l)} |\mu_U(T^{-N}V) - \mu(V)|. \end{aligned}$$

où $\mathcal{U} = \{U, U^c\}$ et $\mathcal{U}_n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\mathcal{U}$.

Remarquons que $b_N(U)$ est borné par $\alpha(N)$ si la partition $\mathcal{U}$ est α-mélangeante, et par $\gamma(N)/\mu(U)$ si elle est uniformément mélangeante avec vitesse γ. Toutefois, dans ce dernier cas on a une borne intéressante uniquement lorsque $\gamma(N)$ est sommable, à cause de la compétition entre $\gamma(N)$ et $N\mu(U)$.

Pour simplifier, on peut dire que la loi exponentielle est vérifiée lorsqu'il existe N assez petit tel que la proportion de points qui arrivent dans U avant N fois est négligeable, mais assez grand pour que $T^N U$ soit uniformément réparti.

Preuve. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $k < N$, on majore simplement $c(k, U)$ par*

$$\begin{aligned} |\mu_U(\tau_U > k) - \mu(\tau_U > k)| &= |\mu_U(\tau_U \leq k) - \mu(\tau_U \leq k)| \\ &\leq |\mu_U(\tau_U \leq k)| + |\mu(\tau_U \leq k)| \\ &\leq a_N(U) + k\mu(U) \leq a_N(U) + N\mu(U). \end{aligned}$$

Sinon, remarquons tout d'abord que $\{\tau_U > k\}$ et $\{\tau_U \circ T^N > k - N\}$ diffèrent seulement sur $\{\tau_U \leq N\}$, et par hypothèse

$$|\mu_U(\tau_U > k) - \mu_U(\tau_U \circ T^N > k - N)| \leq \mu_U(\tau_U \leq N) = a_N(U).$$

De plus

$$\begin{aligned} |\mu_U(\tau_U \circ T^N > k - N) - \mu(\tau_U > k - N)| &= \\ |\mu_U(T^{-N}(\tau_U > k - N)) - \mu(\tau_U > k - N)| &\leq b_N(U). \end{aligned}$$

Mais $\{\tau_U > k-N\}$ *et* $\{\tau_U > k\}$ *diffèrent seulement sur* $\{\tau_U \circ T^{k-N} \leq N\}$*, par conséquent*

$$|\mu(\tau_U > k-N) - \mu(\tau_U > k)| \leq \mu(\tau_U \circ T^{k-N} \leq N) = \mu(\tau_U \leq N) \leq N\mu(U).$$

D'où finalement quel que soient $k, N \in \mathbb{N}$

$$|\mu_U(\tau_U > k) - \mu(\tau_U > k)| \leq a_N(U) + b_N(U) + N\mu(U).$$

Ce qui termine la démonstration, N *étant arbitraire.* □

Nous allons maintenant nous intéresser à la distribution des temps de retour d'ordre supérieur. Pour cela, définissons le $k^{\text{ième}}$ temps de retour dans U par

$$\tau_U^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ \tau_U(x) + \tau_U^{(k-1)}(T^{\tau_U(x)}(x)) & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Remarquons que la différence entre deux temps de retour consécutifs $\tau_U^{(K)}$ et $\tau_U^{(K+1)}$ suit la même loi que le premier temps de retour, pour la simple raison que

$$\tau_U^{(K+1)} - \tau_U^{(K)} = \tau_U \circ T^{\tau_U^{(K)}}$$

et la mesure induite sur U est invariante pour l'application induite T^{τ_U} sur U.

Théorème 3.5. *Soit* $U \subset X$ *un ensemble mesurable, et* $\mathcal{U} = \{U, U^c\}$ *la partition associée. Supposons que* $(X, T, \mathcal{U}, \mu)$ *est uniformément mélangeant ou* α*-mélangeant. Étant donné un entier* K *et un pavé* Q_K *du quadrant positif de* $\mathbb{R}^K$*, les différences des temps de retour successifs dans* U*, normalisées, sont indépendantes à* $f(K,U)$ *près, c'est-à-dire que l'inégalité suivante est satisfaite:*

$$\left| \mu_U \left((\tau_U^{(1)}, \tau_U^{(2)} - \tau_U^{(1)}, \cdots, \tau_U^{(K)} - \tau_U^{(K-1)}) \in \frac{1}{\mu(U)} Q_K \right) - \int_{Q_K} \prod_{i=1}^{K} \mathrm{e}^{-s_i} ds^K \right| \leq f(K,U). \tag{3.3}$$

Où $f(K,U)$ *est définie selon le type de mélange par (voir le Théorème 3.3 pour la définition de* $d(U)$*)*

(α) *Si* (X,T,μ) *est* α*-mélangeant pour* $\mathcal{U}$*, avec* α *la vitesse de mélange de la partition*[1]*, alors*

$$f(K,U) = K\left(3d(U) + \inf_{M\in\mathbb{N}} \{\alpha(M) + 3M\mu(U)\}\right).$$

1. En fait, on utilisera la propriété d'α-mélange uniquement sur certains ensembles, précisément, on s'intéresse seulement à:

$$\alpha'(N) = \sup\left\{ \left| \frac{\mu(R\cap S)}{\mu(R)} - \mu(S) \right| \;\middle|\; j, N \in \mathbb{N}, R \in \mathcal{U}_j, T^j R \subset U, V \in T^{-j-N}\mathcal{U}\infty \right\}.$$

(γ) Si la partition $\mathcal{U}$ est uniformément mélangée par (X, T, μ) avec une vitesse γ alors

$$f(K,U) = K\left[4d(U) + \inf_{\substack{M\in\mathbb{N}\\ \gamma(M)<\mu(U)^2}} \left\{\frac{\gamma(M)}{\mu(U)^2}\left(2 - K\log\frac{\gamma(M)}{\mu(U)^2}\right) + 3M\mu(U)\right\}\right].$$

Notons que l'on suppose seulement une hypothèse de mélange sur une partition $\mathcal{U}$ particulière. Si le système possède une partition $\mathcal{Z}$ (non nécessairement à deux éléments) uniformément mélangeante avec une vitesse $\gamma_{\mathcal{Z}}$, alors pour un cylindre $U \in \mathcal{Z}_n$ de taille n la partition $\mathcal{U} = \{U, U^c\}$ est aussi uniformément mélangeante, avec une vitesse $\gamma_{\mathcal{U}}(M) \leq \gamma_{\mathcal{Z}}(M-n)$.

La preuve de ce théorème s'inspire de la méthode utilisée dans [CG93]. Les différences sont les suivantes: 1) U est un ensemble quelconque. 2) On garde la trace des estimations faites, afin d'obtenir une majoration de l'erreur. 3) On obtient encore une estimation lorsque le système est seulement uniformément mélangeant, toutefois celle-ci est intéressante uniquement lorsque $\sqrt{\gamma(M)}$ est sommable.

Preuve. Remarquons que si l'on dénote l'application induite sur U par $F = T^{\tau_U}$, alors quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\tau_U^{(k+1)} - \tau_U^{(k)} = \tau_U \circ F^k.$$

Posons $\tau_k = (\tau_U, \tau_U \circ F, \cdots, \tau_U \circ F^{k-1})$. Il faut montrer que l'inégalité 3.3 est satisfaite, ce que l'on va faire par récurrence sur K.

Pour $K = 1$, le Théorème 3.3 s'applique et donne, en posant $Q_1 = [u, v]$,

$$|\mu_U(\tau_U \in [u,v]) - \int_u^v \mathrm{e}^{-s}ds| = |\mu_U(\tau_U > v) - \mu_U(\tau_U > u) - (\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-v})| \leq 2d(U).$$

Supposons l'inégalité 3.3 vraie pour K. Montrons alors qu'elle reste vérifiée pour $K+1$. Soit $[r, s]$ la projection de Q_{K+1} sur la dernière coordonnée et pour $k = K, K+1$,

$$D_k = U \cap \tau_k^{-1}(\frac{1}{\mu(U)}Q_k).$$

Quel que soit $M \in \mathbb{N}$, l'ensemble défini par

$$E_{K+1}(M) = D_K \cap \left\{x \in U |\, \tau_U \circ T^M \circ F^K(x) \in [r,s]/\mu(U) - M\right\}$$

vérifie les inclusions suivantes

$$E_{K+1}(M) \cap \{\tau_U \circ F^K > M\} \subset D_{K+1} \subset E_{K+1}(M) \cup \{\tau_U \circ F^K \leq M\}.$$

Par le Théorème 3.3 on montre que les deux ensembles qui bornent D_{K+1} diffèrent peu:

$$\mu_U(\tau_U \circ F^K \leq M) = \mu_U(\tau_U \leq M) \leq 1 - \mathrm{e}^{-M\mu(U)} + d(U) \leq M\mu(U) + d(U).$$

Donc on obtient la première estimation

$$|\mu_U(D_{K+1}) - \mu_U(E_{K+1}(M))| \leq M\mu(U) + d(U). \tag{3.4}$$

Montrons ensuite que $\mu_U(E_{K+1}(M))$ suit la loi annoncée. On décompose les ensembles $E_{K+1}(M)$ selon $A_K^j = U \cap \{\tau_U^{(K)} = j\}$. On a

$$E_{K+1}(M) \cap A_K^j = D_K \cap A_K^j \cap T^{-(M+j)}\{\tau_U \in \frac{[r,s]}{\mu(U)} - M\}.$$

On peut maintenant utiliser le mélange avec $R = D_K \cap A_K^j \in \sigma(\mathcal{U}_j)$ et $S = T^{-(M+j)}\{\tau_U \in [r,s]/\mu(U) - M\}$. Selon le type de mélange, on va avoir deux estimations possibles:

(α) Si la partition $\mathcal{U}$ est α-mélangeante:

$$|\mu_U(E_{K+1}(M) \cap A_K^j) - \mu_U(D_K \cap A_K^j)\mu(\tau_U \in \frac{[r,s]}{\mu(U)} - M)| \leq \alpha(M)\mu_U(D_K \cap A_K^j).$$

Une sommation sur toutes les valeurs j possibles de $\tau^{(K)}$ donne

$$|\mu_U(E_{K+1}(M)) - \mu_U(D_K)\mu(\tau_U \in \frac{[r,s]}{\mu(U)} - M)| \leq \alpha(M)\mu_U(D_K) \leq \alpha(M). \tag{3.5}$$

Or le Théorème 3.3 entraîne que

$$\begin{aligned}|\mu(\tau_U \in \frac{[r,s]}{\mu(U)} - M) - (\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^{-s})| &\leq |\mu(\tau_U \in \frac{[r,s]}{\mu(U)}) - (\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^{-s})| + 2M\mu(U) \\ &\leq 2(M\mu(U) + d(U)).\end{aligned}$$

Revoyons les approximations effectuées, avec les erreurs commises à chaque fois:

$$\begin{array}{ccccccc}\mu_U(D_{K+1}) & \rightarrow & \mu_U(E_{K+1}(M)) & \rightarrow & \mu_U(D_K)\mu\{\tau_U \in \frac{[r,s]}{\mu(U)} - M\} & \rightarrow & \mu_U(D_K)(\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^{-s}) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & M\mu(U) + d(U) & & \alpha(M) & & 2(M\mu(U) + d(U)) & \end{array}$$

Donc on trouve finalement que la différence

$$\left|\mu_U(D_{K+1}) - \int_{Q_{K+1}} \prod_{i=1}^{K+1} \mathrm{e}^{-s_i} ds^{K+1}\right| \tag{3.6}$$

est bornée par la quantité $f(K,U) + 3M\mu(U) + \alpha(M) + 3d(U)$. *Comme ceci est valable pour tout* M, *et de plus* $f(1,U) \leq 2d(U)$, *l'inégalité 3.3 est satisfaite avec*

$$f(K,U) = K\left(3d(U) + \inf_{M\in\mathbb{N}}\{\alpha(M) + 3M\mu(U)\}\right).$$

(γ) *Si la partition* $\mathcal{U}$ *est uniformément mélangée:*
Dans ce cas, on considère seulement les entiers M *tels que* $\gamma(M) < \mu(U)^2$. *On va tout d'abord se ramener au cas où* $Q_K \subset [0,z]^K$, *pour* $z = -\log\dfrac{\gamma(M)}{\mu(U)^2} > 0$. *En effet,*

$$Q_K \setminus [0,z]^K \subset \bigcup_{k=1}^{K} \mathbb{R}_+^{k-1}\times]z,\infty] \times \mathbb{R}_+^{K-k}.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \mu_U(\mu(U)\tau_K \in Q_K \setminus [0,z]^K) &\leq \sum_{k=1}^{K} \mu_U(\tau_U^{(k+1)} - \tau_U^{(k)} > z/\mu(U)) \\ &= K\mu_U(\tau_U > z/\mu(U)) \\ &\leq K(\mathrm{e}^{-z} + d(U)), \end{aligned}$$

en appliquant le Théorème 3.3. Par ailleurs,

$$\int_{Q_K\setminus[0,z]^K} \prod_{i=1}^{K} \mathrm{e}^{-s_i} ds^K \leq \sum_{k=1}^{K} \int_{\mathbb{R}_+^{k-1}\times]z,\infty]\times\mathbb{R}_+^{K-k}} \prod_{i=1}^{K} \mathrm{e}^{-s_i} ds^K \leq K\mathrm{e}^{-z}.$$

On aura alors, en décomposant selon

$$\mu_U(\mu(U)\tau_K \in Q_K) = \mu_U(\mu(U)\tau_K \in Q_K \cap [0,z]^K) + \mu(\mu(U)\tau_K \in Q_K \setminus [0,z]^K),$$

$f(K,U) \leq K(2\mathrm{e}^{-z} + d(U)) + f'(K,U)$ *où* $f'(K,U)$ *est le maximum de la différence 3.3 pour les pavés* $Q_K \subset [0,z]^K$. *Pour conclure, il suffit maintenant d'estimer* $f'(K,U)$. *Grâce au mélange uniforme il vient*

$$|\mu_U(E_{K+1}(M) \cap A_K^j) - \mu_U(D_K \cap A_K^j)\mu(\tau_U \in [r,s]/\mu(U) - M)| \leq \frac{\gamma(M)}{\mu(U)}.$$

Après une sommation sur toutes les valeurs j *possibles*[2] *de* $\tau^{(K)}$,

$$|\mu_U(E_{K+1}(M)) - \mu_U(D_K)\mu(\tau_U \in [r,s]/\mu(U) - M)| \leq \frac{Kz\gamma(M)}{\mu(U)^2}.$$

2. comme $Q_K \subset [0,z]^K$, le $K^{\text{ième}}$ temps de retour est inférieur à Kz et prend donc au maximum $[Kz]$ valeurs différentes.

Le même calcul effectué après l'estimation (3.5) (où maintenant $\alpha(M)$ est remplacé par $Kz\gamma(M)/\mu(U)^2$ dans l'inégalité (3.5)) permet la majoration $f'(K+1,U) \leq K\dfrac{z\gamma(M)}{\mu(U)^2} + 3(d(U)+M\mu(U))$. Donc pour tout M,

$$f'(K,U) \leq K^2\frac{z\gamma(M)}{\mu(U)^2} + 3K(d(U)+M\mu(U)).$$

M étant arbitraire, nôtre choix de z entraîne que l'inégalité 3.3 est vérifiée avec

$$f(K,U) = K\left[4d(U) + \inf_{\substack{M\in\mathbb{N}\\ \gamma(M)<\mu(U)^2}}\left\{\frac{\gamma(M)}{\mu(U)^2}\left(2-K\log\frac{\gamma(M)}{\mu(U)^2}\right)+3M\mu(U)\right\}\right].$$

$\square$

Nous allons maintenant donner le résultat le plus important de ce chapitre, qui est la statistique de Poisson des retours successifs. Soit $N(t)$ par le nombre de passages dans U au temps normalisé t,

$$N(t) = \sup\left\{K>0 \,|\, \tau_U^{(K)} \leq t/\mu(U)\right\}.$$

Alors $N(t)$ est une variable aléatoire discrète, dont la loi est proche d'une loi de Poisson, plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 3.6. *La distribution du nombre de passage $N(t)$ diffère de la loi de Poisson au plus de*

$$\left|\mu_U(N(t)=K) - \frac{t^K}{K!}\mathrm{e}^{-t}\right| \leq g(t,K,U) + g(t,K+1,U),$$

avec pour tout k $g(t,k,U) = \left(12t^k/k + k^{k-1}\right)\sqrt[k]{f(k,U)}$.

Preuve. C'est une conséquence de la quasi-indépendance des différences des temps de retour successifs établie au Théorème 3.5. Remarquons pour commencer que

$$\begin{aligned}\mu_U(N(t)=K) &= \mu_U\left(\{\tau_U^{(K)} \leq \frac{t}{\mu(U)}\} \cap \{\tau_U^{(K+1)} > \frac{t}{\mu(U)}\}\right)\\ &= \mu_U\left(\tau^{(K)} \leq t/\mu(U)\right) - \mu_U\left(\tau^{(K+1)} \leq t/\mu(U)\right).\end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer la mesure des points dont le $k^{\text{ième}}$ temps de retour est inférieur à t, pour k égal à K et $K+1$. Comme le $k^{\text{ième}}$ temps de retour est la somme des différences des temps de retour consécutifs, et que ces derniers sont presque indépendants et exponentiellement distribués, on va pouvoir retrouver une loi de Poisson. En effet, si l'on pose $L_k(t) = \left\{(s_1,\ldots,s_k)\in\mathbb{R}_+^k \,\middle|\, s_1+\cdots+s_k \leq t\right\}$ et

$$P_k(t) = \int_{L_k(t)} \prod_{i=1}^k \mathrm{e}^{-s_i}ds_i$$

alors on peut montrer par récurrence que $P_k(t) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$ *: C'est vrai pour* $k = 1$*, et le passage de* k *à* $k+1$ *est assuré par*

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-s_{k+1}} P_k(t - s_{k+1}) ds_{k+1} &= \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \left(1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(t-s)^n}{n!} \mathrm{e}^{-t+s} \right) ds \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{k-1} \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} ds \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

Ce qui donne donc le résultat classique pour les variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées, à savoir $P_K(t) - P_{K+1}(t) = \frac{t^K}{K!} \mathrm{e}^{-t}$.

La difficulté ici provient du fait que la distribution de $\tau^{(k)}$ *n'est pas une mesure à densité, et que le Théorème 3.5 assure une faible dépendance des temps de retour successifs uniquement pour les pavés, alors qu'il faudrait l'avoir sur les ensembles* $L_k(t)$*. On va donc discrétiser le problème.*

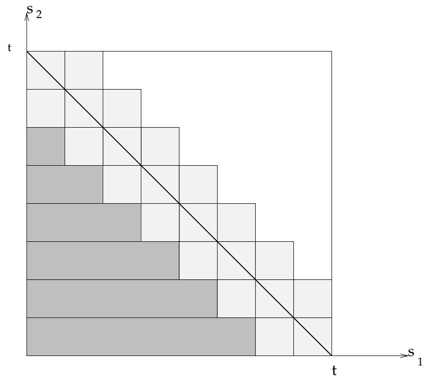

FIG. 3.1 - *Partition du cube* $[0,t]^k$ *pour* $k = 2$*.* Σ_k *est l'union des carrés pointillés et* Δ_k *l'union des rectangles grisés* $R_k(Q_k)$*.*

On peut supposer que $f(k,U) < 1$*, sinon il n'y a rien à montrer. Ainsi l'entier* N *défini par* $N = [k/f(k,U)^{k+1}]$ *est supérieur à* k*. On considère le pavage uniforme de* $[0,t]^k$ *par des cubes de coté* t/N*. Soient* Δ_k *l'union de ces cubes* Q_k *contenus dans l'intérieur de* $L_k(t)$*, pour lesquels pour tout* $(s_1, \ldots, s_k) \in Q_k$*,* $\sum_{i=1}^k s_i < t$ *et* Σ_k *ceux qui touchent le bord, i.e. l'union des cubes* Q_k *tels qu'il existe* $(s_1, \ldots, s_k) \in Q_k$ *avec* $\sum_{i=1}^k s_i = t$*. On reprend la notation vectorielle des différences des temps de retour* τ_k *introduite dans la preuve du Théorème 3.5.*

Alors

$$\begin{aligned}
\delta &:= \left|\mu_U(\tau_U^{(k)} \leq t/\mu(U)) - \int_{L_k(t)} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-s_i} ds^k\right| \\
&\leq \left|\mu_U(\tau_k \in \frac{\Delta_k}{\mu(U)}) - \int_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-s_i} ds^k\right| + \mu_U(\tau_k \in \frac{\Sigma_k}{\mu(U)}) + \int_{\Sigma_k} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-s_i} ds^k \\
&\leq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.
\end{aligned}$$

Pour estimer δ_1, notons Π la projection sur les $k-1$ dernières coordonées. alors les ensembles $R_k(Q_k) = \{Q'_k \in \Delta_k | \Pi(Q'_k) = \Pi(Q_k)\}$ sont des pavés, et leur nombre est majoré par N^{k-1} (voir la Figure 3.1). Pour chacun de ces pavés le Théorème 3.5 donne une erreur inférieure à $f(K,U)$, et donc on trouve que $\delta_1 \leq N^{k-1} f(k,U)$.

Pour δ_1 et δ_2, notons C_N^k le nombre de cubes contenus dans Σ_k. Le calcul combinatoire qui suit nous donne $C_N^k \leq 6N^{k-1}$: On suppose pour simplifer que $t = N$. Alors les cubes sont de la forme $\prod_{i=1}^{k} [n_i, n_i + 1[$ avec $n_i = 0, 1, ..., N-1$. Ceux contenus dans Σ_k vérifient en outre $N - k \leq \sum_{i=1}^{k} n_i \leq N$. Soit alors A_p^k le nombre de k-uplets d'entiers dont la somme est égale à p. D'après la condition sur la somme des n_i, il est clair que $C_N^k \leq \sum_{p=N-k+1}^{N} A_p^k$. Or une estimation de séries algébriques donne $A_p^k \leq (p+k-1)^{k-1}/(k-1)!$. Donc

$$C_N^k \leq \sum_{p=N-k+1}^{N} \frac{(p+k-1)^{k-1}}{(k-1)!} \leq k \frac{(2N)^{k-1}}{(k-1)!} \leq 6N^{k-1}.$$

Pour chaque cube $Q_k \subset \Sigma_k$ le Théorème 3.5 donne

$$\mu_U(\tau_k \in Q_k) \leq \int_{Q_k} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-s_i} ds^k + f(k,U).$$

En sommant sur tous les cubes contenus dans Σ_k il vient $\delta_2 \leq 6N^{k-1} f(k,U) + \delta_3$. En outre l'intégrale $\int_{Q_k} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-s_i} ds^k$ est bien sûr majorée par le volume de Q_k égal à $(t/N)^k$, ce qui donne $\delta_3 \leq 6N^{k-1} t^k / N^k$. On en déduit donc que

$$\delta \leq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq N^{k-1} f(k,U) + 12t^k/N.$$

D'après le choix de N, on trouve finalement que $\delta \leq \left(12t^k/k + k^k\right) f(k,U)$. □

Nous avons vu comment estimer l'erreur commise entre la loi de Poisson et la distribution du nombre de passages dans un ensemble satisfaisant certaines hypothèses. On peut aussi se demander si la limite des distributions est exactement une loi de Poisson lorsque $\mu(U) \to 0$.

On peut par exemple considérer une suite décroissante de voisinages $U_\varepsilon(z)$ d'un point $z \in X$ donné, telle que $\mu(U_\varepsilon(z)) \to 0$. On dira alors, en suivant Hirata qu'un tel point z suit une loi de Poisson lorsque la limite de la distribution est une loi de Poisson. C'est ce qui est effectivement montré dans [Hir93] pour les difféomorphismes de l'Axiome A, et dans [Hir95] pour des points "self-mixing" des systèmes φ-mélangeants. On montrera aux chapitres 5 et 6 grâce aux Théorèmes 3.3 et 3.6 qu'une telle statistique est vérifiée pour des applications qui en général ne sont pas φ-mélangeantes.

En général, il se peut que cette statistique dépende de la suite de voisinage que l'on considère: Pour un système dynamique mesurable muni d'une partition ξ, il est naturel de considérer des voisinages cylindriques. Dans le cas d'endomorphismes d'espaces métriques, les candidats naturels pour les voisinages seront plutôt des boules ouvertes.

On peut ainsi dire que les temps de retour d'un système vérifient la statistique de Poisson si presque sûrement tout point vérifie cette statistique, avec comme voisinages les cylindres ou bien les boules. Remarquons qu'a priori le type de voisinage est important (simplement parce que la vitesse de mélange est fortement influencée par la "forme" des ensembles).

De façon intuitive, le théorème précédent nous dit qu'un système fortement chaotique (avec décorrélation rapide) suit une loi de Poisson. Une éventuelle réciproque à ceci serait tout à fait intéressante. Des études numériques tendent à pousser en faveur de cette hypothèse. De plus, la méthode récemment mise en oeuvre par Young pour étudier des systèmes faiblement hyperboliques fait nettement apparaître le lien étroit existant entre les temps de retour et la vitesse de mélange. Toutefois, une différence essentielle réside dans le fait que l'application induite doit posséder de fortes propriétés de mélange, mais il ne serait pas étonnant qu'une statistique riche de la récurrence implique de façon assez générale un tel mélange.

Chapitre 4

Systèmes recouvrants

Ce chapitre est basé sur un article [LSV96], *Conformal measure and decay of correlations for covering weighted systems* écrit en collaboration avec C. Liverani et S. Vaienti, à paraître dans *Ergodic Theory and Dynamical Systems.*

4.1 Applications monotones par morceaux

Soit $\widetilde{X}$ un ensemble non dénombrable, complètement ordonné. On le munit de la topologie des intervalles (voir l'annexe A).

Avec la σ-algèbre $\mathcal{B}(\widetilde{X})$ des boréliens, $\widetilde{X}$ est un espace mesurable. Soit $B(\widetilde{X})$ l'ensemble des fonctions de $\widetilde{X}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables bornées.

Définition 4.1. *$T : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ est une application monotone par morceaux ssi il existe une partition au plus dénombrable[1] $\mathcal{Z}$ de $\widetilde{X}$ en intervalles telle que pour tout $Z \in \mathcal{Z}$, $T(Z)$ soit un intervalle et $T : Z \to T(Z)$ soit continue et strictement monotone.*

Remarque 4.1.1. *Le fait que l'image de chaque intervalle $Z \in \mathcal{Z}$ soit encore un intervalle est appelé la propriété de Darboux.*

Cette propriété de Darboux est très importante, car c'est elle qui assure la conservation du caractère unidimensionnel du système. On pourrait penser à ce stade que les applications monotones par morceaux sont tout simplement des applications de l'intervalle. En fait, il y a un réel intérêt à rester dans le cadre abstrait des espaces ordonnés. Premièrement, on ne sera pas tenté d'utiliser la structure différentiable de $\mathbb{R}$, qui n'est pas nécessaire ici. De toute façon, le fait d'être sur un intervalle réel ou pas est pertinant pour la mesure de Lebesgue uniquement, et notre intention est d'étudier d'autres mesures de référence. De

1. Notons qu'ici on autorise un nombre infini d'intervalles de monotonie, contrairement à d'autres définitions présentes dans la littérature.

plus, on peut considérer le cas où $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble de Julia d'un répulseur, de dimension non entière.

Enfin, il est possible par un artifice d'obtenir la propriété de Darboux dans des systèmes où celle-ci n'est pas attendue, et qui intrinsèquement ne sont pas du tout unidimensionnels:

Exemple 4.1.1. *On considère le sous-décalage de type fini (Σ_A, σ) sur l'alphabet ordonné $\mathcal{A}$, avec A la matrice de compatibilité. On munit Σ_A de l'ordre lexicographique (voir l'annexe A). Soit $\mathcal{Z}$ la partition de Σ_A par les cylindres de taille deux, i.e. $\mathcal{Z} = \{[ab] | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{A}\}$. Alors (Σ_A, σ) est une application monotone par morceaux, et la propriété de Darboux est vérifiée pour la partition $\mathcal{Z}$.*

On notera $M_T(\widetilde{X})$ l'ensemble des mesures de probabilités sur $\widetilde{X}$ invariantes par T. Considérons alors un potentiel $\varphi : \widetilde{X} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (voir le chapitre 2 pour plus de précisions) tel que le poids $g = \exp(\varphi)$ soit à variation bornée sur $\widetilde{X}$ (voir l'annexe A) et $\sum_{Z \in \mathcal{Z}} \sup_Z g < \infty$.

On peut définir l'opérateur de Perron-Frobenius du système pondéré $(\widetilde{X}, T, \varphi)$ agissant sur les fonctions mesurables bornées $h \in B(\widetilde{X})$ par :

$$Ph(x) = \sum_{y \in T^{-1}\{x\}} g(y)h(y). \tag{4.1}$$

On supposera que le système pondéré $(\widetilde{X}, T, \varphi)$ est recouvrant (c'est une sorte de mélange topologique, voir la définition 4.4).

4.2 Propriétés dynamiques

4.2.1 Présentation

Les mesures invariantes absolument continues par rapport aux mesures conformes, pour les applications unidimensionnelles devraient conserver des propriétés similaires aux mesures de Gibbs pour les systèmes axiome A [Bow75, Rue78, PP90].

C'est pourquoi l'on s'attend à ce qu'elles vérifient de fortes propriétés statistiques (décroissance exponentielle des corrélations, théorème limite central, principes variationnels) et que leur comportement local permet une description fractale et multifractale complète.

Toutefois, la construction des mesures conformes semble problématique. On renvoie à l'introduction de [DU91] pour une description détaillée des méthodes employées pour construire ces mesures.

Pour les systèmes considérés dans ce chapitre, trois méthodes sont disponibles. Soit on regarde la mesure conforme comme un point fixe du dual de l'opérateur de Perron-Frobenius (voir le Théorème 2.2). Dans ce cas, il faut que l'opérateur agisse sur les fonctions continues, ceci est possible par l'adjonction de nouveaux points [Wal78a, HK82a, HK82b]. Dans une autre approche inspirée par Patterson [Pat76] et développée dans [DU91], la mesure conforme est obtenue comme un point d'accumulation d'une suite de mesures construites en pondérant les puissances de l'opérateur de Perron-Frobenius. Une fois la mesure conforme obtenue, on regarde les propriétés spectrales de l'opérateur de transfert sur un espace de Banach judicieusement choisi (typiquement, les fonctions Hölder continues, Zygmund, ou bien à variation bornée); Par un théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (ou directement par compacité) la densité de la mesure invariante est obtenue (on trouvera dans [Kel89] une revue exhaustive de ces méthodes). Mentionnons enfin la thèse de Baladi [Bal89], où par une méthode inspirée par [Kel89], un trou spectral pour l'opérateur implique à la fois l'existence de la mesure conforme et une décroissance exponentielle des corrélations.

L'originalité du présent travail se situe dans la méthode employée. En itérant l'opérateur, on obtient (Théorèmes 4.1 et 4.2), au même moment, la mesure conforme, la densité de la mesure invariante, et une estimation constructive sur le taux de décroissance des corrélations. Cette approche unifiée fonctionne aussi dans le cas de transformations avec un nombre infini de branches inverses. De plus, on obtient une caractérisation variationnelle de la mesure invariante (Théorème 4.3).

Notre méthode n'est pas basée sur des arguments de compacité. On construit une pseudo-métrique (de Hilbert, voir l'annexe A) sur un sous-ensemble de fonctions à variation bornée, pour laquelle l'opérateur devient une contraction. De plus, on peut estimer ce taux de contraction, qui donne alors une borne sur la décroissance des corrélations. On obtient alors la mesure conforme et la densité par les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \nu(h) &= \lim_{n\to\infty} \frac{P^n h}{P^n 1}, \qquad (4.2)\\ h_* &= \lim_{n\to\infty} \frac{P^n 1}{\nu(P^n 1)}. \end{aligned}$$

Remarquons que dans les constructions habituelles, la première étape consiste à prouver l'existence de ν, et l'on montre ensuite qu'elle vérifie la limite (4.2). Au contraire, on prouve directement que cette limite existe, sans étudier explicitement l'opérateur dual.

Une autre particularité de notre méthode réside dans la simplicité avec laquelle on peut traiter les discontinuités (on les ignore, voir définition 4.2), comparée avec d'autres approches dans la littérature (doublage de ces points, classes d'équivalences) qui deviennent problématiques avec un nombre infini de discontinuités.

Pour conclure, cette méthode se révèle particulièrement puissante pour traiter des transformations avec un nombre infini de branches, où peu de résultats existent [BK90, Bro94, Bre96]. Ces travaux sont menés pour des systèmes qui ne sont pas nécessairement recouvrants, ni même transitifs. En particulier, dans

[Bre96] on considère les sous-décalages avec alphabet infini; dans [Bro94] seule la mesure de Lebesgue est considérée. Dans [BK90] des résultats spectraux sont donnés (sans faire référence aux mesures conformes), alors que dans [Ryc83] de tels résultats sont donnés en supposant l'existence de la mesure conforme.

Notons qu'une fois que le résultat sur la décroissance des corrélations est acquis, le théorème limite central pour les observables à variation bornée en découle immédiatement (voir [Liv96]). Par ailleurs, on est capable d'établir un principe variationnel, ce qui est un résultat nouveau pour de tels systèmes.

4.2.2 Résultats

La classe de systèmes dynamiques considérés sera rigoureusement définie dans la définition 4.4 ci dessous. On les appelle "recouvrants" car ils vérifient une sorte de recouvrement topologique, qui rappelle les matrices éventuellement strictement positives issues des partitions de Markov.

Ces systèmes ont été introduits dans [Col84] (applications dilatantes sur un nombre fini d'intervalles) et [Liv95b] sous le nom de "covering", afin d'obtenir une estimation du taux de décroissance des corrélations, pour une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Toutefois, une même analyse est possible pour les autres états d'équilibres [Sau95].

Ici on va diminuer l'hypothèse de "covering" pour permettre des applications avec un nombre infini de branches, et l'hyperbolicité supposée dans [Col84, Liv95b] sera plus généralement donnée par une hypothèse sur le potentiel (voir remarque 4.2.1).

Définition 4.2. *Soit D l'ensemble de discontinuités de l'application monotone par morceaux T, l'union des points extrémaux de Z, $Z \in \mathcal{Z}$. Soient W l'ensemble singulier de T et X définis par*

$$\begin{aligned} W &= \bigcup_{k\geq 0} T^{-k} \bigcup_{j\geq 0} T^{j} D, \\ X &= \widetilde{X} \setminus W. \end{aligned}$$

Notons que W est dénombrable et invariant ($T^{-1}W = W = T(W)$). On munit X de la topologie donnée par les intervalles (l'ordre sur X est la restriction de l'ordre de $\widetilde{X}$). Notons que $T(X) \subset X$.

Notation. Soit $\mathcal{Z}_1 = \{Z \cap X, Z \in \mathcal{Z}\}$. Pour $n > 1$ on dénote par $\mathcal{Z}_n$ la partition $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{Z}_1$, la partition de X sur laquelle T^n est monotone et continue (en fait, T est continue sur X). Notons que, par construction, $\mathcal{Z}_n$ consiste en intervalles ouverts (dans la topologie de X) non vides.

Définition 4.3. *Soit $\varphi : \widetilde{X} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On définit pour tout entier $n \geq 1$, $g_n = \exp(\varphi + \varphi \circ T + \cdots + \varphi \circ T^{n-1})$. On dira que φ est un potentiel contractant si*

(i) g_1 *est à variation bornée (définition A.9) sur* $\widetilde{X}$,
(ii) $S_1 = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \sup_Z g_1 < \infty$,
(iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \sup_{\widetilde{X}} g_{n_0} < \inf_X P^{n_0} 1$,

Remarque 4.2.1. *On définira* $p(\varphi)$ *la pression topologique de* φ *par une limite (définition 4.5). On verra alors que dans notre cas,* $p(\varphi)$ *est donnée par* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P^n 1(x)$ *pour tout* $x \in X$. *Ensuite on montrera (Théorème 4.3) qu'il s'agit bien d'une "pression topologique".*

L'hypothèse faite sur le potentiel est l'analogue de l'hypothèse usuelle $\sup \varphi < p(\varphi)$ *(voir [DKU90, DU91]).*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sup \varphi < p(\varphi) \quad &\Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \sup \varphi < \frac{1}{n_0} \log \inf_X P^{n_0} 1 \\
&\Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exp(n_0 \sup \varphi) < \inf_X P^{n_0} 1 \\
&\Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \frac{\sup g_{n_0}}{\inf_X P^{n_0} 1} < 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Définition 4.4 (système recouvrant). *On dira que le système pondéré* $(\widetilde{X}, T, \varphi)$ *est recouvrant si* T *est une application monotone par morceaux, et pour chaque intervalle non vide* I, *il existe un entier* $N(I)$ *ainsi qu'une constante* $C(I) > 0$ *tels que* $\inf_X P^N \mathbb{1}_I \geq C(I)$.

Remarque 4.2.2. $(\widetilde{X}, T, \varphi)$ *recouvrant implique en particulier que pour tout intervalle* $I \subset \widetilde{X}$ *il existe un* N *tel que* $T^N I \supset X$. *A cause des discontinuités de* T *il est naturel de considérer des systèmes où un intervalle recouvre tout l'espace excepté un ensemble dénombrable* W *après quelques itérations de l'application. En fait, si un système est recouvrant alors pour tout intervalle* $I \subset X$ $\exists N : T^N I = X$. *Si la partition est finie et* φ *est borné inférieurement, alors être recouvrant est équivalent à la propriété suivante* $\forall I \subset X, \exists N : T^N I = X$ *(qui était appelée "covering" dans [Col84, Liv95b]).*

Si le système est recouvrant, tout intervalle ouvert doit contenir un ensemble non-dénombrable de points, et la partition $\mathcal{Z}$ *est génératrice.*

Remarquons que pour des transformations avec une infinité de branches inverses, on ne peut pas étendre l'espace $\widetilde{X}$ *en "doublant" les points de* W, *pour rendre la nouvelle application* T *continue*[2] *(voir [Wal78a, HK82b] pour plus de détails).*

2. Si x est un point d'accumulation de points de D, la limite à gauche ou à droite de T en x peut ne pas exister.

Les autres approches trouvées dans la littérature (classes d'équivalence de fonction [BK90] pour traiter les discontinuités amèneraient de sévères difficultés techniques. Au lieu de doubler ces points, on étudiera l'opérateur sur X.

La définition des systèmes recouvrant pondérés est inspirée par la classe de systèmes dynamiques suivants [Sau95], qui sont une généralisation naturelle des endomorphismes dilatants étudiés dans [Col84, Liv95b]. Cette classe d'applications contient par exemple la transformations de Gauss définie par $x \mapsto 1/x \mathrm{mod}\ 1$, mais la surjctivité de chaque branche de monotonie n'est pas nécessaire.

Exemple 4.2.1. *Une application monotone par morceaux $T : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ et un potentiel qui vérifient les propriétés suivantes forment un système recouvrant:*

(i) $\inf_Z \exp(\varphi) > 0$ *pour tout* $Z \in \mathcal{Z}$.

(ii) quel que soit l'intervalle $I \subset \mathcal{Z}_n$, X peut être recouvert par un nombre fini de morceaux réguliers de $T^N I$, i.e.

$$\forall n\, \forall I \in \mathcal{Z}_n,\ \exists N\, \exists \mathcal{J} \textit{ fini } \subset \mathcal{Z}_N \vee \{I\} \quad \bigcup_{J \in \mathcal{J}} T^N J = X$$

(iii) $\mathcal{Z}$ est génératrice ($\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n = \mathcal{B}$)

Preuve. Soit $K \subset X$ un intervalle. Comme $\mathcal{Z}$ est génératrice, il existe un n et un élément $I \in \mathcal{Z}_n$ avec $I \subset K$. Mais par hypothèse, il existe N et un ensemble fini $\mathcal{J} \subset \mathcal{Z}_N$ tel que $\cup_{J \in \mathcal{J}} T^N J = X$. Par conséquent

$$P^N 1\!\!1_K \geq P^N 1\!\!1_I \geq \inf_{\mathcal{J}} g_N.$$

Pour conclure, on prend $C(K) = \inf_{\mathcal{J}} g_N$. □

l'exemple suivant démontre qu'il est quelquefois suffisant d'avoir l'hypothèse de recouvrement seulement pour une partition dans le cas d'applications dilatantes de l'intervalle $[0, 1]$.

Exemple 4.2.2. *Soit $\widetilde{X} = [0, 1]$, T une application monotone et $C^{(1)}$ par morceaux, avec une partition $\mathcal{Z}$ finie*[3]*. S'il existe un entier K tel que $\inf |DT^K| \geq \gamma > 2$ alors*[4]

$$\forall n\, \forall I \in \mathcal{Z}_n, \exists N(I)\ T^{N(I)}(I) = X \iff \exists N\ \ \forall I \in \mathcal{Z}_K\ T^N I = X\ .$$

3. Lorsque $\mathcal{Z}$ est dénombrable, on a encore ($\Leftarrow$) mais ce n'est pas suffisant pour avoir (ii) de l'exemple 4.2.1. Toutefois, si par exemple $\{T(Z), Z \in \mathcal{Z}\}$ est composé d'un nombre fini d'intervalles, on peut encore montrer que l'assertion (ii) est vraie si la partie droite de l'équivalence est satisfaite.

4. En particulier, cela implique que (iii) de l'exemple 4.2.1 est vérifié.

Preuve. *On notera $|I|$ la longueur d'un intervalle I.*

Soit $n > 0$ et $I \in \mathcal{Z}_n$. Par définition, $J_0 = T^n I$ est un intervalle.

On a alors les trois possibilités suivantes :

(1) J_0 contient un élément de $\mathcal{Z}_K$, donc $T^{N+n}I = X$.

(2) J_0 est contenu dans un élément de $\mathcal{Z}_K$, donc $J_1 = T^K J_0$ est un intervalle de longueur $|J_1| \geq \gamma |J_0|$,

(3) J_0 intersecte deux morceaux $Z, Z' \in \mathcal{Z}_K$. Notons J_0' le plus grand des intervalles $J_0 \cap Z$ et $J_0 \cap Z'$. T^K est monotone sur J_0' donc $J_1 = T^K J_0'$ est encore un intervalle, sa longueur est $|J_1| \geq \frac{\gamma}{2}|J_0|$.

On peut construire, en répétant le même argument, une suite J_k qui satisfait $|J_k| \geq (\frac{\gamma}{2})^k |J_0|$ $\forall k$ jusqu'à ce que (1) arrive. $\square$

Définition 4.5. *La pression d'un système recouvrant pour un potentiel contractant φ est donnée par $p(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log \sup_X P^n 1$. Notons que $p(\varphi)$ est bien définie puisque la suite $\log \sup_X P^n 1$ est sous additive.*

Théorème 4.1. *Soit $(\widetilde{X}, T, \varphi)$ un système recouvrant pour le potentiel contractant φ. Soit $\lambda = \exp p(\varphi)$. P (resp. P^*) en tant qu'opérateur sur $BV(X)$ (resp. $BV(X)^*$) possède des éléments propres positifs (λ, h_*) (resp. (λ, ν)). De plus, pour tout $f \in BV(X)$, $\lambda^{-n} P^n f$ converge exponentiellement vite vers $\nu(f) h_*$.*

Remarquons que ce théorème est obtenu sans aucune hypothèses de compacité. Par contre, à ce point là ν ne peut pas encore être considéré comme une mesure conforme. Si l'on veut exprimer ces résultats en terme de mesures invariantes, il convient de faire une hypothèse supplémentaire (une sorte de compacité), qui nous permet d'utiliser le Théorème A.5 de représentation des formes linéaires positives sur les fonctions à variation bornée par des mesures. On peut maintenant citer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 4.2. *Soit $(\widetilde{X}, T, \varphi)$ un système recouvrant pour le potentiel contractant φ. Si les cylindres forment une famille compacte*[5] *, alors il existe une unique mesure de probabilité invariante μ_φ équivalente à une mesure $e^{p(\varphi)-\varphi}$-conforme ν sans atomes, et les corrélations décroissent exponentiellement vite*[6] *pour les observables à variation bornée : Il existe $\Lambda < 1$ et $C > 0$ (donnés dans la preuve du Théorème) telles que pour tout $f \in L^1_{\mu_\varphi}$ et $h \in BV(\widetilde{X})$*

$$\left| \int f \circ T^n h d\mu_\varphi - \int f d\mu_\varphi \int h d\mu_\varphi \right| \leq C \Lambda^n \|f\|_{L^1_{\mu_\varphi}} \|h\|_{BV}.$$

5. La définition d'une famille compacte est donnée dans l'annexe A.10. Cette notion n'a d'intérêt que lorsque la partition dynamique est infinie. En effet, dans le cas fini, les cylindres forment une famille compacte ssi l'espace lui-même est compact. Les cylindres des sous décalages avec alphabet infini vérifient cette propriété.

6. On montre même un peu plus : $\left\| e^{-np(\varphi)} P^n h - \nu(h) h_* \right\|_\infty < C \Lambda^n \|h\|_{BV(X)}$ pour tout $h \in BV(X)$, et $P h_* = e^{p(\varphi)} h_*$.

Théorème 4.3. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 4.2, μ_φ est l'unique état d'équilibre pour φ:*

$$p(\varphi) = \int (\mathbb{I}_{\mu_\varphi}[\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{B}] + \varphi)d\mu_\varphi = \sup_{m\in M_T(\tilde{X})} \int (\mathbb{I}_m[\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{B}] + \varphi)dm.$$

Où le supremum est obtenu ssi $m = \mu_\varphi$. Ceci justifie donc la définition de $p(\varphi)$ comme une pression topologique.

Remarque 4.2.3. *Le Théorème 4.3 se réduit au principe variationnel usuel si $H_{\mu_\varphi}(\mathcal{Z})$ est finie (voir le chapitre 1).*

$$p(\varphi) = h_{\mu_\varphi}(T) + \int \varphi d\mu_\varphi \geq h_m(T) + \int \varphi dm \quad \forall m \in M_T(\tilde{X}), H_m(\mathcal{Z}) < \infty.$$

Avec l'égalité ssi $m = \mu_\varphi$.

4.2.3 Éléments propres positifs

La preuve des théorèmes 4.2 et 4.3 est décomposée en plusieurs étapes.

Le premier but est d'exhiber un cône $\mathcal{C}$ invariant par P. Ce cône est similaire à celui utilisé dans [Liv95b], pour des mesures absolument continues, et dans [Sau95] pour d'autres états d'équilibre. Afin de prouver cette invariance, on adaptera un lemme de Rychlik [Ryc83], qui généralise le travail initial de Lasota & Yorke [LY73].

Ensuite, on montrera que le diamètre de $P^N\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ devient fini pour un N, donc P^N est une contraction stricte par le Théorème A.7.

Grâce au lemme A.8, on trouve alors que la limite projective de $P^n h$ existe pour $h \in BV(X)$, $h \geq 0$, et est égale à un point fixe (projectif) de P.

Proposition 4.4. *P est un opérateur continu sur $B(X)$ et $BV(X)$.*

Preuve. En utilisant que φ est un potentiel contractant, on obtient par (i) que pour tout f dans $B(X)$

$$\|Pf\|_\infty = \left\| \sum_{Z\in\mathcal{Z}} g_1 \circ T_{|Z}^{-1} f \circ T_{|Z}^{-1} 1\!\!I_{TZ} \right\|_\infty \leq S_1 \|f\|_\infty.$$

L'action continue de P sur $BV(X)$ est une conséquence immédiate du sous lemme 4.9.

□

Lemme 4.5. *Quel que soit l'entier n, g_n vérifie (voir définition 4.3)*

(i) $g_n \in BV(X)$

(ii) $S_n := \sum_{Z\in\mathcal{Z}_n} \sup_Z g_n < \infty$

Preuve. *On montre (i) par récurrence. Supposons que $g_n \in BV(X)$. Puisque $g_{n+1} = g_1 g_n \circ T$ on a*

$$\begin{aligned}
\bigvee_X g_{n+1} &\leq \sum_{Z\in\mathcal{Z}_1} \bigvee_Z g_{n+1} + 2\sup_Z g_{n+1} \\
&\leq \sum_{Z\in\mathcal{Z}_1} \bigvee_Z g_1 \sup_{TZ} g_n + \sup_Z g_1 \bigvee_{TZ} g_n + 2\sup_Z g_1 \sup_{TZ} g_n \\
&\leq (2S_1 + \bigvee_X g_1)\|g_n\|_{BV}.
\end{aligned}$$

On montre aussi (ii) par récurrence. Supposons $S_n < \infty$. Puisque $g_{n+1} = g_n g_1 \circ T^n$,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{Z\in\mathcal{Z}_{n+1}} \sup_Z g_n \sup_{T^nZ} g_1 \\
&\leq \sum_{Z'\in\mathcal{Z}_n} \sum_{Z\in\mathcal{Z}_{n+1}, Z\subset Z'} \sup_{Z'} g_n \sup_{T^nZ} g_1 \\
&\leq \sum_{Z'\in\mathcal{Z}_n} \sup_{Z'} g_n \sum_{Z''\in\mathcal{Z}_1} \sup_{Z''} g_1 \\
&\leq S_n S_1.
\end{aligned}$$

□

Cône de fonctions

On définit pour toute fonction $h \in B(X)$ la quantité $\nu(h)$ par

$$\nu(h) = \lim_{n\to\infty} \inf_{x\in X} \frac{P^n h(x)}{P^n 1(x)}.$$

Notons que $\nu(h)$ est bien définie car la suite bornée $\inf_{x\in X} \dfrac{P^n h(x)}{P^n 1(x)}$ est croissante. On insiste sur le fait qu'à ce point-là ν n'est a priori pas une mesure (elle peut être non linéaire), quand même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ on a $\nu(\lambda h) = \lambda\nu(h)$; $\nu(1) = 1$; pour $h_1, h_2 \in B(X)$ $\nu(h_1 + h_2) \geq \nu(h_1) + \nu(h_2)$; ν est croissante et $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ $\nu(h + \lambda) = \nu(h) + \lambda$.
Considérons le cône convexe (a est un nombre réel positif)

$$\mathcal{C}_a = \left\{ h \in BV(X) \;\middle|\; h \geq 0, \bigvee_X h \leq a\nu(h) \right\}.$$

Remarque 4.2.4. *Ce cône est loin d'être vide, en fait, étant donné $h \in BV(X)$, $h_c = h + c \in \mathcal{C}_a$, pourvu que $c \geq a^{-1}\bigvee_X h - \inf h$.*

On aura besoin également du cône suivant

$$\mathcal{C}_+ = \{h \in BV(X) | h \geq 0\}.$$

Dans ce qui suit, Θ et Θ_+ représentent respectivement les métriques de Hilbert induites par les cônes $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_+$.

Lemme 4.6. *La distance entre deux fonctions $f, h \in \mathcal{C}_+$ est donnée par*

$$\Theta_+(f,h) = \log \sup_{x,y\in X} \frac{f(y)h(x)}{f(x)h(y)}.$$

Preuve. *Soit $f, h \in \mathcal{C}_+$. Il faut trouver λ et μ avec $\lambda f \leq h \leq \mu f$. donc $\lambda \leq \frac{h(x)}{f(x)}$ et $\mu \geq \frac{h(y)}{f(y)}$ pour tout $x, y \in X$, d'où résultat.*

$\square$

Lemme 4.7. *Quels que soient $f, h \in \mathcal{C}_a$ on a $\Theta_+(f,h) \leq \Theta(f,h)$.*

Preuve. *C'est une conséquence du théorème A.7, puisque l'identité I est un opérateur positif de $\mathcal{C}_a$ dans $\mathcal{C}_+$.* $\square$

Lemme 4.8. *Étant donné $\sigma < 1$ il existe un entier N_σ et un nombre réel $a > 0$ tel que $P^m\mathcal{C}_a \subset \mathcal{C}_{\sigma a}$ pour tout $m \geq N_\sigma$.*

Preuve. *On utilisera :*

Sous-Lemme 4.9. *Pour tout entier m, $\exists B_m < \infty$ tel que*

$$\bigvee_X P^m h \leq \eta_m \bigvee_X h + B_m \nu(h)$$

$\forall h \in BV(X), h \geq 0$ *avec* $\eta_m = 9 \sup g_m$.

Preuve. *La preuve suit les grandes lignes de Rychlik (corollaire 3 dans [Ryc83]).*

Par (i) et (ii) du lemme 4.5 on sait que g_m appartient à $BV(X)$ et $S_m < \infty$.

$$\begin{aligned}
\bigvee_X P^m h &\leq \bigvee_X \sum_{Z\in\mathcal{Z}_m} g_m \circ T_{|Z}^{-m} h \circ T_{|Z}^{-m} 1\!\!1_{T^m Z} \\
&\leq \sum_{Z\in\mathcal{Z}_m} \bigvee_X \left(g_m \circ T_{|Z}^{-m} h \circ T_{|Z}^{-m} 1\!\!1_{T^m Z} \right) \\
&\leq \sum_{Z\in\mathcal{Z}_m} \bigvee_X g_m h 1\!\!1_Z \\
&\leq \sum_{Z\in\mathcal{Z}_m} \bigvee_Z g_m h + 2 \sup_Z g_m h \\
&\leq \bigvee_X g_m h + 2 \sum_{Z\in\mathcal{Z}_m} \sup_Z g_m h.
\end{aligned}$$

Prenons alors une suite croissante de points $z_1 < \cdots < z_{q-1} \in X$ tels que sur $Z_1 = \{x \in X, x \leq z_1\}$, $Z_i = [z_{i-1}, z_i]$ pour $i \in [2, \ldots, q-1]$ et $Z_q = \{x \in X, x \geq z_{q-1}\}$, l'intérieur de Z_i soit non vide, $\bigvee_{Z_i} g_m \leq 4\|g_m\|_\infty$ et $\sum_{Z \in \mathcal{Z}_m} \sup_{Z \cap Z_i} g_m \leq 2\|g_m\|_\infty$. On peut réaliser cela de la façon suivante :

On sait que g_m appartient à $BV(X)$. Donc, il existe une suite z_i telle que $\bigvee_X g_m - \|g_m\|_\infty < \sum_{i=1}^q |g_m(z_{i-1}) - g_m(z_i)|$.

Pour ces points-là, on a $\bigvee_{Z_i} g_m \leq 2\|g_m\|_\infty$ (sinon on pourrait trouver une partition plus fine telle que les sommes soient supérieures à la variation, ce qui est impossible). Si Z_1 est d'intérieur vide, on peut l'éliminer. Si Z_2 est d'intérieur vide, on considère l'intervalle $Z_2 \cup Z_3$ au lieu de Z_2. Un tel intervalle contient dans son intérieur le point z_2, donc une quantité indénombrable de points (voir la remarque 4.2.2). On s'intéresse alors à Z_4, et ainsi de suite. Finalement, on élimine Z_q s'il est d'intérieur vide et qu'il n'a pas été joint à Z_{q-1}. Pour simplifier, on appelle encore $\{Z_i\}$ la partition ainsi obtenue.

Remarquons que les éléments de la nouvelle partition consistent, au plus, en une union de deux éléments de l'ancienne, donc $\bigvee_{Z_i} g_m \leq 4\|g_m\|_\infty$.

On raffine alors la partition $\{Z_i\}$ pour que $\sum_{Z \in \mathcal{Z}_m} \sup_{Z \cap Z_i} g_m < 2\|g_m\|_\infty$ (c'est possible car $S_m < \infty$). Il vient alors

$$\begin{aligned}
\bigvee_X P^m h &\leq \sum_{i=1}^q \bigvee_{Z_i} h g_m + 2 \sum_{Z \in \mathcal{Z}_m} \sup_{Z \cap Z_i} g_m h \\
&\leq \sum_{i=1}^q \|g_m\|_\infty \bigvee_{Z_i} h + \|h 1\!\!1_{Z_i}\|_\infty \big(\bigvee_{Z_i} g_m + 2 \sum_{Z \in \mathcal{Z}_m} \sup_{Z \cap Z_i} g_m\big) \\
&\leq \sum_{i=1}^q \|g_m\|_\infty \bigvee_{Z_i} h + 8\|g_m\|_\infty \|h 1\!\!1_{Z_i}\|_\infty \\
&\leq \sum_{i=1}^q 9\|g_m\|_\infty \bigvee_{Z_i} h + 8\|g_m\|_\infty \inf_{Z_i} h \\
&\leq \sum_{i=1}^q 9\|g_m\|_\infty \bigvee_{Z_i} h + 8\|g_m\|_\infty \frac{P^N 1}{P^N 1\!\!1_{Z_i}} \frac{P^N h 1\!\!1_{Z_i}}{P^N 1}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\bigvee_X P^m h &\leq 9\|g_m\|_\infty \bigvee_X h + B_m \inf_X \frac{P^N h}{P^N 1} \\
&\leq \eta_m \bigvee_X h + B_m \nu(h),
\end{aligned}$$

où $N = \max_{i\in[1..q]} N(Z_i)$ *est donné par l'hypothèse de recouvrement, et*

$$B_m \;=\; 8\|g_m\|_\infty \sup_{i\in[1..q]} \sup_{Z_i} \frac{P^N 1}{P^N 1\!\!1_{Z_i}},$$

qui est finie puisque le système est recouvrant. □

Revenons maintenant à la preuve du lemme 4.8. Comme φ *est un potentiel contractant, la suite* $\sup g_m / \inf P^m 1$ *converge vers zéro lorsque* m *tend vers l'infini. Donc il existe* N_σ *tel que pour tout* $m \geq N_\sigma$ *on ait* $\sigma > 9 \sup g_m / \inf P^m 1$. *mais d'après le sous-lemme précédent, pour* $h \in \mathcal{C}_a$

$$\bigvee_X P^m h \leq (\eta_m a + B_m)\nu(h)\ .$$

La conclusion vient alors en comparant $\nu(h)$ *avec* $\nu(P^m h)$. *Soit* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\frac{P^{k+m}h}{P^{k+m}1} \inf P^m 1 \leq \frac{P^{k+m}h}{P^{k+m}1}\frac{P^{k+m}1}{P^k 1} = \frac{P^k P^m h}{P^k 1}.$$

donc $\nu(h) \inf P^m 1 \leq \nu(P^m h)$. *Ceci implique*

$$\bigvee_X P^m h \leq \frac{\eta_m a + B_m}{\inf P^m 1}\nu(P^m h) \leq \sigma a \nu(P^m h)$$

dès que

$$a \geq \frac{B_m}{\sigma \inf P^m 1 - \eta_m}.$$

On conclut que, pour tout $m \geq N_\sigma$, *il existe* a_m *tel que*

$P^m(\mathcal{C}_a) \subset C_{\sigma a} \subset \mathcal{C}_a$ *quel que soit* $a \geq a_m$. *Soit* $a = \max\{a_m\}, m \in [N_\sigma, \ldots, 2N_\sigma[$.

Pour chaque $m \geq N_\sigma$, *on écrit* $m = kN_\sigma + r$ *où* $r \in [N_\sigma, \ldots, 2N_\sigma[$, *ce qui donne*

$$P^m \mathcal{C}_a = P^r P^{kN_\sigma}\mathcal{C}_a \subset P^r \mathcal{C}_a \subset \mathcal{C}_{\sigma a}.$$

□

Diamètre de l'image

Lemme 4.10. *Soit* $\sigma < 1$. *Pour* $h \in \mathcal{C}_{\sigma a}$, *la distance hyperbolique par rapport à la métrique induite par le cône* $\mathcal{C}_a$ *entre* 1 *et* h *est bornée par*

$$\Theta(1,h) \leq \log \frac{\sup h + \sigma\nu(h)}{\min\{\inf h, (1-\sigma)\nu(h)\}}.$$

Preuve. *Soit $h \in C_{\sigma a}$. Pour calculer la distance entre h et 1, il faut trouver λ et μ tels que $\lambda \preceq h \preceq \mu$, où l'ordre est celui donné par le cône $\mathcal{C}_a$.*

$$\begin{aligned}
\lambda \leq h \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} h-\lambda \geq 0 \\ \bigvee(h-\lambda) \leq a\nu(h-\lambda) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda \leq \inf h \\ a^{-1}\bigvee h \leq \nu(h)-\lambda \end{cases} \\
&\Leftarrow \quad \begin{cases} \lambda \leq \inf h \\ \sigma\nu(h) \leq \nu(h)-\lambda \end{cases} \\
&\Leftarrow \quad \lambda \leq \min\left\{\inf h, (1-\sigma)\nu(h)\right\}.
\end{aligned}$$

Pour μ on procède de la même manière

$$\begin{aligned}
h \leq \mu \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu-h \geq 0 \\ \bigvee(\mu-h) \leq a\nu(\mu-h) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu \geq \sup h \\ a^{-1}\bigvee h \leq \mu+\nu(-h) \end{cases} \\
&\Leftarrow \quad \begin{cases} \mu \geq \sup h \\ \sigma\nu(h) \leq \mu - \sup h \end{cases} \\
&\Leftarrow \quad \mu \geq \sup h + \sigma\nu(h).
\end{aligned}$$

On conclut ainsi que $\Theta(1,h) \leq \log\frac{\mu}{\lambda}$. □

Le prochain lemme ([Liv95b], adapté à ν) montre que les fonctions du cône ne peuvent pas être petites trop souvent. Plus précisément

Lemme 4.11. *Étant donné une partition $\mathcal{P}$ de X, si chaque élément $p \in \mathcal{P}$ est un intervalle tel que $b \equiv \sup_{p\in\mathcal{P}} \left\| \frac{P^M(1\!\!I_p)}{P^M 1} \right\|_\infty < \frac{1}{2a}$ pour un certain M, alors quel que soit $h \in \mathcal{C}_a$ il existe $p_h \in \mathcal{P}$ tel que*

$$h(x) \geq \frac{1}{2}\nu(h) \quad \forall x \in p_h.$$

Preuve. *Soit $\mathcal{P}_- = \left\{p \in \mathcal{P} \mid \exists x_p \in p: \ h(x_p) < \frac{1}{2}\nu(h)\right\}$. Il suffit de montrer que $\mathcal{P}_- \neq \mathcal{P}$.*
Supposons le contraire :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \exists x_p \in p, \ h(x_p) < \frac{1}{2}\nu(h).$$

Pour n supérieur à M,

$$P^n(h1\!\!I_p) \leq P^n(1\!\!I_p)\left(h(x_p) + \bigvee_p h\right) < P^n(1\!\!I_p)\frac{\nu(h)}{2} + bP^n 1 \bigvee_p h.$$

Ce qui implique, en sommant sur $p \in \mathcal{P}$ et en divisant par $P^n 1$,

$$\frac{P^n h}{P^n 1} < \frac{\nu(h)}{2} + b \bigvee_X h \leq (\frac{1}{2} + ab)\nu(h).$$

On aboutit à une contradiction lorsque n tend vers l'infini, puisque $\frac{1}{2} + ab < 1$. □

Fixons $\sigma < 1$ et prenons a donné par le lemme 4.8.

Lemme 4.12. *Il existe un entier $N \geq N_\sigma$ tel que le diamètre de $P^N \mathcal{C}_a$ dans $\mathcal{C}_a$ est fini.*

$$\sup_{f,h \in C_a} \Theta(P^N f, P^N h) \leq \Delta < \infty.$$

Preuve. Soit $h \in \mathcal{C}_a$, et $N \geq N_\sigma$ un entier (que l'on fixera plus tard). Pour montrer la finitude du diamètre, il est suffisant de trouver une borne uniforme (indépendante de h) pour le rapport :

$$\frac{\sup P^N h + \sigma\nu(P^N h)}{\min\{\inf P^N h, (1-\sigma)\nu(P^N h)\}} \,.$$

Comme $P^N h \in \mathcal{C}_{\sigma a}$, on a

$$\sup P^N h \leq \nu(P^N h) + \bigvee_X P^N h \leq (1 + \sigma a)\nu(P^N h)\,.$$

Par conséquent, on a seulement besoin d'une borne inférieure pour $\inf P^N h$ en termes de $\nu(P^N h)$.

Soit M tel que $\dfrac{\sup g_M}{\inf P^M 1} < \dfrac{1}{2a}$, M existe puisque φ est un potentiel contractant. Donc pour tout $p \in \mathcal{Z}_M$, $\dfrac{P^M(1\!\!1_p)}{P^M 1} < \dfrac{1}{2a}$.

Si la partition est finie, disons $\mathcal{Z}_M = \{p_0, \ldots, p_L\}$, alors on peut appliquer le lemme 4.11 avec h et $\mathcal{P} = \mathcal{Z}_M$.

Sinon, il est possible d'extraire de $\mathcal{Z}_M$ une partition finie $\mathcal{P}$ qui satisfait les hypothèses du lemme 4.11 de la façon suivante :

Choisissons des intervalles $p_0 \ldots p_l$ de $\mathcal{Z}_M$ tels que $\dfrac{P^M(1 - 1\!\!1_{p_0 \cup \cdots \cup p_l})}{P^M 1} < \dfrac{1}{2a}$. (c'est possible car $P^M 1 = \sum_{p \in \mathcal{Z}_M} P^M 1\!\!1_p \leq \sum_{p \in \mathcal{Z}_M} \left\| P^M 1\!\!1_p \right\|_\infty \leq S_m < \infty$, d'après le lemme 4.5). L'ensemble $X - (p_0 \cup \cdots \cup p_l)$ consiste en une union finie (au plus $l+1$) d'intervalles ouverts non vide, appelons les $p_{l+1} \ldots p_L$. Alors la partition $\mathcal{P} = \{p_0, \ldots, p_L\}$ vérifie les hypothèses du lemme.

On sait que dans les deux cas (fini et infini) il existe un élément $p_h \in \mathcal{P}$ tel que $h(y) \geq \frac{1}{2}\nu(h)$ pour tout $y \in p_h$.

Puisque le système est recouvrant, on peut trouver $N = N(\mathcal{P})$ et une constante $C(N,\mathcal{P})$ tels que $P^N 1\!\!1_p > C$ pour tout $p \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} P^N h &\geq P^N(h 1\!\!1_{p_h}) \\ &\geq \frac{C}{2}\nu(h) \\ &\geq \frac{C}{2\sup P^N 1}\nu(P^N h) \ . \end{aligned}$$

Car $\nu(P^N h) \leq \sup P^N 1 \nu(h)$. On obtient donc

$$\Theta(1, P^N h) \leq \log\left(\frac{1+\sigma+\sigma a}{\min\left\{\frac{C}{2\sup P^N 1}, 1-\sigma\right\}}\right) \quad .$$

La preuve est alors terminée en notant

$$\Delta = 2\log\left(\frac{1+\sigma+\sigma a}{\min\left\{\frac{C}{2\sup P^N 1}, 1-\sigma\right\}}\right) < \infty.$$

$\square$

Densité et mesure conforme

Lemme 4.13. *Il existe $h_* \in \mathcal{C}_{\sigma a}$ et $\lambda > 0$, avec $Ph_* = \lambda h_*$, tel que pour tout $f \in \mathcal{C}_a$,*

$$h_* = \lim_{n\to\infty} \frac{P^n f}{\nu(P^n f)}$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu(P^{n+1} f)}{\nu(P^n f)}.$$

Preuve. Bien évidemment, l'espace $B(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\rho = \nu : \mathcal{C}_a \to \mathbb{R}$ satisfait les hypothèses du lemme A.8.
Soit $f \in \mathcal{C}_a$. Alors $\dfrac{P^n f}{\nu(P^n f)}$ est une suite de Cauchy dans $B(X)$ d'après le lemme A.8.

$$\left\|\frac{P^n f}{\nu(P^n f)} - \frac{P^{n+k} f}{\nu(P^{n+k} f)}\right\|_\infty \leq \left(\mathrm{e}^{\Theta(P^n f, P^{n+k} f)} - 1\right)\left\|\frac{P^n f}{\nu(P^n f)}\right\|_\infty .$$

Si l'on écrit $n = (q+2)N + r$, avec $q = [\frac{n}{N}] - 2$ et $r = n \bmod N$ alors par le théorème de Birkhoff A.7 on voit que

$$\begin{aligned} \Theta(P^n f, P^{n+k} f) &= \Theta((P^N)^q P^{2N+r} f, (P^N)^q P^{2N+r+k} f) \\ &\leq \Lambda_0^q \Theta(P^N P^{r+N} f, P^N P^{r+N+k} f) \\ &\leq \Lambda_0^q \Delta \end{aligned}$$

où $\Lambda_0 = \tanh(\Delta/4)$. *Comme* $P^n f \in \mathcal{C}_{\sigma a}$ *si* n *est assez grand,*

$$\|P^n f\|_\infty \leq \nu(P^n f) + \bigvee P^n f \leq (1+\sigma a)\nu(P^n f).$$

En posant $\Lambda = \Lambda_0^{\frac{1}{N}} < 1$ *et* $K_0 = \Delta\Lambda_0^{-3}$ *on obtient*

$$\left\| \frac{P^n f}{\nu(P^n f)} - \frac{P^{n+k} f}{\nu(P^{n+k} f)} \right\|_\infty \leq \left(\mathrm{e}^{K_0 \Lambda^n} - 1\right)(1+\sigma a). \tag{4.3}$$

Qui va à zéro lorsque n *tend vers l'infini.*
Comme $B(X)$ *est un espace de Banach, il existe une fonction* $h_f \in B(X)$ *avec* $\dfrac{P^n f}{\nu(P^n f)} \to h_f$. *Clairement* $h_f \in BV(X)$, $\nu(h_f) = 1$ *and* $h_f \in \mathcal{C}_{\sigma a}$. *De plus,*

$$P(h_f) = \lim_{n\to\infty} \frac{P^{n+1} f}{\nu(P^n f)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P^{n+1} f}{\nu(P^{n+1} f)} \frac{\nu(P^{n+1} f)}{\nu(P^n f)} = \lambda_f h_f.$$

On montrera maintenant que lorsque $f, g \in C_a$ *on a* $h_f = h_g = h_*$

$$\begin{aligned} \|h_f - h_g\|_\infty &\leq \left(\mathrm{e}^{\Theta(h_f, h_g)} - 1\right)\|h_f\|_\infty \\ &\leq \left(\mathrm{e}^{\Theta(P^n h_f, P^n h_g)} - 1\right)\|h_f\|_\infty \end{aligned}$$

qui va à zéro lorsque n *va à l'infini, ce qui implique que* $\lambda_f = \lambda_g = \lambda$. □

Lemme 4.14. *La fonctionnelle* ν *(restreinte à* $BV(X)$*) est linéaire, positive,* $\nu(Pf) = \lambda\nu(f)$ *pour tout* $f \in BV(X)$ *et* $\lambda = \mathrm{e}^{p(\varphi)}$.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}_a$. *Pour tout* n *et* k *entiers positifs*

$$\begin{array}{ccccc} \frac{P^{n+k} f}{P^n f} & = & \frac{P^{n+k} f}{\nu(P^{n+k} f)} & \frac{\nu(P^{n+k} f)}{\nu(P^n f)} & \frac{\nu(P^n f)}{P^n f} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P^{n+k} f}{P^n f} & = & h_* & \lambda^k & h_*^{-1} \end{array}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{P^{n+k} f}{P^n f} = \lambda^k$. *Mais*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P^n f}{P^n 1} - \frac{P^{n+k} f}{P^{n+k} 1} \right\|_\infty &\leq \sup \frac{P^{n+k} f}{P^{n+k} 1}\left(\frac{P^n f}{P^{n+k} f}\frac{P^{n+k} 1}{P^n 1} - 1\right) \\ &\leq \|f\|_\infty \left(\frac{P^n f}{P^{n+k} f}\frac{P^{n+k} 1}{P^n 1} - 1\right) \end{aligned}$$

et comme les suites $\frac{P^{n+k} f}{P^n f}$ *et* $\frac{P^{n+k} 1}{P^n 1}$ *ont la même limite* λ^k, $\frac{P^n f}{P^n 1}$*est une suite de Cauchy dans* $B(X)$, *donc elle converge vers une fonction* ν_f. *Par ailleurs, si l'on* *prend deux points $x, y \in X$, on a*

$$\begin{aligned}
|\nu_f(x) - \nu_f(y)| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{P^n f}{P^n 1}(x) - \frac{P^n f}{P^n 1}(y) \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{P^n f}{P^n 1}(y) \right| \cdot \left| \frac{P^n f(x) P^n 1(y)}{P^n 1(x) P^n f(y)} - 1 \right| \\
&\leq \|f\|_\infty \limsup_{n\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\Theta_+(P^n f, P^n 1)} - 1 \right) \\
&\leq \|f\|_\infty \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\Theta(P^n f, P^n 1)} - 1 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\nu_f(x) = \nu(f)$ quel que soit $x \in X$. Donc, $\nu(f) = \lim \frac{P^n f}{P^n 1}$ pour tout $f \in \mathcal{C}_a$. Néanmoins, si $f \in BV(X)$, la fonction $(f + a^{-1}\bigvee_X f - \inf f) \in \mathcal{C}_a$, donc $\nu(f) = \lim \frac{P^n f}{P^n 1}$ pour tout $f \in BV(X)$. Clairement, ν est linéaire par la linéarité de la limite. De plus, comme $Pf \in BV(X)$, on sait maintenant que

$$\nu(Pf) = \lim_{n\to\infty} \frac{P^{n+1} f}{P^n 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{P^{n+1} f}{P^{n+1} 1} \frac{P^{n+1} 1}{P^n 1} = \nu(f)\nu(P1) = \lambda \nu(f) \ .$$

Montrons finalement que la pression de φ est égale à $\log \lambda$. D'après le lemme 4.13 on sait que $\dfrac{P^n 1}{\lambda^n} = \dfrac{P^n 1}{\nu(P^n 1)}$ converge uniformément vers la fonction h_*. Par ailleurs, puisque $P^N h_* = \lambda^N h_*$, le même argument utilisé dans le lemme 4.12 permet de montrer que $\inf h_* > 0$. Donc

$$\left\| \frac{1}{n} \log P^n 1 - \log \lambda \right\|_\infty \leq \frac{1}{n} \left\| \log \frac{P^n 1}{\lambda^n} \right\|_\infty$$

est de limite nulle lorsque n tend vers l'infini. En particulier ceci implique que $p(\varphi) = \log \lambda$. □

Preuve. [Théorème 4.1] Découle directement des lemmes 4.13 et 4.14. □

Jusqu'à maintenant, ν n'est pas à proprement parler une mesure conforme, toutefois, elle en possède formellement bon nombre de propriétés. On voudrait alors associer à ν une mesure conforme, et pour ce faire, on a besoin d'un théorème de représentation des fonctionnelles positives par des mesures. Notons que l'on n'utilise pas le théorème de Riesz, car ici les notions de continuité et de compacité locales sont peu adaptées. Par contre, le théorème A.5 donné dans l'annexe tire parti autant que possible de la structure totalement ordonnée de l'espace. C'est seulement ici que l'on utilise une hypothèse de compacité, à savoir que l'ensemble des cylindres forme une famille compacte.

Lemme 4.15. *Si l'ensemble des cylindres forme une famille compacte alors la fonctionnelle ν peut être étendue en une mesure conforme sans atomes, (on note encore ν cette extension)*

$$\int Pf d\nu = \lambda \int f d\nu \quad \forall f \in L^1_\nu(\widetilde{X}).$$

De plus, la mesure $\mu = h_* \nu$ est T–invariante.

Preuve. Comme φ est un potentiel contractant, $\sup_{Z\in\mathcal{Z}_n} \nu(Z)$ est exponentiellement décroissant avec n, donc avec les propriétés du lemme précédent on peut appliquer le théorème de représentation A.5. On sait donc qu'il existe une unique mesure m qui représente ν.

On en déduit alors que $m(Pf) = \nu(Pf) = \lambda\nu(f) = \lambda m(f)$ pour toute fonction f à variation bornée. D'autre part, la fonction d'ensemble définie pour $A \in \mathcal{B}$ par $m'(A) = \int P \mathbb{1}_A dm$ est une mesure (car m est une mesure et P est positif), et comme $m(f) = m'(f)$ pour tout $f \in BV(X)$, l'unicité de m donne $m' = m$.

Pour simplifier, on considère ν comme étant elle-même la mesure m.

$$\int Pf d\nu = \lambda \int f d\nu \quad \forall f \in L^1_\nu(\widetilde{X}).$$

En d'autres termes, ν est une mesure $\lambda e^{-\varphi}$–conforme donc la mesure $\mu = h_*\nu$ est T–invariante. □

Remarque 4.2.5. *On peut montrer que, pour chaque fonction $f \in L^1_\nu(\widetilde{X})$, $\frac{P^n f}{P^n 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^1_\nu(\widetilde{X})$. Toutefois, ceci n'implique pas que sur $B(\widetilde{X}) \cap L^1_\nu(\widetilde{X})$ la mesure ν coïncide avec la fonctionnelle ν originelle, en partie à cause de la présence de l'*inf *dans la définition, qui n'a pas de sens pour des fonctions de L^1_ν.*

Décroissance des corrélations

Comme l'on sait que l'opérateur de Perron-Frobenius converge exponentiellement vite au point fixe h_*, il n'est pas difficile d'en déduire la décroissance exponentielle des corrélations pour les fonctions à variation bornée.

Preuve. [Théorème 4.2] Soit $h \in BV(X)$. On va montrer que pour tout $h \in BV(\widetilde{X})$

$$\left| \int f \circ T^n h d\mu - \int f d\mu \int h d\mu \right| < C \|f\|_{L^1_\nu} \|h\|_{BV} \Lambda^n$$

pour une constante C, où $\Lambda < 1$ est donné par le Lemme 4.13.

En posant $h_c = h + c$ il vient $h_c h_* \in \mathcal{C}_a$ avec

$$c = \frac{1}{(1-\sigma)} \left[(1+\sigma)\|h\|_\infty + (a^{-1} + \sigma) \bigvee_X h \right].$$

En effet,

$$\begin{aligned} \bigvee (h_c h_*) &\leq \bigvee h_c \|h_*\|_\infty + \bigvee h_* \|h_c\|_\infty \\ &\leq (1+\sigma a) \bigvee h + \sigma a \|h\|_\infty + \sigma a c = (c - \|h\|_\infty) a \\ &\leq a\mu(h + c) = a\nu(h_c h_*). \end{aligned}$$

Si l'on suppose que $\mu(h) = 0$, il suffit de montrer que $\mu(f \circ T^n h) \leq C\|f\|_\infty \|h\|_{BV}\Lambda^n$. Or,

$$\begin{aligned}
\mu(f \circ T^n h) &= \nu(f \circ T^n h h_*) \\
&= \nu(f \lambda^{-n} P^n(h h_*)) \\
&= \nu(f(\lambda^{-n} P^n(h_c h_*) - c h_*)) \\
&\leq \|f\|_{L^1_\nu} \left\|\lambda^{-n} P^n(h_c h_*) - c h_*\right\|_\infty \\
&\leq \|f\|_{L^1_\nu} \|c h_*\|_\infty \left(\mathrm{e}^{\Theta(P^n h_c h_*, P^n h_*)} - 1\right).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est donnée par le lemme A.8, puisque $\nu(\lambda^{-n} P^n(h_c h_*)) = c = \nu(c h_*)$. Donc d'après l'inégalité 4.3 dans la démonstration du Lemme 4.13,

$$|\mu(f \circ T^n h)| \leq \|f\|_{L^1_\nu} c(1 + \sigma a)(\mathrm{e}^{K_0 \Lambda^n} - 1)$$

En posant $C_0 = \frac{2K_0(1+\sigma a)}{1-\sigma}$, on obtient

$$\begin{aligned}
|\mu(f \circ T^n h)| &\leq \|f\|_{L^1_\nu} C_0 \left[(1+\sigma)\|h\|_\infty + (a^{-1} + \sigma) \bigvee_X h\right] \Lambda^n \\
&\leq C_0 (2 + a^{-1}) \|f\|_{L^1_\nu} \|h\|_{BV} \Lambda^n.
\end{aligned}$$

Et si h n'est pas de moyenne nulle, $\mu(h - \mu(h)) = 0$ donc

$$\left| \int f \circ T^n h d\mu - \int f d\mu \int h d\mu \right| \leq C_0 \|f\|_{L^1_\nu} 2(2 + a^{-1}) \|h\|_{BV} \Lambda^n$$

Ce qui donne le résultat attendu avec $C = 2(2 + a^{-1})C_0$. (Il est clair que $h \in BV(\widetilde{X})$ entraîne $h|_X \in BV(X)$). □

4.2.4 États d'équilibre

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 4.3. Avec une partition dénombrable, il est possible que l'entropie et l'intégrale du potentiel soient infinies.[7] C'est pourquoi on donne le principe variationnel en terme d'information conditionnelle, ce qui évite le problème d'une entropie infinie. (la stratégie générale est issue de [Led74, Wal78b, Kel89]).

Lemme 4.16. *La pression de φ est égale à $p(\varphi) = \displaystyle\int (\mathbb{I}_\mu[\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{B}] + \varphi) d\mu$.*

7. Par exemple, soit $\{I_1, I_2, \dots\}$ une partition dénombrable de $[0,1]$ en intervalles. Soit alors T l'application linéaire par morceaux telle que $TI_n = [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La mesure de Lebesgue μ est invariante et conforme pour le potentiel $\varphi = -\log|T'|$, et

$$\int \varphi d\mu = -\sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \log |I_n|.$$

Lorsque $|I_n| \sim cn^{-1}(\log n)^\gamma$, qui est sommable pour $\gamma < -1$, on a $|I_n| \log |I_n| \sim cn^{-1}(\log n)^{\gamma+1}$ qui ne l'est plus pour $\gamma > -2$. Donc le potentiel n'est pas intégrable pour $1 < \gamma < 2$.

Preuve. *Il suffit de remarquer que la densité étant bornée, son logarithme est intégrable et l'on peut donc appliquer le Théorème 2.6 avec la partition de monotonie* $\mathcal{Z}$ *et* ν *la mesure conforme*[8] *du système pondéré* $(X, T, \varphi - p(\varphi))$. $\square$

Lemme 4.17. *Principe variationnel: pour tout* $m \in M_T(X)$ *on a*

$$p(\varphi) \geq \int (\mathbb{I}_m[\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{B}] + \varphi) dm$$

avec l'égalité si et seulement si $m = \mu$.[9]

Preuve. *Soit* $m \in M_T(X)$. *on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_m[\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{B}] + \varphi &= -\log g_m + \log g_\mu + p(\varphi) - \log h_* + \log h_* \circ T \\ &= \log \frac{g_\mu}{g_m} + \Phi \end{aligned}$$

où Φ *est une fonction bornée et* $m(\Phi) = p(\varphi)$. *On veut montrer que*
(i) $\log_+ \dfrac{g_\mu}{g_m}$ *est* m*-intégrable,*
(ii) $\displaystyle\int \log \frac{g_\mu}{g_m} \leq 0$.
Commençons par prouver (i).
Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, *où* $\mathcal{F}$ *est l'ensemble des fonctions bornées au support inclus dans un nombre fini d'intervalles de* $\mathcal{Z}$, *on définit*

$$P_m f(x) = \sum_{y \in T^{-1}x} g_m(y) f(y) \quad \forall x \in X$$

comme

$$\mathbb{E}_m[\mathbb{1}_Z|T^{-1}\mathcal{B}] = T_m^*(\mathbb{1}_Z) \circ T$$

on a $P_m f = T_m^* f$, m*-presque partout, pour toute* $f \in \mathcal{F}$.

Remarquons que $g_m > 0$ m*-presque partout, puisque* $g_m = 0$ *sur* $A \subset X$ *implique*

$$\sum_{Z \in \mathcal{Z}} \mathbb{1}_Z T_m^*(\mathbb{1}_Z) \circ T . \mathbb{1}_A = 0$$

par conséquent

$$0 = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \int_{A \cap Z} T_m^*(\mathbb{1}_Z) \circ T dm = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \int T_m^*(\mathbb{1}_{A \cap Z}) T_m^*(\mathbb{1}_Z) dm \geq \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \int |T_m^*(\mathbb{1}_{A \cap Z})|^2 dm$$

et donc $m(A \cap Z) = 0$ *pour tout* $Z \in \mathcal{Z}$.

8. ν est conforme pour $\varphi - \log \lambda$ par le Lemme 4.15 et $p(\varphi) = \log \lambda$ par le Lemme 4.14.

9. En fait $\mu \in M_T(\widetilde{X})$ mais comme μ n'a pas d'atomes, $\mu(X) = 1$ et donc μ peut être vue comme un élément de $M_T(X)$.

$\mathcal{Z}$ étant dénombrable, on peut libeller les intervalles $\mathcal{Z} = \{Z_i, i = 1, 2, ...\}$. Si l'on pose

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in Z_1 \cup \cdots \cup Z_n \text{ et } |\log \frac{g_\mu}{g_m}(x)| < n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et $\chi_+ = \{x \in X | \log \frac{g_\mu}{g_m}(x) \geq 0\}$, comme $\log g_m > -\infty$ m-presque partout et $\sup g_\mu < \infty$, on a

$$\begin{aligned} \int \chi_+ \log \frac{g_\mu}{g_m} dm &= \lim_{n\to\infty} \int F_n \chi_+ \log \frac{g_\mu}{g_m} dm \\ &= \lim_{n\to\infty} \int P_m \left(F_n \chi_+ \log \frac{g_\mu}{g_m} \right) dm \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int P_m \left(F_n \chi_+ (\frac{g_\mu}{g_m} - 1) \right) dm \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left\{ \int P_\mu(F_n\chi_+) dm - \int F_n \chi_+ dm \right\} \leq 1 \end{aligned}$$

puisque $P_m(f\frac{g_\mu}{g_m})(x) = P_\mu f(x)$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Donc $\chi_+ \log \frac{g_\mu}{g_m} \in L^1_m$, ce qui prouve (i).

Montrons alors (ii).

Si $\displaystyle\int \log \frac{g_\mu}{g_m} dm = -\infty$ alors (ii) est prouvé. Sinon, $\log \frac{g_\mu}{g_m} \in L^1_m$.

Dans ce cas, on peut répéter le même calcul sans la fonction caractéristique χ_+, et l'on obtient

$$\int \log \frac{g_\mu}{g_m} dm \leq 1 - \lim_{n\to\infty} \int F_n dm = 0$$

De plus, l'égalité est vraie ssi $g_\mu = g_m$ m-presque partout, c'est-à-dire $P_m f = P_\mu f$ m-presque partout pour tout $f \in BV$. Donc puisque $P_\mu^n f \to \mu(f)$ uniformément et $m(f) = m(P_m^n f)$ on obtient $m(f) = \mu(f)$ pour toute fonction à variation bornée f. Le Théorème A.5 permet alors d'affirmer que $m = \mu$. □

Pour conclure, il faut maintenant montrer que le fait de réintroduire l'ensemble singulier W ne changera pas le résultat du Lemme 4.17.

Preuve. [Théorème 4.3] On a déjà prouvé le principe variationnel pour les mesures invariantes qui ne donnent pas de masse à W. Or, on peut écrire toute mesure $m \in M_T(\widetilde{X})$ comme une combinaison convexe de deux mesures de probabilité invariantes m_a et m_c, où m_a est purement atomique et m_c est continue (W étant dénombrable, $m_c(W) = 0$). On a $m = cm_c + am_a$ où $a, c \geq 0$ et $a + c = 1$. Comme une mesure invariante atomique a la forme (A est un ensemble de points périodiques x_p, de période N_p),

$$m_a = \sum_{p\in A} \sigma_p \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \delta_{T^i x_p}, \quad \sigma_p > 0, \ \sum_{p\in A} \sigma_p = 1$$

on a $\mathbb{I}_{m_a}[\mathcal{Z}|T^{-1}\mathcal{B}] = 0$ *m-presque partout. Puisque* m_c *et* m_a *sont étrangères, on peut choisir* $\mathbb{I}_{m_a} = 0$ m_c*-p.p. et* $\mathbb{I}_{m_c} = 0$ m_a*-p.p. et donc* $\mathbb{I}_m = \mathbb{I}_{m_a} + \mathbb{I}_{m_c} = \mathbb{I}_{m_c}$*. Il vient alors*

$$\begin{aligned}\int \mathbb{I}_m + \varphi dm &= c\int \mathbb{I}_{m_c} + \varphi dm + a\sum_{p\in A}\sigma_p \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\varphi(T^i x_p)\\ &\leq cp(\varphi) + a\sum_{p\in A}\sigma_p\frac{1}{N_p}\log g_{N_p}(x_p)\\ &\leq cp(\varphi) + a\sum_{p\in A}\sigma_p\frac{1}{nN_p}\log(\sup g_n)^{N_p}.\end{aligned}$$

Comme φ *est un potentiel contractant, il existe un nombre réel* s*,* $0 < s < 1$*, tel que* $\sup g_n \leq s^n \inf_X P^n 1$ *pour* n *assez grand. Par conséquent, si* $a > 0$*,*

$$\int \mathbb{I}_m + \varphi dm \leq cp(\varphi) + a\sum_{p\in A}\sigma_p\left(\log s + \frac{1}{n}\log\inf_X P^n 1\right) < p(\varphi).$$

(la cas $a = 0$ *est réglé par le Lemme 4.17).* $\square$

Chapitre 5

Hyperbolicité non uniforme : phénomène d'intermittence

Ce chapitre comporte en premier lieu un article [LSV97], rédigé en anglais, *A probabilistic approach to intermittency* écrit en collaboration avec Carlangelo Liverani et Sandro Vaienti, à paraître dans *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. On s'intéresse aux propriétés statistiques d'une famille d'applications de l'intervalle non-uniformément hyperboliques, où la non-uniformité est due à la présence d'un point fixe neutre. On appelle ces applications intermittentes, car les orbites typiques (par rapport à la mesure de Lebesgue) passent un temps très long près du point fixe neutre.

Ensuite, on étudiera plus en détail les conséquences des théorèmes annoncés dans cet article. En particulier, on montrera la propriété de Bernoullicité faible pour la partition dynamique dénombrable. On verra aussi comment ces résultats entraînent que la distribution des temps de retour dans des voisinages est exponentielle. Ce dernier point avait été montré en collaboration avec Masaki Hirata et Sandro Vaienti, dans une note, où les conditions du papier [Hir95] étaient affaiblies afin d'être vérifiées par ce genre d'applications intermittentes. Tout ceci était annoncé dans le compte rendu de conférence [PSV98] (ou l'on s'est intéressé aussi à d'autres caractéristiques des temps de retour).

La méthode directe employée au chapitre 3 nous permet de donner non seulement des lois limites, mais aussi des estimations à taille finie. On montrera alors que la distribution limite des temps de premier retour dans un petit voisinage est une loi exponentielle, et que la distribution limite du nombre de visites dans un petit voisinage est une loi de Poisson. De plus, on obtiendra un contrôle précis de la vitesse de convergence vers la limite.

5.0 Introduction

Recently the study of the convergence to the equilibrium in hyperbolic systems has witnessed several new results ranging from new methods to treat systems with singularities [Liv95a], [You] or with partially hyperbolic behavior [BY], to methods for studying Anosov flows [Che], [Dol], [Liv97].

Thanks to such results we can now regard the study of the decay of correlations for uniformly hyperbolic systems as reasonably understood (albeit there is much room for improvements, especially as flows and dependence on smoothness of observable are concerned). On the contrary the available results on the convergence to the equilibrium in non-uniform hyperbolic systems are extremely unsatisfactory. The study of such systems stands as a challenge. In particular, it is evident the need to develop new strategies to investigate such problems.

This is the focus of the present paper where we study a one parameter family of intermittent maps. These applications are expanding, except at a neutral fixed point, where hyperbolicity is lost. The local behavior of the map at this point is responsible for various phenomenon. Let us denote by $1 + \alpha$ the order of the tangency at the critical point. For $\alpha = 0$ we have a purely expanding map, which has a unique equilibrium state for the potential $\varphi = -\log DT$, with exponential decay of correlations. For $0 < \alpha < 1$, the map possess an absolutely continuous probability measure (SRB measure), which is still an equilibrium state (it is no more unique, since the Dirac mass at the origin is invariant and $\delta_0(\varphi) = 0$). For $\alpha \geq 1$, there are no absolutely continuous invariant probability measure, whereas one still has a σ-finite absolutely invariant measures [Tha80, PS92].

We focus here on the second region of the parameter, and propose to find the density of the invariant measure, and the rate of decay of the correlation functions. In this domain, one cannot expect a spectral gap for the Perron-Frobenius operator (see the end of section 4), therefore none of the usual strategies in this setting can be followed. Our approach is based on the following philosophy : sure, the map is not hyperbolic, but it is the case nearly everywhere; thus, if we perform a random perturbation of the map, the neutral fixed point should be lost in a cloud of hyperbolic points and the intermittent effect could be suppressed. This naive argument, rather surprisingly, works.

An interesting property of such a method is the following. For smooth expanding maps, the same idea can be carried out, but yields a sub-exponential rate of decay, while the decay is well known to be exponential. On the contrary, in the present case, the power law found appears to be near optimal, as remarked in section 4.

This is an indication that our crude approach performs better in the non-uniform case than in the uniform one. These considerations are at the base of our belief that this type of strategy could yield relevant results in more general situations.

The plan of the paper is as follows: In section one we present our model and discuss some related literature. Section two is devoted to the study of the invariant measure. The section may have an interest in itself since it gives a very direct approach to obtaining the invariant measure and its properties for such a map (for a comparison with other techniques see [CF90, Tha80]). Section three introduces the key idea of the paper, that is the random perturbation and its instrumental properties. In section four we harvest the facts from the previous sections and obtain the announced result. In addition, we point out that our results suffice to establish the CLT for $C^{(1)}$ observable, provided that $\alpha < 1/2$ (Remark 4.2-(3)). The last section contains few considerations on how to treat the general problem of expanding maps with neutral fixed points. Since the focus of the present paper is on the method and not on the class of one-dimensional maps to which it can be applied, we content ourselves with few pointed, but sketchy, considerations.

5.1 The model

Let us consider for $0 < \alpha < 1$ the map $T : [0, 1] \to [0, 1]$

$$T(x) = \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha) & \forall x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & \forall x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

The importance of this kind of intermittent maps was addressed by Prellberg and Slawny in [PS92], where the relationship with a statistical model introduced by Fisher [FF70] and successively studied by Gallavotti [Gal76] was emphasized. In the papers [GW88], [Wan89], the dynamical behavior of these maps was taken as a model for the intermittency of turbulent flows [PM80]. In the paper [PS92] several mathematical results were announced, concerning the ergodic and statistical properties of such maps, notably the presence of phase transitions for the topological pressure (see also [Lop93]). The paper [Wan89] deals with a piecewise linear version of the map and focus especially on the recurrence properties of the orbits. These latter properties have been put on a solid mathematical basis by Collet, Galves and Schmitt in [CGS92] in the piecewise linear case, and by Campanino and Isola for the non-linear (σ-finite) case [CI95, CI96, CI94]. The problem of the decay of correlations was considered in the piecewise linear case and for the finite absolutely continuous (w.r.t. Lebesgue) measure in [LSV93] and [Mor93]. Both papers obtain an algebraic ($n^{-\gamma}$) upper bound for the decay of correlations, the first by using Markov approximations [some results were successively improved by Chernov in [Che95]], the second by exhibiting the absence of spectral gap for the Perron-Frobenius operator using the induction procedure, already invoked in [PS92] (it is interesting to remark that Mori's work follows the analysis of these maps carried out by Takahashi in a series of papers [Tak81, Tak85]).

The decay of correlations for the non-linear case is a more difficult problem. In our knowledge, the following methods have been proposed.

In the paper [Yur96], Yuri applied Markov approximations, generalizing the works of [LSV93] and [Che95]; the paper [Iso] aims to extend to the non-linear case the approach of Mori, still inducing, and gives a description of the *zeta* function, and finally in [FS] the authors propose an interesting technique based on Hilbert metrics, yet the implementation of such an idea is still incomplete.

Let us go back to our particular model. In the next section, we will prove that there exists[1] a locally Lipschitz function $h \in C^{(0)}(]0,1]) \cap L^1([0,1])$ such that $Ph = h$.

5.2 An invariant Cone

If we define the cone $\mathcal{C}_0 = \{f \in C^{(0)}(]0, 1]) \mid f \geq 0, f \text{ is decreasing}\}$ it is immediate to see that $\mathcal{C}_0$ is left invariant by the P-F operator. To see a bit more let us call X the identity, $X(x) = x$.

Lemma 5.2.1. *The cone* $\mathcal{C}_1 = \{f \in \mathcal{C}_0 \mid X^{\alpha+1}f \text{ is increasing}\}$, *is left invariant by the operator* P.

Proof. Let $f \in \mathcal{C}_1$, *then*

$$x^{\alpha+1}Pf(x) = \sum_{y \in T^{-1}x} \left(\frac{Ty}{y}\right)^{\alpha+1} \frac{y^{\alpha+1}f(y)}{D_yT}.$$

Setting $T^{-1}x = \{y_1, y_2\}$, $y_1 \leq y_2$, *and* $\xi = 2^\alpha y_1^\alpha$ *we can write*

$$x^{\alpha+1}Pf(x) = \frac{(1+\xi)^{\alpha+1}}{1+(\alpha+1)\xi}\, y_1^{\alpha+1}f(y_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2y_2 - 1}{y_2}\right)^{\alpha+1} y_2^{\alpha+1}f(y_2).$$

Whence the result, since $X^{\alpha+1}f$, $x \mapsto y_1$, $x \mapsto \xi$, $x \mapsto y_2$ *are increasing.* □

Let us define

$$m(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Obviously $m(Pf) = m(f)$.

The last interesting property is contained in the following.

Lemma 5.2.2. *The cone* $\mathcal{C}_* = \{f \in \mathcal{C}_1 \cap L^1([0, 1]) \mid f(x) \leq ax^{-\alpha}m(f)\}$ *is invariant with respect to the operator* P, *provided* a *is chosen large enough.*

---

1. Such a result can also be obtained by inducing [Tha80]. The method used here is more direct and provides additional informations on the properties of the invariant density, although such extra informations will not be essential in the following. See section five for a more detailed discussion.

Proof. *For each $f \in \mathcal{C}_*$ holds both*

$$f(x) \leq a x^{-\alpha} m(f),$$

and

$$x^{\alpha+1} f(x) \leq f(1) \leq \int_0^1 f = m(f).$$

Let us suppose for simplicity that $m(f) = 1$. One has to find a constant a, independent of f, such that $Pf(x) \leq a x^{-\alpha}$ since $m(Pf) = m(f) = 1$.

$$\begin{aligned} Pf(x) =& \frac{f(y_1)}{D_{y_1}T} + \frac{f(y_2)}{D_{y_2}T} \\ \leq& \frac{a y_1^{-\alpha}}{D_{y_1}T} + \frac{y_2^{-\alpha-1}}{D_{y_2}T} \\ \leq& \left\{ \left(\frac{x}{y_1}\right)^{\alpha} \frac{1}{D_{y_1}T} + \frac{1}{a} \frac{x^{\alpha}}{y_2^{\alpha+1} D_{y_2}T} \right\} a x^{-\alpha}. \end{aligned}$$

The term in curly bracket is bounded by[2]

$$\frac{(1+\xi)^{\alpha}}{1+(\alpha+1)\xi} + \frac{2^{\alpha}}{a}\xi \leq \frac{1+\alpha\xi+\frac{2^{\alpha}}{a}\xi(1+(\alpha+1)\xi)}{1+(\alpha+1)\xi} \leq \frac{1+\left(\alpha+\frac{2^{\alpha}(\alpha+2)}{a}\right)\xi}{1+(\alpha+1)\xi} \leq 1.$$

Whenever $a \geq 2^{\alpha}(\alpha+2)$, from which the Lemma follows. □

Putting together all the previous estimates yields

Lemma 5.2.3. *There exists a locally Lipschitz function h such that $Ph = h$ and $h(x) \leq a x^{-\alpha}$.*

Proof. *The operator P leaves invariant the set $K = \{f \in \mathcal{C}_* \mid m(f) = 1\}$. But $X^{\alpha+1}K$ consists of equibounded equicontinuous functions,*[3] *hence it is compact in $C^{(0)}$. Accordingly, for each $f \in K$ the sequence $X^{\alpha+1}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^i f$ has accumulations points in $C^{(0)}$. Let $h_* \in K$ be such an accumulation point. Clearly, $h = X^{-1-\alpha} h_*$ is a fixed point of P, hence the result. The regularity of h is easily obtained by checking that $h \in \mathcal{C}_*$.* □

2. Since $\frac{x^{\alpha}}{y_2^{\alpha+1} D_{y_2}T} \leq \frac{y_1^{\alpha}(1+\xi)^{\alpha}}{2^{-\alpha-1}2} \leq \xi(1+\xi)^{\alpha} \leq 2^{\alpha}\xi$.

3. Let $f \in K$ and define $\varphi(x) = x^{1+\alpha} f(x)$, then, for $x \geq y$, holds

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(x) - \varphi(y) &\leq (x^{1+\alpha} - y^{1+\alpha}) f(x) \leq a(1+\alpha) x^{-\alpha} \int_y^x \xi^{\alpha} d\xi \\ &\leq a(1+\alpha)|x-y|. \end{aligned}$$

Before introducing the random approximation to our dynamics let us remark a property of the functions in $\mathcal{C}_*$ that will be instrumental in the following.

Lemma 5.2.4. *For each function $f \in \mathcal{C}_*$,*

$$\inf_{x\in[0,\ ,1]} f(x) = f(1) \geq \min\left\{a,\ \left[\frac{\alpha(1+\alpha)}{a^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}\int_0^1 f.$$

Proof. *It clearly suffices to consider the case $\int_0^1 f = 1$. We have already seen that*

$$f(x) \leq ax^{-\alpha},$$
$$f(x) \leq x^{-1-\alpha} f(1).$$

We introduce the point $x_* = a^{-1}f(1)$. On its left the first inequality is stricter and the opposite holds on its right. If $x_* > 1$, then $f(1) > a$, otherwise

$$1 = \int_0^1 f = \int_0^{x_*} f + \int_{x_*}^1 f \leq \int_0^{x_*} a\xi^{-\alpha} + \int_{x_*}^1 \xi^{-1-\alpha} f(1) \leq \frac{a^\alpha}{\alpha(1-\alpha)} f(1)^{1-\alpha},$$

from which the lemma follows. □

5.3 A Random Perturbation

For simplicity let us identify $[0,1]$ with the circle S^1, on S^1 the map is not smooth but it is continuous (this is not essential but it will make our life a bit easier). Let us define the "ball" $B_\varepsilon(x) = \{y \in S^1 \mid |x-y| \leq \varepsilon\}$ and the averaging operator[4]

$$\mathbb{A}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy.$$

It is now possible to define the perturbed operator

$$\mathbb{P}_\varepsilon = P^{n_\varepsilon}\mathbb{A}_\varepsilon,$$

where $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ will be specified later.

The following Lemma shows that the perturbed operator is not too different from the original one, provided we consider observables in $\mathcal{C}_*$.

Lemma 5.3.1. *For each $f \in \mathcal{C}_*$*

$$\|P^{n_\varepsilon} f - \mathbb{P}_\varepsilon f\|_1 \leq c_1 \|f\|_1 \varepsilon^{1-\alpha}.$$

Where $c_1 = \frac{10a}{\alpha(1-\alpha)}$.

---

4. Let us remark that this particular choice of $\mathbb{A}_\varepsilon$ has nothing special, any other "reasonable" choice would do as well.

Proof. *We assume that* $f \in \mathcal{C}_*$ and $\int f = 1$. *First, observe that*

$$\|P^{n_\varepsilon} f - \mathbb{P}_\varepsilon f\|_1 \le \|f - \mathbb{A}_\varepsilon f\|_1.$$

Next, we recall the estimates

$$\begin{aligned} f(x) \le & a x^{-\alpha} \\ \frac{f(y)}{f(x)} \le & \left(\frac{x}{y}\right)^{1+\alpha} \qquad \forall x \ge y. \end{aligned}$$

This allows us to bound the L^1 *norm of the difference between the function* f *and its average.*

$$\begin{aligned} \|f - \mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 \le & \frac{1}{2\varepsilon} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} dx \int_{B_\varepsilon(x)} dy \; |f(y) - f(x)| + \int_{B_\varepsilon(0)} dx \left| f(x) - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} dy \; f(y) \right| \\ \le & \frac{1}{2\varepsilon} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} dx \left\{ \int_{x-\varepsilon}^{x} dy [f(y) - f(x)] + \int_x^{x+\varepsilon} dy [f(x) - f(y)] \right\} \\ & + \int_{B_\varepsilon(0)} f(x) dx + \int_{B_{2\varepsilon}(0)} f(y) dy \\ \le & \frac{1}{2\varepsilon} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} dx \int_{x-\varepsilon}^{x} dy f(y) \left[1 - \frac{f(y+\varepsilon)}{f(y)} \right] + 4a \int_0^{2\varepsilon} x^{-\alpha} dx \\ \le & \frac{a}{2(1-\alpha)\varepsilon} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} dx \left(2x^{1-\alpha} - (x+\varepsilon)^{1-\alpha} - (x-\varepsilon)^{1-\alpha} \right) \\ & + \frac{a}{2\alpha} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} dx \left(x^{-\alpha} - (x+\varepsilon)^{-\alpha} \right) + \frac{4a}{1-\alpha} (2\varepsilon)^{1-\alpha} \\ \le & \frac{a}{2(1-\alpha)(2-\alpha)\varepsilon} \left\{ (2\varepsilon)^{2-\alpha} - 2\varepsilon^{2-\alpha} - (1-2\varepsilon)^{2-\alpha} - 1 + 2(1-\varepsilon)^{2-\alpha} \right\} \\ & + \frac{a}{2\alpha(1-\alpha)} \{ 2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha} - 1 - \varepsilon^{1-\alpha} + (1-\varepsilon)^{1-\alpha} \} + \frac{8a}{1-\alpha} \varepsilon^{1-\alpha} \\ \le & \frac{10}{\alpha(1-\alpha)} \varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

This proves Lemma 5.3.1. □

Next,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\varepsilon f(x) = & \sum_{y \in T^{-n_\varepsilon} x} \frac{1}{2\varepsilon D_y T^{n_\varepsilon}} \int_0^1 dz \chi_{B_\varepsilon(y)}(z) f(z) \\ = & \sum_{y \in T^{-n_\varepsilon} x} \frac{1}{2\varepsilon D_y T^{n_\varepsilon}} \int_0^1 dz \chi_{B_\varepsilon(z)}(y) f(z) \\ = & \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 dz P^{n_\varepsilon} \chi_{B_\varepsilon(z)}(x) f(z) \\ := & \int_0^1 \mathcal{K}_\varepsilon(x, z) f(z) dz. \end{aligned}$$

Our task is to find a lower bound for the kernel $\mathcal{K}_\varepsilon(x, z)$. For this purpose, let us define T_1 to be the map T restricted to the interval $[0, 1/2]$ and $a_n = T_1^{-n}1$. We have the following asymptotic bound for the sequence a_n.

Lemma 5.3.2. *For all integer $n > 0$ the following holds*

$$a_n \leq 2^{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}} n^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Proof. The Lemma is proven by induction. First it is clearly satisfied for $n = 1$. Next, let us suppose that $a_n < cn^{-\frac{1}{\alpha}}$, and let us prove that $a_{n+1} < c(n+1)^{-\frac{1}{\alpha}}$. If it is false, then

$$a_n = a_{n+1}(1 + 2^\alpha a_{n+1}^\alpha) \geq c(n+1)^{-\frac{1}{\alpha}}(1 + 2^\alpha c^\alpha (n+1)^{-1}).$$

By the assumption on a_n we obtain

$$n^{-\frac{1}{\alpha}} \geq (n+1)^{-\frac{1}{\alpha}}(1 + \frac{2^\alpha c^\alpha}{n+1})$$

or equivalently

$$(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1 + \frac{2^\alpha c^\alpha}{n+1}.$$

By convexity it follows

$$(2^{\frac{1}{\alpha}} - 1)\frac{1}{n} \geq \frac{2^\alpha c^\alpha}{n+1},$$

that is

$$c^\alpha \leq 2^{-\alpha}(2^{\frac{1}{\alpha}} - 1)\frac{n+1}{n} \leq 2^{-\alpha+1}(2^{\frac{1}{\alpha}} - 1),$$

which is contradictory if we choose $c = 2^{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}}$. □

We define $\Delta_k = [a_k, a_{k-1}]$ for each $k > 0$. We are now able to prove

Proposition 5.3.3. *There exists $\gamma > 0$ such that for each $\varepsilon > 0$, $x, z \in S^1$*

$$\mathcal{K}_\varepsilon(x, z) \geq \gamma,$$

provided we choose $n_\varepsilon = [2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}] + 1$.[5]

Proof. First of all, we choose $k_0 = 3$. Next, notice that for each interval J and integer m

$$(P^m \chi_J)(x) \geq \chi_{T^m J}(x) \inf_{y \in J}(D_y T^m)^{-1}.$$

Let $\delta_0 = a_{k_0} - a_{k_0+1}$. By Lemma 5.2.4 it is obvious that there exists n_0 and c_0 such that for all intervals I of size larger than δ_0 holds

$$P^n \chi_I \geq c_0$$

5. Here the square braket stands for the integer part.

provided $n \geq n_0$. Thus the task is to control the $\inf_{y\in J}(D_yT^m)^{-1}$*, where m is the time needed for the interval J to become an interval of size δ_0. Let $I_0 = [0, a_{k_0}]$. Let J be an interval, three possibilities can occur:*

(1) $J \cap I_0 = \emptyset$.

(2) $J \cap I_0 \neq \emptyset$ and J contains, at most, one a_k for $k > k_0$.

(3) J contains more than one a_k for $k > k_0$.

We can associate to each J a sequence $n_1, k_1, \dots, k_{p-1}, n_p$ of integers (n_1 may be null), retracing the trajectory of J in the following way: For a time n_1 (1) holds, then the image of J enters the intermittent region I_0 and (2) holds with $k = k_1 + k_0$, so after k_1 iterations it exits from I_0. Then the image of J stays in the hyperbolic region for n_2 iterations, and so on... Finally we end when the size of the interval becomes larger than δ_0 or if case (3) happens. Let us see what happens in this regimes.

1. *Let* $D = \sup_{y\in[a_{k_0+1},1]} \dfrac{D_y^2T}{D_yT^2}$ *and* $r = (D_{a_{k_0+1}}T)^{-1} < 1$*. For $n \leq n_1$, the usual distortion estimates yield, for each $y \in J$, with $c_2 = D/(1-r)$,*

$$\frac{D_yT^n|J|}{|T^nJ|} \leq \mathrm{Exp}[c_2|T^nJ|].$$

2. *Let $J_1 = T^{n_1}J$. Let us see what happens in the intermittent region. Suppose that $J_1 \subset]a_{k+1}, a_{k-1}[$, i.e. (2) occurs with $k = k_0 + k_1$. In this case a direct computation for $j \leq k_1$ and $y_1, y_2 \in J_1$ implies*

$$\begin{aligned}
\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq & \mathrm{Exp}\left[\sum_{i=1}^{k_1} \frac{\sup_{\xi\in[a_{k-i+2},a_{k-i}]} D_\xi^2T}{\inf_{\xi\in[a_{k-i+2},a_{k-i}]} D_\xi T}|T^iy_2 - T^iy_1|\right] \\
\leq & \mathrm{Exp}\left[\sum_{i=1}^{k_1} \alpha(1+\alpha)a_{k-i+2}^{\alpha-1}(D_{a_{k+2-i}}T^{k_1-i})^{-1}|T^{k_1}J_1|\right] \\
\leq & \mathrm{Exp}\left[\alpha(\alpha+1)\sum_{q=k_0+2}^{k_0+k_1+1} a_q^{\alpha-1}(D_{a_q}T^{q-(k_0+2)})^{-1}|T^{k_1}J_1|\right].
\end{aligned}$$

Since the first branch of the map is convex, we have

$$D_{a_q}T^{q-(k_0+2)} \geq r\frac{a_{k_0+1} - a_{k_0+2}}{a_{q-1} - a_q} = ra_{k_0+2}^{1+\alpha}a_q^{-(1+\alpha)}.$$

Moreover, Lemma 5.3.2 gives $a_q^{2\alpha} \leq 2^{2+2/\alpha}q^{-2}$. This yields, setting $c_3 = \dfrac{\alpha(1+\alpha)2^{2+2/\alpha}}{ra_{k_0+2}^{1+\alpha}}$,

$$\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq \mathrm{Exp}\left[c_3|T^{k_1}J_1|\right].$$

3. *Finally, let us see what happens if (3) holds for some iterate $K = T^j J$. If more than one third of the size of K is in $[a_1, 1]$, then we consider $K \cap [a_1, 1]$ and case (1) will hold for ever, loosing just factor $1/3$. Else we cut K into pieces $\Delta_{k_-}, \cdots, \Delta_{k_+}$ such that the union of them is of size bigger than $|K|/3$. For these Δ_k, the preceding computation yields*

$$P^{k-k_0}\chi_{\Delta_k} \geq \chi_{\Delta_{k_0}} \frac{\mathrm{Exp}[-c_3|\Delta_{k_0}|]}{|\Delta_{k_0}|}|\Delta_k|.$$

Therefore, with $l = n_0 + k_+ - k_0$,

$$P^l\chi_K \geq \sum_{k=k_-}^{k_+} P^{l+k_0-k}P^{k-k_0}\chi_{\Delta_k} \geq \sum_{k=k_-}^{k_+} c_0\frac{\mathrm{Exp}[-c_3\delta_0]}{\delta_0}|\Delta_k| \geq c_0\frac{\mathrm{Exp}[-c_3\delta_0]}{\delta_0}\frac{|K|}{3}.$$

Since we control what happens on each region, it is possible to estimate the total distortion after $m = n_1 + k_1 + \cdots + n_p + l$ iterations, where $l = n_0$ if case (3) never happens ($l = n_0 + k_+ - k_0$ if case (3) occurs).

$$\begin{aligned}
P^m\chi_J \geq& P^l P^{n_p}P^{k_{p-1}}\cdots P^{n_2}P^{k_1}P^{n_1}\chi_J\\
\geq& |J|\frac{c_0}{3\delta_0}\mathrm{Exp}\left[-c_3\delta_0 - c_2|T^{n_p+\cdots+k_1+n_1}J| - \cdots - c_3|T^{k_1+n_1}J| - c_2|T^{n_1}J|)\right]\\
\geq& |J|\frac{c_0}{3\delta_0}\mathrm{Exp}\left[-(c_2+c_3)\delta_0(1 + r^{n_p} + r^{n_p+n_{p-1}} + \cdots + r^{n_p+n_{p-1}+\cdots+n_2})\right]\\
\geq& |J|\frac{c_0}{3\delta_0}\mathrm{Exp}\left[\frac{-(c_2+c_3)\delta_0 r}{1-r}\right] := \gamma|J|.
\end{aligned}$$

To conclude, we need to fix n_ε. We choose the supremum over all possible values of $m = n_1 + k_1 + \cdots + n_p + l$, associated to intervals J of size 2ε. It is immediate to see that the worst case scenario is when case (3) happens at the beginning, and $J =]-2\varepsilon/3, 4\varepsilon/3[$. In this case, m is such that $a_{k_0+m} \leq 2\varepsilon/3$. Clearly, $n_\varepsilon = [2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}] + 1$ is large enough and the Lemma is proven. □

5.4 Decay of Correlations

Proposition 5.3.3 allows immediately to conclude that $\mathbb{P}_\varepsilon$ has an invariant density h_ε to which it converges exponentially fast[6] in L^1. In the following we

6. Let us briefly recall the argument: set $\Omega = [0, 1]$ and consider $f \in L^1(\Omega)$ with $\int_\Omega f = 0$. Remember that $\mathbb{P}_\varepsilon 1 = \mathbb{P}_\varepsilon^* 1 = 1$ and let $\Omega_\varepsilon^+ = \{x \in \Omega \mid \mathbb{P}_\varepsilon f \geq 0\}$; $\Omega_+ = \{x \in \Omega \mid f \geq 0\}$, then

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{P}_\varepsilon f\|_1 &= 2\int_{\Omega_\varepsilon^+} dx \int_\Omega dy \mathcal{K}_\varepsilon(x,y)f(y) = 2\int_\Omega dy f(y)\int_{\Omega_\varepsilon^+} dx[\mathcal{K}_\varepsilon(x,y) - \gamma]\\
&\leq 2\int_{\Omega_+} dy f(y)\int_\Omega dx[\mathcal{K}_\varepsilon(x,y) - \gamma] = (1-\gamma)2\int_{\Omega_+} dy f(y)\\
&= (1-\gamma)\|f\|_1.
\end{aligned}$$

will call μ the invariant measure $d\mu = hdx$. Using all the above facts, we are able to prove our main result.

Theorem 5.4.1. *For all $g \in L^\infty$, $f \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ such that $\int f d\mu = 0$ the following holds*

$$\left| \int g \circ T^n f d\mu \right| \le c_4 C\left(\|f\|_{C^{(1)}} \right) \|g\|_\infty n^{-\frac{1}{\alpha}+1} (\log n)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Where $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is affine.

Proof. Let $f \in \mathcal{C}_* + \mathbb{R}$, $\int_0^1 f = 0$ and $g \in L^\infty$, $\|g\|_\infty = 1$. For each $n \in \mathbb{N}$ let us write $n = kn_\varepsilon + m$, $k \in \mathbb{N}$ and $m < n_\varepsilon$. Remembering Lemma 5.3.1, we have

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 gP^n f \right| \le & \|P^n f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f\|_1 + \|\mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f\|_1 \\ \le & \sum_{i=0}^{k-1} \|P^{(i+1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{in_\varepsilon} P^m f\|_1 + \operatorname{Exp}\left[-\gamma k\right] \|f\|_1 \\ \le & 2c_1 \|f\|_1 \frac{n}{n_\varepsilon} \varepsilon^{1-\alpha} + e^\gamma \operatorname{Exp}\left[-\gamma \frac{n}{n_\varepsilon} \right] \|f\|_1 \\ \le & c_4 \|f\|_1 n^{-\frac{1}{\alpha}+1} (\log n)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

by choosing $\varepsilon = n^{-\frac{1}{\alpha}} (\log n^{(1-\gamma)^{-1}(\frac{1}{\alpha}-1)2^{2+\frac{1}{\alpha}}})^{\frac{1}{\alpha}}$.

This is not yet the decay of correlation with respect to the absolutely continuous invariant measure $d\mu = hdx$ of our dynamical system. To get such a result, we need to notice that if $f \in C^{(1)}$, then we can choose $\lambda, \nu, \delta \in \mathbb{R}$ such that $f_{\lambda,\nu,\delta}(x) := (f(x) + \lambda x + \nu)h(x) + \delta \in \mathcal{C}_*$, and $(\lambda x + \nu)h(x) + \delta \in \mathcal{C}_*$, the dependence of the parameters with respect to the $C^{(1)}$ norm of f being affine. Finally, the decay of correlations with respect to μ, for each $f \in C^{(1)}, \int f d\mu = 0$ and $g \in L^\infty$ can be estimated as follows

$$\left| \int g \circ T^n f d\mu \right| \le c_4 C\left(\|f\|_{C^{(1)}} \right) n^{-\frac{1}{\alpha}+1} (\log n)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Where $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is affine. $\square$

Remark 5.4.2. *1. The proof of Theorem 5.4.1 allows to estimate the difference between h_ε and h; namely, to prove the estimate:*[7] $\|h_\varepsilon - h\|_1 \le$ *const.*$\varepsilon^{1-\alpha}(\log \varepsilon^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}$.

Accordingly, for each $f \in L^1(\Omega)$ and defining $\Pi f = \int_\Omega f$, holds

$$\|(\mathbb{P}_\varepsilon - \Pi)^n f\|_1 = \|\mathbb{P}_\varepsilon^n (\mathbb{1} - \Pi) f\|_1 \le (1-\gamma)^n \|f\|_1.$$

7. It suffices to write

$$\begin{aligned} \|h - h_\varepsilon\|_1 &\le \|P^n 1 - h\|_1 + \|\mathbb{P}_\varepsilon^{\frac{n}{n_\varepsilon}} 1 - h_\varepsilon\|_1 + \|\mathbb{P}_\varepsilon^{\frac{n}{n_\varepsilon}} 1 - P^n 1\|_1 \\ &\le \text{const.}\{n^{1-\frac{1}{\alpha}} (\log n)^{\frac{1}{\alpha}} + (1-\gamma)^{n\varepsilon^\alpha} + n\varepsilon\} \end{aligned}$$

2. *Theorem 5.4.1 allows to get an estimate for the rate of decay for Hölder continuous observables. More precisely, given a β-Hölder continuous function f, we can bound the correlations by $n^{-\beta(\frac{1}{\alpha}-1)}$, up to some logarithmic correction.*[8]

3. *We have obtained a polynomial decay, with a bound comparable to the one found in [Mor93] for the piecewise linear case and the one stated in [Iso] for the general case. Moreover, compared with numerical simulations [LSV93], our bound appears to be extremely close to optimal: the expected one is the same apart from the logarithmic correction.*

4. *As a side consequence of our work we have that $\sum_{n=0}^{\infty} P^n f$ converges in L^1 provided $\alpha < \frac{1}{2}$. According to [Liv96] this estimate suffices to prove the Central Limit Theorem. That is, given $f \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ such that $\int_0^1 f d\mu = 0$*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n} f \circ T^i$$

converges, in distribution, to a Gaussian variable with variance $\int_0^1 f^2 d\mu + 2\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 f f \circ T^i d\mu$.

5.5 General Considerations

The reader may be under the impression that the proposed approach is specific to the special maps studied here. In particular, section two seems quite model dependent. In fact, while the estimates done there would apply certainly to similar maps, it is true that some more work is needed to present them in a completely general fashion[9].

Nevertheless, section two is not completely necessary. Its aim was to make the paper self contained and to emphasize the existence of a very direct method

---

and to choose $n \sim \varepsilon^{-\alpha} \log \varepsilon^{-1}$.

8. The result is easily obtained by approximation. If f is a β-Hölder function, then we can approximate it in L^1 by functions $f_\varepsilon \in C^{(1)}$ such that $\|f - f_\varepsilon\|_1 \leq \|f\|_\beta \varepsilon^\beta$ and $\|f'\|_\infty \leq \|f\|_\beta \varepsilon^{\beta-1}$ (where $\|f\|_\beta$ is the β-Hölder norm). Accordingly,

$$\left| \int f \circ T^n g \right| \leq \|g\|_\infty \|f - f_\varepsilon\|_1 + (c_1 \|f'_\varepsilon\|_\infty + c_2 \|f\|_\infty) n^{-\frac{1}{\alpha}+1},$$

and the result follows by choosing ε judiciosly.

9. Yet, the results extend immediately to any map of the interval which is $\mathcal{C}^{(1)}$–conjugate to our model. More precisely, suppose that $\widetilde{T} : [0,1] \to [0,1]$ and $\Phi \in \mathrm{Diff}^{(1)}([0,1])$ satisfies $\widetilde{T} \circ \Phi = \Phi \circ T$. Then, for the absolutely continuous $\widetilde{T}$–invariant measure $\widetilde{\mu}$ defined by $\widetilde{\mu}(f) = \mu(f \circ \Phi)$, it is straightforward to see that the power law decay is the same for T and $\widetilde{T}$ for $\mathcal{C}^{(1)}$ observable.

of studying the invariant measure. If one is willing to make same assumptions on the invariant measure (which can eventually be proven separately) sections two can be greatly simplified.

Here we discuss briefly what is really essential in order to apply the present method.

Let us consider a map $T : [0, 1] \to [0, 1]$ expanding but for the fixed point 0. where $D_0 T = 1$. Assume $D^2 T$ continuous but in the point 0 and

$$\begin{aligned} &|D_x^2 T| \leq C x^{\alpha-1} \\ &|D_x T| = 1 + c x^\alpha + o(x^\alpha). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Assume further that there exists an invariant probability measure absolutely continuous with respect to Lebesgue (see the discussion at the end of this section). Calling h its density we have $Ph = h$. Then, in analogy with Lemma 5.2.2 holds [10]

Lemma 5.5.1. *There exist $a > \alpha$ and $b > 0$ such that the cone*

$$\mathcal{C} = \left\{ f \in C^{(1)}(]0, 1]) \;\middle|\; 0 \leq f(x) \leq 2h(x) \int_0^1 f;\ |f'(x)| \leq \frac{a + bx}{x} f(x) \right\},$$

is invariant with respect to the Perron-Frobenius operator.

Proof. Obviously, the first condition is invariant by P. If f belongs to the cone

$$\begin{aligned} |(Pf)'(x)| &= \left| \sum_{y \in T^{-1}x} \frac{D_y^2 T}{|D_y T|^3} f(y) + \frac{1}{|D_y T|^2} f'(y) \right| \\ &\leq \sum_{y \in T^{-1}x} \left(\frac{2C y^{\alpha-1}}{|D_y T|^2} + \frac{a + by}{y |D_y T|} \right) \frac{f(y)}{|D_y T|} \\ &\leq \frac{a + bx}{x} Pf(x) \sup_{y \in [0,1]} \left[\frac{2C}{|D_y T|^2} \frac{y^{\alpha-1} T(y)}{a + bT(y)} + \frac{T(y)}{y |D_y T|} \frac{a + by}{a + bT(y)} \right] \end{aligned}$$

Let $\Omega(y)$ being the term in brackets. We have

$$T(y) = \int_0^y D_t T dt = \int_0^y (1 + ct^\alpha + o(t^\alpha)) dt = y + \frac{c}{\alpha + 1} y^{\alpha+1} + o(y^{\alpha+1}).$$

10. Such a result should extends easily to maps expanding but for some fixed points $\{p_j\}$ where $D_{p_j} T = 1$. We can define $\theta(x) = \min_j |x - p_j|$ and assume $D^2 T$ continuous but in the points $\{p_j\}$ and

$$\begin{aligned} &|D_x^2 T| \leq C \theta(x)^{\alpha-1} \\ &|D_x T| = 1 + c_j \theta(x)^\alpha + o(\theta(x)^\alpha). \end{aligned}$$

Then the same cone with $\frac{a + b\theta(x)}{\theta(x)}$ instead of $\frac{a+bx}{x}$ should be invariant.

Which shows that $\Omega(y) \leq 1 + \Big(\frac{2C}{a} + c\big(\frac{1}{\alpha+1} - 1\big)\Big) y^\alpha + o(y^\alpha)$. *Therefore there exists* $\delta > 0$ *such that* $\Omega(y) \leq 1$ *on* $[0, \delta]$ *provided* a *is big enough. Next, outside this neighborhood, we have* $y > \delta$ *and* $|D_y T| > \gamma > 1$, *so*

$$\Omega(y) \leq \frac{1}{a} \frac{2C\delta^{\alpha-1}}{\gamma^2} + \frac{a}{b}\frac{1}{\delta\gamma} + \frac{1}{\gamma} < 1$$

provided a *and* b/a *are big enough.* □

In addition, we assume that for some $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma_0 < 1$ and $c_* > 0$,

$$\gamma_0 \leq h(x) \leq c_* x^{-\beta}. \tag{5.2}$$

It follows that a sharper cone is invariant. Note that in the process of proving the next lemma we will establish the analogous of Lemma 5.2.4.

Lemma 5.5.2. *There exists* $\delta > 0$ *and* $0 < \gamma < \gamma_0$ *such that*

$$\mathcal{C}_* = \{f \in \mathcal{C} \mid f(x) \geq \gamma \int_0^1 f \text{ for } x \leq \delta\},$$

is invariant with respect to the Perron-Frobenius operator.

Proof. The proof starts by establishing the analogous of Lemma 5.2.4

Sub-Lemma 5.5.3. *If* $f \in \mathcal{C}$, *then*

$$\min_{[\delta,1]} f \geq \frac{\delta^a}{2e^b} \int_0^1 f,$$

provided δ *is chosen small enough.*

Proof. We have the bounds

$$f(x) \leq 2c_* x^{-\beta} \int_0^1 f$$

and

$$|f'(x)| \leq (ax^{-1} + b) f(x)$$

coming from the cone and the assumed estimate on the invariant measure. For $x \geq y > \delta$ *the second bound yields*

$$\left(\frac{y}{x}\right)^a e^{-b(x-y)} \leq \frac{f(x)}{f(y)} \leq \left(\frac{x}{y}\right)^a e^{b(x-y)}.$$

Accordingly, normalizing $\int f = 1$,

$$1 = \int f = \int_0^\delta f + \int_\delta^1 f \leq \frac{2c_*}{1-\beta}\delta^{1-\beta} + \delta^{-a} e^b \min_{x\in[\delta,1]} f.$$

Next, by choosing δ *sufficiently small, we have* $\frac{2c_*}{1-\beta}\delta^{1-\beta} \leq \frac{1}{2}$ *from which the result follows.* □

Let $\mu = \|DT\|_\infty$. We choose δ so small that for all $y \leq \delta$ hold $|D_yT|^{-1} \geq 1 - 2c\delta^\alpha$ and Sub-Lemma 5.5.3 together with $1 - 2c\delta^\alpha + \mu^{-1} > 1$. Let $x \leq \delta$, then $T^{-1}x$ will consist of, at least, two points $y_1 \leq \delta$ and $y_2 \geq \delta$. By choosing γ small, holds

$$\begin{aligned} Pf(x) \geq& |D_{y_1}T|^{-1}f(y_1) + \mu^{-1}f(y_2) \geq \left[(1-2c\delta^\alpha)\gamma + \mu^{-1}\min\left\{\gamma, \frac{\delta^a}{2e^b}\right\}\right]\int_0^1 Pf \\ &\geq \gamma\int_0^1 Pf. \end{aligned}$$

□

This is enough to show that $\inf f \geq \gamma \int f$ whenever $f \in \mathcal{C}_*$, which implies (since the constant function 1 belongs to the cone $\mathcal{C}_*$)

$$\inf_{n\geq 0}\inf_{[0,1]} P^n 1 \geq \gamma > 0. \tag{5.3}$$

We have so generalized the two ingredients of section two used in the paper: the existence of an invariant cone for P that allows to obtain the estimates used to prove Lemma 5.3.1 and the analogous of Lemma 5.2.4, necessary in proving Proposition 5.3.3.

The reader can then easily generalize section three, since the distortion estimates depend only on the behavior of the neutral fixed point which is ensured by our assumption on D^2T. Section four follows exactly in the same way yielding a polynomial decay depending on α and β.

In conclusion, the following more general result holds:

Proposition 5.5.4. *Given a map T satisfying (5.1), if it has an absolutely continuous invariant probability measure with density satisfying (5.2), then for all $g \in L^\infty$, $f \in C^{(1)}$, $\int f = 0$, $0 < \gamma < \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}$, holds*

$$\left|\int fg\circ T^u\right| \leq c_4 C(\|f\|_{C^{(1)}})\|g\|_\infty n^{-\gamma}$$

for some constants c_4 and $C(\|f\|_{C^{(1)}})$.

Here we do not address how to obtain the needed estimate on the invariant density, although several approaches (besides the ones in the style of what we have done in section two) are possible (see, for example, [Tha80] where a result of the type (5.2) is obtained by inducing).

Acknowledgments

We gratefully acknowledge many interesting discussions with V. Baladi, X. Bressaud, V. Maume, B. Schmitt and G. Keller. One of us (B.S.) acknowledges partial support of CEE grant CHRX-CT94-0460. Finally, it is a pleasure to thank the ESI, Vienna, and the Institute for Advanced Studies, Jerusalem, where part of this work was done.

5.6 Étude des temps de retour

Nous allons nous attacher maintenant à l'étude des temps de retour pour le modèle défini dans la section 5.1. Vérifions pour cela que les bornes sur les erreurs par rapport aux lois classiques, calculées au chapitre 3, sont calculables pour ce modèle.

Cette application a une partition de Markov finie (avec deux éléments), mais pour notre problème il est plus simple de considérer la partition dénombrable ξ générée par les préimages a_n de 1 (voir page 74), $\xi = \{A_m | \, m \in \mathbb{N}\}$ avec $A_n =]a_{n+1}, a_n]$.

On peut associer pour chaque point $z \in X =]0,1]$ une unique suite infinie $\underline{\omega} = \omega_1\omega_2...$ avec la propriété que $T^{m-1}z \in A_{\omega_m}$ pour tout entier $m \geq 1$. On dénotera par $U_m(z)$ le cylindre de taille m contenant z. Clairement, toutes les suites $\underline{\omega}$ ne sont pas admissibles. En fait, $\omega_m\omega_{m+1}$ peut apparaître dans une suite ssi $\omega_m = 0$ ou $\omega_{m+1} = \omega_m - 1$.

On dira qu'un cylindre $C \in \xi_k$ est maximal lorsqu'il est envoyé en exactement k itérations sur X. D'après les propriétés de la matrice de transition, un cylindre non vide $C = [\omega_1 \ldots \omega_k]$ est maximal ssi $\omega_k = 0$.

Cette étude sera menée pour la mesure naturelle μ de l'application, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Théorème 5.1. *Pour presque tout $z \in X$, la distribution limite des temps de retour est la loi exponentielle, et plus précisément, pour tout $\beta < \bar{\beta}(\alpha)$,*

$$\sup_{t \geq 0} \left| \mu_{U_m(z)} \left(\tau_{U_m(z)} > \frac{t}{\mu(U_m(z))} \right) - \exp(-t) \right| = \mathcal{O}(\mu(U_m(z))^\beta).$$

avec l'exposant critique $\bar{\beta}(\alpha) = 1 - \alpha$.

Théorème 5.2. *Pour presque tout $z \in X$, la distribution limite du nombre de visites dans $U_m(z)$ suit une loi de Poisson, et plus précisément pour tout $t \geq 0$, $K \geq 0$ et $\beta < \bar{\beta}(\alpha)$*

$$\left| \mu_{U_m(z)} \left(N_{U_m(z)}(t) = K \right) - \frac{t^K}{K!} \exp(-t) \right| = \mathcal{O}(\mu(U_m(z))^{\beta/(K+1)}).$$

avec l'exposant critique $\bar{\beta}(\alpha) = 1 - \alpha$.

On trouve pour ces deux théorèmes une dépendance en α de l'exposant "critique" $\bar{\beta}(\alpha) = 1 - \alpha$ des plus simples, laissant présager un lien plus profond entre les deux quantités. Rappelons que d'après la remarque 3.2.1, on ne peut pas avoir $\bar{\beta} > 1$. On mènera dans le chapitre 6 la même étude pour des applications *uniformément* hyperboliques multidimensionnelles, et l'on trouvera un exposant critique $\bar{\beta} = 1$, qui est optimal. Il serait tout à fait remarquable d'établir un lien plus général entre les propriétés hyperboliques d'un système et la vitesse de convergence de ces lois.

Ces théorèmes sont obtenus en appliquant les résultats du chapitre 3. On calculera les quantités définies dans le Lemme 3.4, et l'on montrera aussi que pour presque tout point, les partitions formées par $U_m(z)$ et son complémentaire vérifient une propriété proche de l'α-mélange, la vitesse de mélange étant du même ordre que la vitesse de décroissance des corrélations, calculée dans l'article précédent (sections 5.1-5.4). Il est possible d'estimer assez finement les différentes quantités mises en jeu, ce qui permet de donner cette borne supérieure (la mesure de l'ensemble puissance β) très simple sur la vitesse de convergence à la loi asymptotique.

Tout d'abord, citons à nouveau les résultats obtenus précédemment, dans un langage plus commode pour ce qui va suivre. Ceux-ci sont valables pour une constante a assez grande.

(Lemma 5.2.2) Le cône $\mathcal{C}_*(a)$ (défini dans le Lemme 5.2.2) est invariant par l'opérateur P,i.e. $P(\mathcal{C}_*(a)) \subset \mathcal{C}_*(a)$.

(Lemma 5.2.3) La densité h appartient au cône $\mathcal{C}_*(a)$, donc $\frac{h(x)}{h(y)} \leq (x/y)^{\alpha+1}$ et $h(x) \leq ax^{-\alpha}$.

(Proposition 5.3.3) Dans la démonstration de cette proposition, on montre en fait l'inégalité de *distorsion* suivante :
Il existe une constante D telle que pour tout k et $x, y \in C \in \xi_k$,

$$\frac{D_x T^k}{D_y T^k} \leq D < \infty. \tag{5.4}$$

On supposera sans perte de généralités que $a \geq 4D$. On utilisera le mélange sous la forme suivante :

(Theorem 5.4.1) Dans la démonstration de ce théorème, on établit que pour tout $f \in \mathcal{C}_*(a)$,

$$\left\| P^n\Big(f - \lambda(f)\Big) \right\|_{L^1(\lambda)} \leq \Phi(n) \|f\|_{L^1(\lambda)}.$$

Avec $\Phi(n) = Cn^{-\frac{1}{\alpha}+1} (\log n)^{\frac{1}{\alpha}}$. Pour alléger les notations, on oubliera la correction logarithmique pour ne retenir que le terme polynomial.

Commençons par donner un petit résultat utile pour la suite, qui est une conséquence de la distorsion et de la dilatation.

Sous-Lemme 5.3. *Il existe une constante B telle que pour tout k et $C \in \xi_k$ avec $T^{-k}C \cap C \neq \emptyset$,*

$$\sup P^k \mathbb{1}_C \leq Bk^{-1-1/\alpha}.$$

Preuve. *Notons $C = [\omega_1 ... \omega_k]$. On veut estimer $\sup P^k \mathbb{1}_C = 1/\inf_C DT^k$. Si $\omega_k \neq 0$, alors il existe $j < k$ tel que $\omega_j = 0$. En perdant au plus un facteur D, on peut supposer que $\omega_k = 0$ (il suffit pour cela d'échanger $[\omega_1 ... \omega_j]$ et $[\omega_{j+1} ... \omega_k]$). Dans ce cas, le cylindre C est envoyé sur tout l'intervalle en k itérations. Ce n'est pas difficile de voir alors que la dilatation minimale a lieu pour $C = [(k-1)(k-2)...0]$, et elle est minorée par $D_{a_k} T^k \geq ck^{1+1/\alpha}$. La conclusion vient en prenant $B = D/c$.* □

On peut alors montrer les lemmes suivants. La raison qui a motivé l'utilisation du temps de premier retour des cylindres est inspirée par les travaux de Hirata [Hir95], où ce temps de premier retour joue un rôle crucial. On notera $\tau(U)$ le temps de premier retour de l'ensemble U, c'est-à-dire que $\tau(U) = \inf\{\tau_U(x) | \, x \in U\}$.

Lemme 5.4. *La quantité $a_N(U)$ définie dans le Lemme 3.4, pour $U = U_m(z)$ est bornée par*

$$a_N(U) = \frac{4D}{\inf h} \frac{N\mu(U)}{\lambda(T^{\tau(U)}U)}.$$

Preuve. *On supposera que $N > \tau(U)$, car sinon on a trivialement $a_N(U) = 0$. Posons $\tau = \tau(U)$. Pour tout z dans X, on a*

$$\begin{aligned} a_N(U) &\leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\mu(U)} \mu(T^{-j}U \cap U) \\ &= \sum_{j=\tau}^{N} \frac{1}{\mu(U)} \int P^j(\mathbb{1}_U h) \mathbb{1}_U d\lambda \\ &\leq N \sup_{j=\tau..N} \sup_U \frac{P^j(\mathbb{1}_U h)}{h}. \end{aligned}$$

Or la distorsion et la régularité de la densité nous donnent

$$\begin{aligned} P^\tau(1_U h) &= h \circ T_U^{-\tau} DT_U^{-\tau} \mathbb{1}_{T^\tau U} \\ &\leq 4D \frac{1}{\lambda(T^\tau U)} \int_{T^\tau U} h \circ T_U^{-\tau} DT_U^{-\tau} \mathbb{1}_{T^\tau U} d\lambda \\ &\leq 4D \frac{\mu(U)}{\lambda(T^\tau U)}. \end{aligned}$$

Finalement, $Ph = h$ et P étant un opérateur positif entraînent

$$\frac{P^j(\mathbb{1}_U h)}{h} \leq \frac{P^{j-\tau}1}{h} \sup P^\tau(1_U h) \leq \frac{P^{j-\tau}\frac{h}{\inf h}}{h} \sup P^\tau(1_U h) \leq \frac{4D}{\inf h} \frac{\mu(U)}{\lambda(T^\tau U)}.$$

□

Ce lemme donne une bonne estimation à condition que l'intervalle $T^{\tau(U)}U$ soit assez grand. Ce sera le cas si $\tau(U)$ est lui aussi assez grand. C'est l'objet de la proposition suivante, qui dit que c'est presque toujours le cas, et même que le temps de premier retour du cylindre est du même ordre que sa taille (i.e. l'ordre de la partition dynamique à laquelle il appartient). C'est un résultat intéressant en lui-même, car il assure qu'une propriété topologique est vérifiée sur un ensemble de mesure pleine.

Proposition 5.5. *Pour presque tout $z \in X$, on a* $\liminf_{m\to\infty} \frac{\tau(U_m(z))}{m} \geq 1$.

Preuve. Soit $w \in \mathbb{N}$ fixé, et $1/2 < \delta < 1$. Considérons l'ensemble (on notera $N_m(z) = \tau(U_m(z))$),

$$A_m := \{z \in X \,|\, \omega_1 = w, \omega_m = 0, N_m \leq \delta m\}.$$

Si

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) < \infty, \tag{5.5}$$

alors le Lemme de Borel-Cantelli assure que pour presque tout $z \in X$ tel que $\omega_1 = w$ on a $N_m > \delta m$, excepté pour un nombre fini de m. Ceci est suffisant pour prouver la proposition, si δ est arbitrairement proche de 1.

Pour établir (5.5), il suffit de considérer la mesure de Lebesgue à la place de μ (la densité est bornée inférieurement). Mais

$$\lambda(A_m) = \sum_{k=1}^{[m/2]} \lambda(N_m = k) \quad + \quad \sum_{k=[m/2]+1}^{\delta m} \lambda(N_m = k).$$
$$(1) \quad + \quad (2)$$

Analysons plus en détail comment ces ensembles sont composés.

(1): *Dans ce cas, le cylindre U_m tel que $N_m = k$ doit être de la forme*

$$U_m = [(\omega_1 .. \underbrace{.\omega_k)(\omega_1 ... \omega_k) ... (\omega_1.}_{[m/k]} .. \omega_k) ...].$$

Donc pour $k \leq [m/2]$, le cylindre est complètement déterminé par ses k premiers symboles. Posons $C = [\omega_1 ... \omega_k]$, et disons qu'un cylindre de longueur k est admissible (admis) lorsqu'il est le début d'un cylindre de A_m avec $N_m = k$. P étant *l'opérateur dual de la dynamique, on a*

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\le \sum_{k=1}^{[m/2]} \sum_{C \text{ admis}} \lambda(C \cap T^{-k}C \cap \cdots \cap T^{-[m/k-1]k}C) \\
&\le \sum_{k=1}^{[m/2]} \sum_{C \text{ admis}} \left(\sup_C P^k 1\!\!1_C\right)^{[m/k]-1} \lambda(C) \\
&\le \sum_{k=1}^{[m/2]} \sup_{C \text{ admis}} \left(\sup_C P^k 1\!\!1_C\right)^{[m/k]-1}.
\end{aligned}$$

On divise maintenant la somme sur k en trois parties, chacune pouvant être estimée de différente manières.

Puisque T^k est injective sur $C \in \xi_k$, $P^k 1\!\!1_C \le r = 1/\inf_{[w]} DT^k$. De plus, $r < 1$ car la dérivée de T est strictement supérieure à 1 sur C. Prenons k_0 le plus petit entier tel que $k_0^{1+\frac{1}{\alpha}} \ge \mathrm{e}^B$. L'inégalité de distorsion 5.4 et le Sous-Lemme 5.3 donnent alors

$$(1) \le \sum_{k=1}^{k_0} r^{[m/k]-1} + \sum_{k=k_0}^{m/3} (Bk^{-1-1/\alpha})^{m/k-2} + \sum_{m/3}^{[m/2]} Bk^{-1-1/\alpha}.$$

Il est facile de voir que la première et la dernière série sont sommables par rapport à m. Pour la seconde, c'est un peu plus délicat, mais en fait on peut se rendre compte que les termes $(Bk^{-1-1/\alpha})^{m/k-2}$ sont croissants lorsque k est supérieur à k_0. Une majoration triviale de la somme est alors $B3^{1/\alpha}m^{-1/\alpha}$, qui est sommable avec m. Ceci conclut l'analyse du cas (1).

(2): *Dans ce cas, le cylindre U_m doit être de la forme*

$$U_m = [\underbrace{\omega_1 \ldots \omega_{m-k}}_{m-k}\underbrace{\omega_{m-k+1} \ldots \omega_k}_{2k-m}\underbrace{\omega_1 \ldots \omega_{m-k}}_{m-k}].$$

Comme en (1), on pose $C = [\omega_1 \ldots \omega_{m-k}]$, et l'on dira que C est admissible (admis) lorsqu'il est le début d'un cylindre de A_m avec $N_m = k$.

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\le \sum_{k=[m/2]+1}^{\delta m} \sum_{C \text{ admis}} \lambda(C \cap T^{-k}C) \\
&\le \sum_{k=[m/2]+1}^{\delta m} \sup_{C \text{ admis}} \sup_{[w]} P^k 1\!\!1_C.
\end{aligned}$$

Soit $p = p(C) \ge m - k$ tel que $C \in \xi_p$ soit maximal (i.e. $p(C)$ est le plus petit des p tels que $C \in \xi_p$). Si $p < k$, en remarquant que $1 \in \mathcal{C}_*(b)$, le Théorème 5.4.1 et le Sous-Lemme 5.3 nous donnent

$$\sup_C P^k 1\!\!1_C \le \sup P^p 1\!\!1_C \sup_C P^{k-p} 1 \le ba_w^{-\alpha} Bp^{-1-1/\alpha} \le ba_w^{-\alpha} B(m-k)^{-1-1/\alpha}.$$

Sinon, on a $C \in \xi_k$ et $T^{-k}C \cap C \neq \emptyset$ (car $U_m \subset C$ et $N_m = k$), on obtient donc

$$P^k 1\!\!1_C \leq Bk^{-1-1/\alpha}.$$

Or $k \geq m - k \geq (1-\delta)m$, donc la série (5.5) est sommable quel que soit $\delta < 1$. □

Lemme 5.6. *Pour tout $z \in X$, et pour tout m tel que $U_m(z) \in \xi_m$ soit maximal, la partition $\mathcal{U} = \{U_m(z), U_m(z)^c\}$ vérifie une propriété proche de l'α-mélange:*

$$\alpha'(N) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{R \in \mathcal{U}_j \\ T^jR \subset U}} \sup_{S \in \mathcal{U}_\infty} \left| \frac{\mu(R \cap T^{-N-j}S)}{\mu(R)} - \mu(S) \right| = \mathcal{O}((N-m)^{1-\frac{1}{\alpha}}).$$

à une correction logarithmique près.

Preuve. Soit $z \in X$, et m tel que $U_m(z) \in \xi_m$ soit maximal. Soit $\mathcal{U}$ la partition formée par $U_m(z)$ et son complémentaire, et $\mathcal{U}_j$ les raffinements de cette partition. Pour $R \in \mathcal{U}_j$ tel que $T^jR \subset U$, on a $R \in \sigma(\xi_{m+j})$ et R est une union de cylindres $V^k_{m+j} \in \xi_{m+j}$ maximaux, soit alors $V \in \xi_{m+j}$ l'un d'eux. Pour tout $S \in T^{-(N+j)}\mathcal{B}$, il existe un ensemble $W \in \mathcal{B}$ tel que $R = T^{-(N+j)}W$. On a alors

$$\begin{aligned}
(*) &:= \mu(V \cap S) - \mu(V)\mu(S) \\
&= \int 1\!\!1_V 1\!\!1_W \circ T^{N+j} h d\lambda - \int \mu(V) h 1\!\!1_W d\lambda \\
&= \int P^{N+j}[h(1\!\!1_V - \mu(V))] 1\!\!1_W d\lambda \\
&\leq \|P^{N+j}[h(1\!\!1_V - \mu(V))]\|_{L^1(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Pour avoir un bon contrôle sur la vitesse de mélange, il faut exploiter le fait que V est maximal:

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \left\|P^{N-m}[P^{j+m}(h 1\!\!1_V) - \mu(V)]\right\|_{L^1(\lambda)} + \left\|P^{N-m}[\mu(V)h - \mu(V)]\right\|_{L^1(\lambda)} \\
&\leq 4a\Phi(N-m)\mu(V),
\end{aligned}$$

avec Φ donnée par le Théorème 5.4.1, pourvu que $P^{m+j}(h 1\!\!1_V) \in \mathcal{C}_*(a)$, ce qui est le cas d'après le Sous-Lemme 5.7. On achève alors la démonstration en sommant sur tout les cylindres maximaux formant R. □

Sous-Lemme 5.7. *Pour tout cylindre $V \in \xi_p$ maximal,*

$$P^p(h 1\!\!1_V) \in \mathcal{C}_*(a).$$

Preuve. Notons pour simplifier $f := P^p(h 1\!\!1_V)$ et $T_V : V \to X$ la restriction de T à V.

Comme T^p *est injective sur* V,

$$f(x) = h \circ T^{-p}(x) D_x T_V^{-p}.$$

En particulier, f *est continue. Pour montrer que* f *appartient à notre cône* $\mathcal{C}_*(a)$ *de fonctions régulières, il faut vérifier quatre propriétés :*

1. f *est positive. C'est clairement le cas.*

2. f *est décroissante. Puisque* $h \in \mathcal{C}_*$, h *est décroissante. De plus,* T^{-p} *est décroissante et concave donc* $h \circ T^{-p}$ *et* DT_V^{-p} *décroissent.*

3. $x^{\alpha+1} f(x)$ *est croissante. Puisque* $T_V^{-p} : X \to V$ *est croissante, c'est équivalent de montrer que la fonction*

$$(T^p u)^{\alpha+1} h(u) \frac{1}{D_u T^p}$$

est croissante sur $u \in V$. *Mais si l'on remarque que*

$$\left(\frac{T^p u}{u}\right)^{\alpha+1} \frac{1}{D_u T^p}$$

est croissante sur $V \in \xi_p$ *(c'est trivialement vrai pour* $p = 1$ *et le cas général s'obtient facilement par récurrence), et que* $u^{\alpha+1} h(u)$ *croît, on obtient le résultat.*

4. $f(x) \leq a x^{-\alpha} \int f$. *Comme* f *est continue, il existe* $v \in V$ *tel que*

$$\int f = f(T^p v) = h(v) \frac{1}{D_v T^p}.$$

L'estimation de distorsion 5.4 montre qu'il existe $D > 0$ *tel que pour tout* $u \in V \in \xi_p$,

$$\frac{D_v T^p}{D_u T^p} \leq D.$$

Par ailleurs, d'après le Lemme 5.2.3 on a

$$\frac{h(u)}{h(v)} \leq \left(\frac{v}{u}\right)^{\alpha+1} \leq \left(\frac{a_{\omega_1}}{a_{\omega_1+1}}\right)^{\alpha+1}.$$

Mais par définition des a_n, *il est clair que* $\frac{a_{\omega_1}}{a_{\omega_1+1}} \leq 2$. *Par conséquent, il vient pour* $u = T_V^{-p} x$

$$f(x) = h(u) \frac{1}{D_u T^p} \leq 2^{\alpha+1} h(v) \frac{D}{D_v T^p} \leq a x^{-\alpha} \int f,$$

car $x \leq 1$ *et* $2^{\alpha+1} D \leq a$.

□

Nous sommes maintenant en mesure de montrer les théorèmes.

Preuve. *[Théorème 5.1] Soit $\varepsilon > 0$. Soit z un point typique pour le Lemme 5.5 et le Théorème de Shannon-McMillan-Breiman 1.8. On va appliquer le Lemme 3.4. Soit m_0 tel que pour tout $m > m_0$ on ait $(1-\varepsilon)m \leq \tau(U_m(z))$, $\mu(U_m(z)) \leq \exp(-m2h_\mu/3)$ et aussi $\mu(U_{\varepsilon m}(T^{[(1-\varepsilon)m]}z)) \geq \exp(-(2[\varepsilon m])h_\mu)$.*

Pour alléger les notations, posons quel que soit m, $U_m = U_m(z)$. Pour tout $m > m_0$ tel que U_m soit maximal, on a $(1-\varepsilon)m \leq \tau(U_m) \leq m$, et tous les itérés T^jU_m pour $1 \leq j < m$ sont à une distance supérieure à a_m du point fixe neutre (car U_m est maximal). Si $\tau(U_m) < m$, la densité reste bornée sur l'orbite par $ba_m^{-\alpha}$, d'où

$$\lambda(T^{\tau(U_m)}U_m) \geq \frac{a_m^\alpha}{b}\mu(T^{\tau(U_m)}U_m) \geq \frac{a_m^\alpha}{b}\exp(-2\varepsilon m h_\mu).$$

Puisque z est un point générique pour l'entropie. Et si $\tau(U_m) = m$ on a encore

$$\lambda(T^{\tau(U_m)}) = 1 \geq \frac{a_m^\alpha}{b}\exp(-2\varepsilon m h_\mu).$$

Le Lemme 5.4 nous donne alors l'estimation avec $N = \mu(U)^{-\alpha+\varepsilon}$,

$$a_N(U_m) = \mathcal{O}(\mu(U_m)^{1-\alpha-3\varepsilon}).$$

Le Lemme 5.6 avec $R = U_m$ (rappelons que U_m est maximal) nous donne

$$b_N(U_m) = \mathcal{O}((\mu(U_m)^{-\alpha+\varepsilon} - m)^{1-\frac{1}{\alpha}}) = \mathcal{O}(\mu(U_m)^{(-\alpha+2\varepsilon)(1-\frac{1}{\alpha})}).$$

On peut appliquer le Lemme 3.4, qui donne finalement que

$$c(U_m) =\leq a_N(U_m) + b_N(U_m) = \mathcal{O}(\mu(U_m)^\beta).$$

Pour $\beta \leq 1-\alpha-3\varepsilon$ et $\beta \leq 1-\alpha-2\varepsilon(1/\alpha-1)$. On conclut donc que

$$d(U_m) = \mathcal{O}(\mu(U_m)^\beta) \tag{5.6}$$

pour tout $\beta < 1-\alpha$, ε étant arbitrairement petit, ce qui termine la démonstration en appliquant le Théorème 3.3. □

Preuve. *[Théorème 5.2] Soit z un point typique qui vérifie le Théorème 5.1. Pour m tel que U_m soit maximal. D'après la note de bas de page du Théorème 3.5, la condition affaiblie d'α-mélange*

$$\alpha'(M) = \mathcal{O}((M-m)^{\alpha-\frac{1}{\alpha}})$$

donnée par le Lemme 5.6 est suffisante pour appliquer ce Théorème. Prenons alors $M = \mu(U_m)^{-\alpha}$ On trouve alors, pour tout $\beta < 1-\alpha$, grâce à l'estimation (5.6) et au Théorème 3.5 une erreur de l'ordre

$$f(K, U_m) = const[d(U_m) + \alpha'(M) + M\mu(U)] = \mathcal{O}(\mu(U_m)^\beta).$$

Donc d'après le Théorème 3.6, l'erreur finale pour la probabilité d'avoir K visites est de l'ordre de $\mu(U_m)^{\beta/(K+1)}$ pour tout $\beta < 1-\alpha$. □

5.7 Propriétés de Bernoullicité

Les calculs menés dans la section précédente nous permettent facilement d'établir que la partition dénombrable ξ (et donc par conséquent la partition à deux éléments) est faiblement Bernoulli.

Théorème 5.8. *La partition ξ est faiblement Bernoulli pour (X, T, μ). La vitesse de mélange est de l'ordre de $\beta(n) = \mathcal{O}(n^{1-1/\alpha})$, à une correction logarithmique près.*

D'après le Théorème de Friedman-Ornstein 1.11, cette propriété est suffisante pour affirmer que le système (X, T, μ) est métriquement isomorphe à un décalage de Bernoulli.

Pour la démonstration, on va utiliser un lemme d'Hofbauer et Keller [HK82b], qui traduit la propriété de Bernoullicité faible dans le langage de l'opérateur de Perron-Frobenius.

Lemme 5.9. *La vitesse de Bernoullicité faible est majorée par*

$$\beta(n) \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{R \in \xi_m} \| P^{n+m}((\mathbb{1}_R - \mu(R))h) \|_{L^1_\lambda}.$$

Pour tout k et l entiers positifs on dénotera par ξ_k^{k+l} la partition $T^{-k}\xi_l$. Rappelons que $\beta(n) = \sup_{m,l} D(\xi_m, \xi_{m+n}^{m+n+l})$, où $D(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ pour deux partitions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est définie par

$$D(\mathcal{R}, \mathcal{S}) = \sum_{R \in \mathcal{R}} \sum_{S \in \mathcal{S}} |\mu(R \cap S) - \mu(R)\mu(S)|.$$

Preuve. En posant S_R^+ l'union des S tels que $\mu(R \cap S) > \mu(R)\mu(S)$ et $S_R^- = X \setminus S_R^+$, il vient

$$\begin{aligned}
D(\xi_m, \xi_{m+n}^{m+n+l}) &= \sum_{R \in \xi_m} \left(|\mu(R \cap S_R^+) - \mu(R)\mu(S_R^+)| + |\mu(R \cap S_R^-) - \mu(R)\mu(S_R^-)| \right) \\
&= \sum_{R \in \xi_m} \left| \int \mathbb{1}_{S_R^+}(\mathbb{1}_R - \mu(R))h d\lambda \right| + \left| \int \mathbb{1}_{S_R^-}(\mathbb{1}_R - \mu(R))h d\lambda \right| \\
&= \sum_{R \in \xi_m} \left| \int_{T^{m+n}S_R^+} P^{m+n}((\mathbb{1}_R - \mu(R))h) d\lambda \right| + \left| \int_{T^{m+n}S_R^-} P^{m+n}((\mathbb{1}_R - \mu(R))h) d\lambda \right| \\
&\leq 2 \sum_{R \in \xi_m} \| P^{m+n}((\mathbb{1}_R - \mu(R))h) \|_{L^1_\lambda}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le Lemme. $\square$

On est maintenant en mesure de prouver la Bernoullicité faible

Preuve. *D'après le lemme que l'on vient de montrer, il suffit d'estimer*

$$\|P^{m+n}((1\!\!1_R - \mu(R))h)\|$$

avec $R \in \xi_m$. *Soit alors* $p_R \geq m$ *l'entier pour lequel* $R \in \xi_{p_R}$ *est maximal. On va décomposer la somme sur tous les cylindres* $R \in \xi_m$ *en deux parties. Soit* $M(m,n)$ *l'ensemble des cylindres maximaux pour* $p_R < m + n/2$. *Pour* $R \in M(m,n)$, *le même calcul qu'au Lemme 5.6 donne*

$$\|P^{m+n}((1\!\!1_R - \mu(R))h)\|_{L^1_\lambda} \leq \mu(R)\mathcal{O}((m+n-p_R)^{1-1/\alpha}) = \mu(R)\mathcal{O}(n^{1-1/\alpha}).$$

Or l'ensemble des cylindres qui n'appartiennent pas à $M(m,n)$ *est exactement* $T^{-m+1}[0, a_{n/2}]$, *dont la mesure est égale à*

$$\mu(T^{-m+1}[0, a_{n/2}]) = \mu([0, a_{n/2}]) = \int_0^{a_{n/2}} h(x)dx = \mathcal{O}(n^{1-1/\alpha}).$$

D'où la conclusion. □

Chapitre 6

Applications Multidimensionnelles dilatantes avec singularités

Dans ce chapitre nous allons étudier des endomorphismes dilatants T d'un sous-ensemble compact Ω de $\mathbb{R}^N$. Les sections 6.1 à 6.3 sont extraites d'un article [Sau98] en cours de soumission à la revue *Israel Journal of Mathematics*.

On considère des transformations uniformément dilatantes, contrairement au chapitre précédent. Toutefois, l'existence de singularités, et l'absence de codage simple comme les partitions de Markov [PP90], ou la structure de rang fini (FRS) [Yur96] pose d'importants problèmes. Nous allons discuter plus en détail des difficultés occasionnées à la section suivante.

Nous verrons dans un premier temps comment prouver l'existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. La méthode employée est l'établissement d'un trou spectral pour l'opérateur de Perron-Frobenius du système (voir le chapitre 2), sur l'espace de Banach (le choix du "bon espace" est très important [PGB90]) décrit en annexe B. Ce trou spectral est obtenu en appliquant un Théorème abstrait de Ionescu-Tulcea et Marinescu [ITM50], ce qui est possible car une inégalitée de type Lasota&Yorke [LY73] est vérifiée.

Ensuite, après avoir regardé de plus près les propriétés des mesures invariantes absolument continues, on donnera une borne constructive sur le nombre de composantes ergodiques (rappelons qu'il n'y a pas, en dimension supérieure, de lien simple entre ce nombre et la cardinalité de la partition dynamique, voir [GBP91]). Dans la section 6.3, on calculera une estimation constructive du taux exponentiel de décroissance des corrélations, en utilisant une technique (la métrique de Hilbert définie en annexe A) proche de celle employée au chapitre 4. Pour terminer, on établira grâce à l'étude menée au chapitre 3 les lois limites des temps de retour et du nombre de visites dans des petits ensembles, en suivant les grandes lignes du chapitre 5.

Notre approche nous permet de donner un théorème ayant des hypothèses assez peu restrictives dans ce contexte. On peut ainsi traiter des applications discontinues sur des ensembles très irréguliers, même fractals. Par ailleurs, on donne aussi des conditions générales pour qu'une application avec des domaines $\mathcal{C}^{(1)}$ par morceaux vérifie nos hypothèses. Enfin, on vérifiera dans un exemple concret (une application discontinue sur une courbe de von Koch) les conditions demandées.

6.1 Le problème des singularités

Lorsque l'on a à faire à des applications multidimensionnelles, les résultats ne sont pas aussi généraux que sur l'intervalle: La géométrie de la partition dynamique va maintenant jouer un rôle très important.

On peut comprendre le phénomène de la façon suivante : Ce qui rend une application dilatante chaotique, c'est le fait que tout petit voisinage est dilaté uniformément par l'application. De ce fait, après itérations successives, un petit voisinage finira par presque tout recouvrir assez uniformément.

Lorsque des singularités sont présentes, notre voisinage va être découpé en petits morceaux, et bien que la taille de chaque morceau ait augmenté uniformément, il peut arriver que, à cause d'un empilement trop important, la taille du voisinage ait en fait diminué ! Ce phénomène ne peut pas arriver sur l'intervalle, car un intervalle n'est coupé qu'en deux morceaux dès qu'il est assez petit, alors que la dérivée augmente exponentiellement vite en itérant. La différence essentielle est que la partition dynamique est composée d'intervalles en dimension un, alors que ce sont des ensembles plus complexes en dimension supérieure.

Les premiers résultats pour ce type d'applications utilisent comme espace fonctionnel pour l'étude spectrale de PF les fonctions à variation bornée. En dimension supérieure à un, les généralisations de la variation n'utilisent pas de structure d'espace ordonné. La variation d'une fonction est définie comme la variation totale de la mesure (éventuellement) obtenue en dérivant cette fonction au sens des distributions. Cette approche permet de traiter certains problèmes. Toutefois, la variation comporte plusieurs inconvénients, qui limitent considérablement le champ d'application de la méthode.

- Certaines fonctions de BV ne sont pas bornées,
- Les théorèmes de traces sont très sensibles à la géométrie des ensembles,

Ces deux points sont la source de plusieurs problèmes. Pour contrôler la trace des fonctions de BV sur les bords des partitions, il est nécessaire que ces bords soient réguliers (variétés régulières par morceaux de codimension 1 , absence de cuspides[1]). Citons toutefois [AZ96], où en utilisant le fait que les cuspides ne

1. On dit qu'un domaine possède une cuspide (en anglais *cusp*) en un point C si on ne peut pas faire rentrer un cône d'ouverture strictement positive dans son intérieur. Voir la Figure 6.1 pour un exemple.

posent pas de problèmes de l'extérieur, elles peuvent être “oubliées”. Mais la difficulté persiste lorsque l'extérieur n'existe pas, comme dans l'exemple donné dans [PGB90].

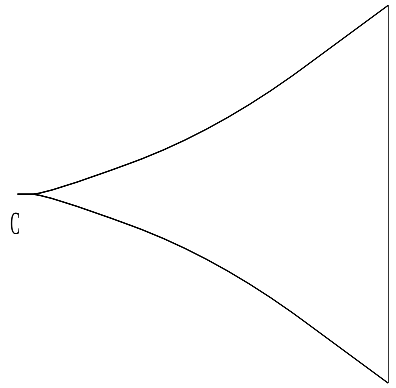

FIG. 6.1 - *Exemple d'un domaine contenant une cuspide en* C.

Nous allons utiliser dans la suite l'espace de fonctions “quasi-Holdër” V_α, dont les propriétés sont citées dans l'annexe B. Cet espace fut introduit par Keller [Kel85] pour des applications unidimensionnelles (et pour les états d'équilibre). En fait, on peut encore travailler dans cet espace en dimension supérieure, au moins pour les mesures absolument continues. Dans [Bla87], Blank a utilisé cet espace et donné des résultats similaires, avec une hypothèse ad hoc (malheureusement, celle-ci n'est pas souvent vérifiée) sur la partition dynamique.

Hypothèses

Soit Ω un compact de $\mathbb{R}^N$, avec $\mathrm{clos}(\mathrm{int}\Omega) = \Omega$, et $T : \Omega \to \Omega$. Soit $0 < \alpha \leq 1$. On suppose qu'il existe une famille finie d'ouverts $U_i \subset \Omega$ et d'applications $T_i = T_{|U_i}$ tels que :

(DS1) pour tout $i \neq j$, $U_i \cap U_j = \emptyset$,

(DS2) pour tout i, $T_i \in \mathcal{C}^{(1+\alpha)}(\overline{U}_i)$, T_i injective et $T_i^{-1} \in \mathcal{C}^{(1+\alpha)}(\overline{TU_i})$,

(DS3) $m(\Omega \backslash \bigcup_i U_i) = 0$,

(DS4) il existe ε_0 et $s < 1$ tels que pour tout $u, v \in TU_i$ vérifiant $d(u, v) \leq \varepsilon_0$ on ait $d(T_i^{-1}u, T_i^{-1}v) \leq sd(u, v)$,

(DS5) pour tout ε_0 suffisamment petit $\eta(\varepsilon_0) := s^\alpha + \sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_0} \frac{G(\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \varepsilon_0^\alpha < 1$, où

$$G(\varepsilon) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \sum_i \frac{m\left(B_{s\varepsilon}(\partial U_i) \cap B_{(1-s)\varepsilon_0}(x)\right)}{m\left(B_{(1-s)\varepsilon_0}(x)\right)}.$$

$G(\varepsilon)$ est la somme maximale sur tous les domaines de la proportion de points dans un voisinage arbitrairement petit (de rayon $(1-s)\varepsilon_0$) extrêmement proches du bord (à une distance ε) du domaine.

Remarque 6.1.1. *1. Soulignons que ni Ω ni même les U_i n'ont besoin d'être connexes.*

2. (DS5) peut sembler à première vue difficile à obtenir. En quelque sorte, cette hypothèse entraîne que les trajectoires typiques ne sentent pas les discontinuités. Donc la dynamique est essentiellement régulière. On calculera cette quantité dans un exemple d'application discontinue sur un ensemble fractal. Dans le Corollaire 6.4, on donnera des conditions explicites permettant d'obtenir (DS5) dans le cas de bords $\mathcal{C}^{(1)}$ par morceaux.

La Figure 6.2 donne un exemple de domaines U_i avec des bords réguliers. $G(\varepsilon)$ est alors le supremum sur tous les x de la somme des trois aires entre les courbes pointillées, divisé par l'aire du disque $B(x)$.

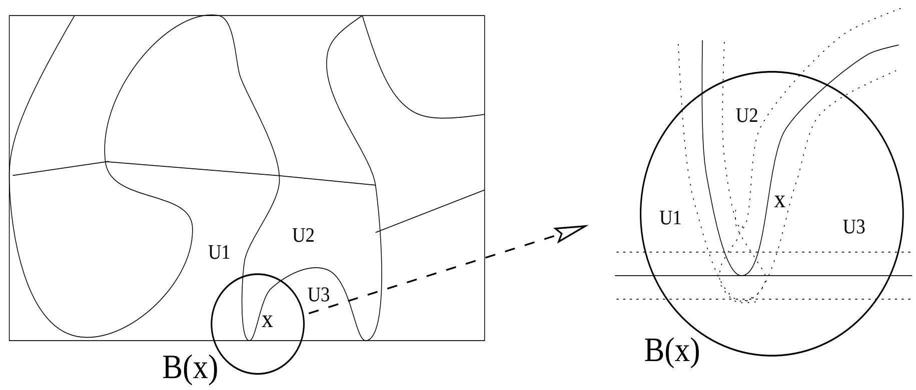

FIG. 6.2 - *Domaines typiques et voisinage des bords.*

Avec ces hypothèses, il est facile de voir que l'opérateur de Perron-Frobenius du système podéré $(\Omega, T, -\log|\det DT|)$

$$Ph = \sum_i (gh)\circ T_i^{-1}\mathbb{1}_{TU_i},$$

où le poids g est donné par $g = \dfrac{1}{|\det DT|}$. De plus m est une mesure conforme du système.

6.2 Trou spectral

Grâce aux hypothèses il sera possible d'obtenir une inégalité de type Lasota-Yorke pour ces applications. Ceci nous permet d'établir que P est un opérateur quasi-compact sur l'espace fonctionnel V_α. On utilisera des fonctions définies sur tout $\mathbb{R}^N$, et non seulement sur Ω. Bien qu'il aurait été possible de travailler avec Ω, cela nous aurait donné de très mauvaises estimations par rapport à la dimension et la forme de Ω. C'est dû au fait que la mesure de Lebesgue d'une boule dépend seulement de son rayon, alors que le volume de $B_\varepsilon(x)\cap\Omega$ est susceptible de varier énormément lorsque x est près du bord de Ω.

Voila maintenant le lemme clef de cette section

Lemme 6.1. *Supposons (DS1)–(DS5). Alors il existe $\eta < 1$ et $D < \infty$ tels que, pour $f \in V_\alpha$, $Pf \in V_\alpha$ avec*

$$|Pf|_\alpha \leq \eta |f|_\alpha + D \int_{\mathbb{R}^N} |f|.$$

Preuve. *D'après (DS2), il existe pour chaque i un voisinage de $\operatorname{clos}(TU_i)$ sur lequel on peut étendre T_i^{-1}. Sans perte de généralité on peut supposer que ce voisinage est $B_{\varepsilon_0}(TU_i)$. Dorénavant T_i et T_i^{-1} représentent les applications étendues. On supposera de plus que $B_{s\varepsilon_0}(U_i) \supset T_i^{-1} B_{\varepsilon_0}(TU_i)$, et qu'étant donné $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $x, y \in B_{s\varepsilon}(z)$, on a*

$$|\det D_x T_i - \det D_y T_i| \leq c |\det D_z T_i| \, \varepsilon^\alpha. \tag{6.1}$$

Remarquons que ceci peut être obtenu par (DS2) en prenant ε_0 assez petit (la partition étant finie). Soient $f \in V_\alpha$ et $\varepsilon < \varepsilon_0$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ on a par (DS3), (DS1) et la proposition B.3

$$\begin{aligned}
\operatorname{osc}\big(Pf, B_\varepsilon(x)\big) &\leq \sum_i \operatorname{osc}\big((fg)\circ T_i^{-1} 1\!\!1_{TU_i}, B_\varepsilon(x)\big) \\
&\leq \sum_i \operatorname{osc}\big((fg)\circ T_i^{-1}, TU_i \cap B_\varepsilon(x)\big) 1\!\!1_{TU_i}(x) + \\
&\qquad +2 \left[\operatorname*{Esup}_{TU_i \cap B_\varepsilon(x)} |fg| \circ T_i^{-1} \right] 1\!\!1_{B_\varepsilon(\partial TU_i)}(x) \\
&\leq \sum_i \operatorname{osc}\big(fg, U_i \cap T^{-1} B_\varepsilon(x)\big) 1\!\!1_{TU_i}(x) + \\
&\qquad +2 \left[\operatorname*{Esup}_{U_i \cap T_i^{-1} B_\varepsilon(x)} |fg| \right] 1\!\!1_{B_\varepsilon(\partial TU_i)}(x).
\end{aligned}$$

On montre maintenant que cette fonction est d'intégrale bornée par $\eta |f|_\alpha \varepsilon^\alpha + D\|f\|_{L^1_m} \varepsilon^\alpha$ pour des constantes $\eta < 1$ et D arbitrairement grande.

Voyons tout d'abord le premier terme de cette inégalité; pour $x \in TU_i$, si $y_i = T_i^{-1} x$,

$$R_i^{(1)}(x) := \operatorname{osc}\big(fg, U_i \cap T_i^{-1} B_\varepsilon(x)\big) \leq \operatorname{osc}\big(fg, U_i \cap B_{s\varepsilon}(y_i)\big),$$

qui est par la proposition B.3.iii, pour presque tout $x \in TU_i$ inférieur ou égal à

$$\begin{aligned} R_i^{(1)}(x) &\leq \operatorname{osc}\big(f, B_{s\varepsilon}(y_i)\big) \operatorname*{Esup}_{U_i \cap B_{s\varepsilon}(y_i)} g + \operatorname{osc}\big(g, U_i \cap B_{s\varepsilon}(y_i)\big) \operatorname*{Einf}_{B_{s\varepsilon}(y_i)} |f| \\ &\leq (1 + cs^\alpha \varepsilon^\alpha) \operatorname{osc}\big(f, B_{s\varepsilon}(y_i)\big) g(y_i) + |f|(y_i) g(y_i) cs^\alpha \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

On peut alors estimer le premier terme,

$$\sum_i R_i^{(1)} 1\!\!I_{TU_i} \leq (1 + cs^\alpha \varepsilon^\alpha) P\Big(\operatorname{osc}\big(f, B_{s\varepsilon}(\cdot)\big)\Big) + cs^\alpha \varepsilon^\alpha P|f|. \tag{6.2}$$

Une intégration nous donne alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_i R_i^{(1)} 1\!\!I_{TU_i} &\leq (1 + cs^\alpha \varepsilon^\alpha) \int \operatorname{osc}\big(f, B_{s\varepsilon}\big) + cs^\alpha \varepsilon^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |f| \\ &\leq (1 + cs^\alpha \varepsilon^\alpha) |f|_\alpha s^\alpha \varepsilon^\alpha + cs^\alpha \varepsilon^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |f|. \end{aligned}$$

Pour le second terme, les calculs sont plus délicats et requièrent une connaissance plus importante de la structure de la partition. C'est ici qu'interviennent les hypothèses géométriques sur les domaines.

$$R_i^{(2)}(x) := \operatorname*{Esup}_{U_i \cap T_i^{-1} B_\varepsilon(x)} |fg| \cdot 1\!\!I_{B_\varepsilon(\partial TU_i)}(x).$$

puisque $x \in B_{\varepsilon_0}(TU_i)$ on obtient par définition de g et (DS4) (y_i est toujours $T_i^{-1}x$)

$$R_i^{(2)}(x) \leq \operatorname*{Esup}_{B_\varepsilon(y_i)} |f| \cdot |\det D_x T_i^{-1}| (1 + cs^\alpha \varepsilon^\alpha) \cdot 1\!\!I_{T_i(B_{s\varepsilon}(\partial U_i))}(x).$$

Une première intégration sur $\mathbb{R}^N$, suivie par un changement de variable nous donne

$$\frac{1}{(1 + cs^\alpha \varepsilon^\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_i R_i^{(2)}(x) dx \leq \sum_i \int_{\mathbb{R}^N} 1\!\!I_{B_{s\varepsilon}(\partial U_i)}(y_i) \operatorname*{Esup}_{B_{s\varepsilon}(y_i)} |f| dy_i. \tag{6.3}$$

D'après la proposition B.3.iv (avec $a = s\varepsilon$, $b = (1-s)\varepsilon_0$ et $c = \varepsilon_0$) le supremum de $|f|$ est borné par son oscillation plus sa moyenne. Ceci donne (6.3) inférieur ou égal à

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \sum_i \frac{1\!\!I_{B_{s\varepsilon}(\partial U_i)}(y)}{m(B_{(1-s)\varepsilon_0}(y))} \int_{B_{(1-s)\varepsilon_0}(y)} \left[|f|(z) + \operatorname{osc}\big(f, B_{\varepsilon_0}(z)\big) \right] dz,$$

qui devient après l'échange de l'ordre d'intégration

$$\int dz \left[|f|(z) + \operatorname{osc}\big(f, B_{\varepsilon_0}(z)\big) \right] \int dy \sum_i \frac{1\!\!I_{B_{s\varepsilon}(\partial U_i)}(y) 1\!\!I_{B_{(1-s)\varepsilon_0}(z)}(y)}{m(B_{(1-s)\varepsilon_0}(y))}.$$

Finalement, la mesure d'une boule ne dépendant que de son rayon, on peut affirmer, en utilisant (DS5) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_i R_i^{(2)}(x)dx &\leq (1+cs^\alpha\varepsilon^\alpha)G(\varepsilon)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{osc}\big(f,B_{\varepsilon_0}(\cdot)\big)dm+\int_{\mathbb{R}^N}|f|dm\right)\\ &\leq (1+cs^\alpha\varepsilon^\alpha)G(\varepsilon)|f|_\alpha\varepsilon_0^\alpha+(1+cs^\alpha\varepsilon^\alpha)G(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}|f|dm.\end{aligned}$$

Pour conclure, rassemblons les estimations pour $R_i^{(1)}$ et $R_i^{(2)}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{osc}\big(Pf,B_\varepsilon(x)\big)dx &\leq (1+c(s\varepsilon)^\alpha)\left[s^\alpha\varepsilon^\alpha+2G(\varepsilon)\varepsilon_0^\alpha\right]|f|_\alpha+\\ &\quad +\left[c(s\varepsilon)^\alpha+2(1+c(s\varepsilon)^\alpha)G(\varepsilon)\right]\int_{\mathbb{R}^N}|f|dm\\ &\leq \left(\eta|f|_\alpha+D\int_{\mathbb{R}^N}|f|dm\right)\varepsilon^\alpha.\end{aligned}$$

avec

$$\eta=(1+cs^\alpha\varepsilon_0^\alpha)\left(s^\alpha+2\sup_{\varepsilon\leq\varepsilon_O}\frac{G(\varepsilon)\varepsilon_0^\alpha}{\varepsilon^\alpha}\right)$$

et

$$D=cs^\alpha+2(1+cs^\alpha\varepsilon_0^\alpha)\sup_{\varepsilon\leq\varepsilon_O}G(\varepsilon)\varepsilon^{-\alpha}.$$

Le lemme est prouvé par définition de $|\cdot|_\alpha$, à condition que la constante ε_0 soit choisie suffisamment petite pour que l'on ait $\eta<1$ (c'est possible car $\eta(\varepsilon_0)<1$ par (DS5)). □

Ce résultat est suffisant pour obtenir le trou spectral pour PF, et la décomposition spectrale annoncée au chapitre 2 est valable.

Théorème 6.2. *Soit T une application qui vérifie (DS1)–(DS5); alors T admet la décomposition spectrale (définition 2.5) du chapitre 2, et les propriétés dynamiques énoncées dans la proposition 2.7.*

Preuve. On applique le Théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [ITM50], avec comme espaces de Banach $E=L^1(\Omega,m)$ et $B=\{f\in V_\alpha|\mathrm{supp}(f)\subset\Omega\}$. (B est un Banach d'après la proposition B.5 et la fermeture de Ω). On notera respectivement $\|f\|_1$ et $\|f\|_\alpha$ les normes de f dans L_m^1 et dans B. Les hypothèses du théorème sont les suivantes:

1. *Pour toute suite $f_n\subset B$, $\|f_n\|_\alpha\leq$ une constante K, $\lim_n\|f_n-f\|_1=0$ implique $f\in B$ et $\|f\|_\alpha\leq K$.*

   C'est la cas d'après le lemme B.4.

2. *Il existe une constante H telle que $\|P^n\|_\alpha \leq H$ pour tout n.*

   Grâce au Lemme 6.1, il suffit de prendre $H = D/(1-\eta)$.

3. *L'inégalité du Lemme 6.1 est satisfaite.*

4. *L'image par P de la boule unité de B est compacte dans L^1_m.*

   La boule unité de B est compacte dans E par la proposition B.8, donc son image par P qui est continu sur E est encore compacte.

Toutes les hypothèses étant vérifiées, le Théorème (1.5) dans [ITM50] entraîne la présence d'un trou spectral (définition 2.5) pour l'opérateur de Perron-Frobenius. Finalement, comme B est dense dans $L^1(\Omega, m)$, la proposition 2.7 s'applique. □

La dynamique (de Lebesgue-presque tout point) est donc décomposée en une dynamique mélangeante (pour un itéré de l'application) sur un nombre fini d'ensembles.

Notation. *On notera κ_N le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$.*

Théorème 6.3. *Soit T une application qui vérifie (DS1)–(DS5); alors le nombre $E(T)$ de composantes ergodiques de mesure de Lebesgue positive est borné par*

$$E(T) \leq \frac{m(\Omega)}{\kappa_N} \left(\frac{D}{1-\eta} \right)^{N/\alpha}.$$

Preuve. Pour chaque composante ergodique, il existe une fonction propre h associée à la valeur propre 1 sur L^1_m. Le Théorème 6.2 assure alors que $h \in V_\alpha$, donc $|Ph|_\alpha \leq \eta |h|_\alpha + D$ grâce au Lemme 6.1. Ce qui donne en fait $|h|_\alpha \leq \frac{D}{1-\eta}$. Or, le Lemme B.2 nous dit que l'infimum de h sur une boule de rayon $\varepsilon = \left(\frac{1-\eta}{D}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \varepsilon_0$ est strictement positif.

Par conséquent, chaque composante ergodique contient une boule de taille ε. Le nombre de telles boules étant nécessairement limité puisque le volume de Ω est fini, on obtient $E(T) \leq \dfrac{m(\Omega)}{\kappa_N \varepsilon^N}$. □

Le corollaire suivant donne une condition suffisante pour qu'une application dilatante par morceaux avec des bords réguliers vérifie nos hypothèses. Il s'agit d'une condition liant le comportement hyperbolique local et la complexité de la partition dynamique.

Corollaire 6.4. *Soit T une application satisfaisant (DS1)–(DS4). Supposons que les bords des U_i soient inclus dans des sous-variétés immergées $\mathcal{C}^{(1)}$ par morceaux, et soit Y le nombre maximal de ces composantes qui peuvent se rencontrer en un point, c'est à dire*

$$Y = \sup_{x \in \Omega} \sum_i \#\{\textit{morceau lisse contenant } \partial U_i \textit{ qui contient } x\}.$$

alors, en posant $\eta_0 := s^\alpha + \dfrac{4s}{1-s} Y \dfrac{\kappa_{N-1}}{\kappa_N}$, *on a le résultat suivant :*

Si $\eta_0 < 1$ *alors (DS5) est vérifiée.*

Ajoutons ici qu'il n'est pas nécessaire de contrôler l'angle entre les morceaux des partitions, contrairement aux méthodes reposant sur la variation bornée. Cette condition est à considérer en itérant l'application, car alors $s(T^n)$ décroît exponentiellement vite, tandis que $Y(T^n)$ n'a pas vraiment de raison de croître à ce rythme.

D'ailleurs, pour des endomorphismes du cube unité définis par une application affine modulo $\mathbb{Z}^N$, $Y(T^n)$ n'augmente que polynomialement avec n, ce qui assure immédiatement que (DS5) est vrai pour n assez grand (déjà pour ce type d'application les méthodes usuelles ne donnaient pas de résultat complet, voir [Buz97]).

Preuve. Dans un premier temps, considérons chaque composante lisse séparément. Alors pour chaque point x *dans* $\mathbb{R}^N$, *on calculera une borne de la quantité qui entre en jeu dans* $G(\varepsilon)$. *Pour ce faire, on se ramène par un changement de variable au cas où le bord est un morceau d'hyperplan.*

Soit $\delta > 0$ *que l'on fixera plus tard, et* $\nu < \delta$. *Considérons un morceau lisse* Γ *du bord de* U.

Soit x *dans* $\mathbb{R}^N$. *On veut calculer :*

$$m(B_\nu(\Gamma) \cap B_\delta(x)). \tag{6.4}$$

Si x *n'est pas* $\nu + \delta$ *proche de* Γ, *alors il n'y a rien à faire. Sinon, on considère la carte locale de coordonnées "préférée"* Φ *de la variété immergée* Γ, *c'est-à-dire que* Φ *est telle que* $\Phi(\Gamma)$ *est contenu dans un hyperplan* H *de* $\mathbb{R}^N$, *et l'on choisira pour simplifier* Φ *tel que* $D_x\Phi = \mathbb{I}$. *On peut supposer* $\Phi : B_\delta(x) \to \mathbb{R}^N$ *pour un* δ *indépendant de* x *(rappelons que* Ω *est compact).*

On a alors l'estimation suivante pour $y \in B_\delta(x)$ *(*$|\cdot|$ *représente la norme Euclidienne de* $\mathbb{R}^N$*) :*

$$|\Phi(y) - \Phi(x)| \leq |D_x\Phi(y-x)| + o(\delta) \leq \delta(1 + o(1)),$$

donc ($o(1)$ *est une fonction qui s'annule avec* δ*)*

$$\Phi(B_\delta(x)) \subset B_{\delta(1+o(1))}(\Phi(x)).$$

De plus, étant donné $z \in \Gamma$ *et* $y \in B_\nu(z) \cap B_\delta(x)$ *on a*

$$|\Phi(y) - \Phi(z)| \leq |D_z\Phi(y-z)| + o(\nu) \leq (1 + o(\delta))\nu + o(\nu),$$

ce qui implique

$$\Phi(B_\nu(\Gamma)) \subset B_{\nu(1+o(\delta))+o(\nu)}(H) \subset B_{\nu(1+o(1))}(H).$$

Or l'application coordonnée est une $\mathcal{C}^{(1)}$ perturbation d'une translation, donc elle change les volumes d'un facteur $1 + o(1)$. Donc (6.4) est borné par $1 + o(1)$ fois le volume de $B_{\delta(1+o(1))}(\Phi(x)) \cap B_{\nu(1+o(1))}(H)$. Ce dernier est bien évidemment maximal lorsque l'hyperplan H coupe le centre de la boule. Dans ce cas, la quantité peut être aisément estimée par $2\nu(1 + o(1))$ fois le $(N-1)$-volume de la boule $(N-1)$-dimensionnelle de rayon $\delta(1 + o(1))$. Il vient alors

$$(6.4) \leq 2\nu\kappa_{N-1}\delta^{N-1}(1 + o(1)).$$

La compacité de Ω nous permet d'obtenir tous les "$o(1)$" uniformes en x. De plus, si δ est choisi suffisamment petit, alors le nombre de morceaux du bord n'excède pas Y.

On a donc

$$G(\varepsilon) \leq Y 2 \frac{\kappa_{N-1}}{\kappa_N} \frac{s\varepsilon}{(1-s)\varepsilon_0}(1 + o(1)).$$

Finalement, (DS5) sera vérifiée pourvu que $\eta_0 < 1$ et ε_0 est assez petit. □

Quelques exemples

Soit T une application sur $\Omega = [0,1]^2$, discontinue sur une courbe fractale de von Koch Γ. La construction de Γ est réalisée ainsi: On part de la diagonale D du carré. On la découpe en trois segments d'égale longueur, et l'on remplace celui du milieu par deux segments de même taille, comme indiqué sur la Figure 6.3 On répète cette procédure avec chaque petit segment, et ainsi de suite. Soit Γ l'ensemble obtenu à la limite.

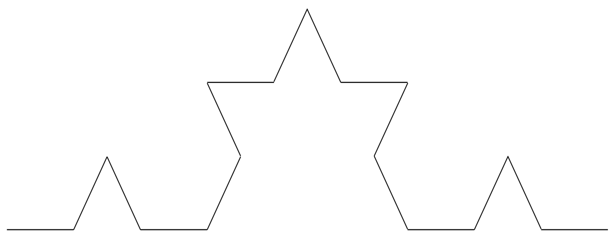

FIG. 6.3 - *Troisième étape de la construction de Γ.*

Proposition 6.5. *Une application définie sur Ω qui satisfait (DS1)–(DS4) avec $\alpha = \frac{\log 4}{\log 3}$ et discontinue sur Γ vérifie aussi (DS5) pourvu que s soit assez petit.*

Preuve. Soit $\beta = \frac{\log 4}{\log 3}$ (c'est la dimension fractale de Γ). Soit $\delta > 0$, $\nu < \delta$ et $\alpha \leq 2 - \beta$. On veut calculer la quantité (6.4) (voir le Lemme 6.4). Soit $n = [\frac{\log \nu^{-1}}{\log 3}] + 1$. Notre précision étant de ν, il suffit de considérer l'approximation de Γ au nième ordre. à cette échelle, chaque segment est de longueur $(1/3)^n$, et il y a au plus $4^n(2\delta)^\beta$ segments dans une boule de taille δ. Il s'en suit que

$$(6.4) \leq 2^\beta[(1/3)^n 2\nu + \pi\nu^2]4^n\delta^\beta \leq 2^\beta(2 + \pi)\nu^{2-\beta}\delta^\beta.$$

Donc la mesure de l'intersection divisée par la mesure de la boule de rayon δ est bornée par

$$2^{\beta}(1+2/\pi)\delta^{\beta-2}\nu^{2-\beta}.$$

Par conséquent la contribution à $G(\varepsilon)$ du bord Γ peut être bornée par

$$2^{\beta}(1+2/\pi)(\frac{s}{1-s})^{2-\beta}(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})^{2-\beta}. \tag{6.5}$$

Donc (DS5) est vérifiée dès que la contribution des autres bords est telle que

$$s^{\alpha}+\eta(\Gamma)+\sup_{\varepsilon\leq\varepsilon_0}\frac{G'(\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}}\varepsilon_0^{\alpha}<1,$$

pour $\alpha\leq\beta$, avec

$$\eta(\Gamma):=2^{\beta+1}(1+2/\pi)(\frac{s}{1-s})^{2-\beta},$$

et $G'(\varepsilon)$ est $G(\varepsilon)$ moins la contribution du bord Γ. ($\eta(\Gamma)$ est le double de (6.5) car Γ divise le carré en deux morceaux). □

On peut aussi en fait traiter le cas d'une partition dénombrable. Malheureusement, on n'a pas trouvé de conditions simples à vérifier pour ce genre de système. Toutefois, il est intéressant de donner cet exemple, car ce type d'applications avec une partition dénombrable est ce que l'on obtient quand on considère l'induction d'un système multidimensionnel non uniformément dilatant.

Définition 6.1. *Soit T une application pour laquelle on a une collection dénombrable d'ensembles U_i. Si T satisfait (DS1),(DS2$_\infty$),(DS3),(DS4) et (DS5$_\infty$) alors on appellera T une application σ-dilatante par morceaux.*

(DS2$_\infty$) *On demande (DS2), et le voisinage sur lequel T_i^{-1} peut être étendu peut être pris de rayon ε_0 pour tout i. D'autre part, on veut que l'estimation de type Hölder sur le déterminant (inégalité (6.1) dans la preuve du Lemme 6.1) soit satisfaite.*

(DS5$_\infty$) *Si ε_0 est assez petit, alors*

$$s^{\alpha}+\sup_{\varepsilon\leq\varepsilon_0}\frac{G(\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}}\varepsilon_0^{\alpha}<1,$$

avec

$$G(\varepsilon):=\sup_x\sum_i\frac{m(T_i^{-1}B_\varepsilon(\partial TU_i)\cap B_{(1-s)\varepsilon_0}(x))}{m(B_{(1-s)\varepsilon_0}(x))}.$$

Proposition 6.6. *Les Théorèmes 6.2 et 6.3 sont valides pour une application σ-dilatante par morceaux.*

Preuve. *On donne juste un bref survol de ce qui doit être changé par rapport à la preuve déjà faite. Essentiellement, il suffit de traiter la dernière partie du Lemme 6.1 (le calcul de $R_i^{(2)}$) plus précisément. Si l'on fait attention, alors on se rend compte que la condition ($DS5_\infty$) est suffisante.* □

Nous allons maintenant essayer de caractériser plus précisément les mesures invariantes ainsi construites. Tout d'abord, on peut nettement distinguer topologiquement les différentes composantes ergodiques de mesure de Lebesgue positive. En effet, on a la proposition suivante:

Proposition 6.7. *L'intérieur du support de toute mesure invariante par rapport à T, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, est de mesure pleine.*

Preuve. *On va même montrer un peu plus, que pour presque tout point du support de μ il existe une boule sur laquelle la densité h est strictement positive.*

Considérons les ensembles $N_\varepsilon = \left\{x \in \Omega \,|\, \mathrm{Einf}_{B_\varepsilon(x)} h = 0\right\}$ où $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Comme $h \in V_\alpha$, on a

$$\mu(N_\varepsilon) = \int_{U_\varepsilon} h(x)dm(x) \le \int_{U_\varepsilon} \operatorname{osc}\big(h, B_\varepsilon(x)\big)dm(x) \le |h|_\alpha \varepsilon^\alpha.$$

Ceci prouve que $\mu(N_\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Donc $N = \cap N_\varepsilon$ est de mesure nulle puisque la suite N_ε est décroissante. Ceci prouve que pour μ-presque tout point $x \in \Omega$, il existe un ε sur lequel l'infimum de h est positif. Un tel point x est alors bien évidemment dans l'intérieur du support de μ. □

Le support de chaque densité étant la fermeture d'un ouvert, deux mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et ergodiques ont des supports d'intérieurs disjoints si elles sont différentes.

La formule de Pesin est également vérifiée pour ce type d'applications.

Théorème 6.8. *Pour toute mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, l'entropie métrique est égale au taux de dilatation moyen (somme des exposants de Lyapunov positifs):*

$$\lambda_\mu(T) := \int \log|\det DT|\, d\mu = h_\mu(T).$$

Preuve. *On sait que toute densité de mesure absolument continue par rapport à Lebesgue est dans V_α, donc essentiellement bornée, ce qui suffit pour avoir le logarithme intégrable. On peut alors appliquer le Théorème 2.6 avec la partition $\mathcal{Z}$ où T est inversible, ce qui donne le résultat puisque $\varphi = -\log|\det DT|$ et $H_\mu(\mathcal{Z}) < \infty$ (car la partition $\mathcal{Z}$ est finie).* □

Maintenant que des résultats théoriques ont été donnés pour les applications dilatantes par morceaux, nous allons nous atteler à une tâche plus pratique, c'est-à-dire d'estimer concrètement le taux de décroissance des corrélations. Pour cela nous utiliserons la méthode déjà employée au chapitre 4. La connaissance de la mesure de référence (en l'occurence la mesure de Lebesgue) nous permettra de donner des résultats plus généraux. En particulier on n'a plus besoin de supposer un mélange topologique aussi fort que dans ce cas là. La méthode des cônes nous permettra alors de montrer comment le taux de décroissance est intimement relié à la vitesse de mélange de certains ensembles et à la régularité de la partition dynamique.

6.3 Décroissance des corrélations

Les résultats généraux établis à propos du spectre de l'opérateur de Perron-Frobenius assurent immédiatement un taux de décroissance exponentiel. Toutefois, le trou spectral étant établi, encore faut-il être capable d'estimer la valeur absolue de la première valeur propre hors du cercle unité. En effet, c'est elle qui gouverne le taux de décroissance. Le rayon du spectre essentiel de l'opérateur est aussi un paramètre important, voire même plus pertinent, car il donne le taux exponentiel de décroissance, en dehors des sous-espaces de dimension finie [2]. La méthode que l'on présente maintenant donne une borne constructive sur le taux de décroissance global sur tout l'espace V_α.

Théorème 6.9. *Soit T une application vérifiant (DS1)–(DS5) (ou bien σ-dilatante par morceaux) et $\mu = h_* m$ une mesure absolument continue mélangeante [3]. Le taux de décroissance est exponentiel pour toute fonction $h \in V_\alpha$, et l'on a la borne constructive*

$$\left| \int_\Omega f \circ T^n h d\mu \right| \leq C \|f\|_{L^1} \|h\|_\alpha \Lambda^n, \qquad \forall f \in L^1, \mu(f) = 0.$$

Avec $\Lambda < 1$ donné par le Lemme 6.15.

En fait, on va montrer un peu plus que cela, non seulement les densités convergent au sens faible, mais aussi au sens fort (en norme $\|\cdot\|_\alpha$).

Introduisons tout d'abord l'opérateur normalisé $\widetilde{P}$, défini sur L^1_μ par

$$\widetilde{P} f = \frac{P(f h_*)}{h_*}.$$

2. Pour être plus précis, si l'on note ρ_e le rayon du spectre essentiel, alors pour tout $\rho > \rho_e$ la décroissance des corrélations est exponentielle à vitesse au moins ρ^n en dehors d'un sous-espace de dimension finie $F(\rho)$.

3. On fait cette hypothèse pour simplifier l'énoncé, mais en fait le résultat est valable pour chacun des sous-ensembles mélangeants pour un itéré de l'application, donnés par la Proposition 2.7.

Rappelons que $\widetilde{P} = T_\mu^*$ et donc que $\widetilde{P}\mathbb{1} = \mathbb{1}$.

Théorème 6.10. *La convergence de $\widetilde{P}^n h$ vers $\mathbb{1}$ pour $h \in V_\alpha$ est exponentielle. La vitesse est supérieure à $c\Lambda^n$, où c et $\Lambda < 1$ sont donnés par le Lemme 6.15 :*

$$\|[\widetilde{P}^n(h) - \mu(h)]h_*\|_\alpha \leq c\|h\|_\alpha \Lambda^n.$$

Remarquons que le Théorème 6.9 est un corollaire immédiat du Théorème 6.10. La philosophie de la preuve est de relier la vitesse de mélange d'observables régulières à celle d'une partition finie. Finalement, le principe est très proche du cas des matrices positives. En effet, on choisit une partition assez fine, de telle sorte que chaque observable diffère peu de sa moyenne conditionnelle sur la partition, et ensuite le taux de décroissance est pratiquement donné par la puissance de l'application pour laquelle la partition finie est uniformément mélangée. La différence essentielle entre cette approche et celle du type partition de Markov est que l'on n'a pas besoin de considérer une partition dynamique.

Nous allons utiliser un cône de fonctions similaire à celui du chapitre 4. La différence majeure est que l'on suppose une "positivité" plus faible. Ceci nous permet de nous affranchir de l'hypothèse de Covering utilisée pour l'autre problème.

Étant donné une partition finie $\mathcal{A}$ du support de h_* et un nombre positif a, on définit le cône de fonctions suivantes

$$\mathcal{C}_a(\mathcal{A}) = \left\{ 0 \neq f \in L^1_\mu(\Omega, \mathbb{R}) \middle| \, |fh_*|_\alpha \leq a\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A}) \right\}.$$

On va alors montrer que $\mathcal{C}_a(\mathcal{A})$ est laissé invariant par l'opérateur normalisé $\widetilde{P}$.

C'est principalement ce premier lemme qui donne le taux de décroissance. Il assure que la moyenne conditionnelle est presque égale à la densité invariante (qui est constante) lorsque la partition est mélangée, pourvu que l'on considère des densités régulières.

Lemme 6.11. *Pour toute partition finie $\mathcal{A}$ telle que $\varepsilon = \mathrm{diam}(\mathcal{A}) < \varepsilon_0$, pour tout $a \leq \frac{1}{8}\varepsilon^{-\alpha}$ et $K > K_0$ tels que $\forall f \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$,*

$$\frac{1}{4}\mu(f) \leq \mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K f|\mathcal{A}) \leq \frac{9}{4}\mu(f).$$

Preuve. *Pour tout $x \in \Omega$, notons $A = A(x)$ l'élément de $\mathcal{A}$ qui contient x. Pour tout $f \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K f|\mathcal{A})(x) &= \frac{1}{\mu(A(x))}\int_{A(x)} \widetilde{P}^K f d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A(x))}\int_{T^{-K}A(x)} f d\mu \\
&= \sum_{A' \in \mathcal{A}} \frac{1}{\mu(A(x))}\int_{A' \cap T^{-K}A(x)} f d\mu.
\end{aligned}$$

Or m-presque partout sur $A' \cap T^{-K}A$ on a

$$\begin{aligned} fh_* &\geq \frac{1}{m(A')}\int_{A'} fd\mu - \operatorname{osc}(fh_*, A') \\ &\geq \frac{1}{m(A')}\left(\int_{A'} fd\mu - \int_{A'} \operatorname{osc}(fh_*, B_\varepsilon(y))dm(y)\right). \end{aligned}$$

Et une intégration sur $A' \cap T^{-K}A$ par rapport à m nous amène à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K f|\mathcal{A})(x) &\geq \sum_{A'\in\mathcal{A}} \frac{m(A' \cap T^{-K}A)}{m(A')\mu(A(x))}\left(\int_{A'} fd\mu - \int_{A'} \operatorname{osc}(fh_*, B_\varepsilon(y))dm(y)\right) \\ &\geq C^+(K,\mathcal{A})\mu(f) - C^-(K,\mathcal{A})|fh_*|_\alpha \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

avec les constantes $C^+(K,\mathcal{A})$ et $C^-(K,\mathcal{A})$ définies par

$$C^\pm(K,\mathcal{A}) = \sup_{\inf} \frac{m(A' \cap T^{-K}A)}{m(A')\mu(A(x))}.$$

D'après la section précédente, le rapport à une limite égale à 1 lorsque K tend vers l'infini. Il existe donc un K_0 tel que $C^+ < 2$ et $C^- > 1/2$ pour $K \geq K_0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K f|\mathcal{A}) &\geq \frac{1}{2}\mu(f) - 2|fh_*|_\alpha \varepsilon^\alpha \\ &\geq (\frac{1}{2} - 2a\varepsilon^\alpha)\mu(f). \end{aligned}$$

Ce qui montre la première inégalité. La deuxième est obtenue de façon similaire, car,

$$\mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K f|\mathcal{A})(x) \leq C^+(K,\mathcal{A})\,(\mu(f) + |fh_*|_\alpha \varepsilon^\alpha) \leq \frac{9}{4}\mu(f).$$

Ce qui conlut le lemme. □

Grâce au Lemme 6.1, la conservation d'une bonne approximation est garantie, ce qui est exprimé dans le lemme suivant.

Lemme 6.12. *Pour toute partition finie $\mathcal{A}$ telle que $\varepsilon = \operatorname{diam}(\mathcal{A}) < \varepsilon_0$ soit assez petit, et pour tout $\sigma < 1$ il existe un $a > 0$ et $K_1 > K_0$ tels que $\widetilde{P}^K\mathcal{C}_a(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_{\sigma a}(\mathcal{A})$.*

Preuve. *Posons $B = D/(1-\eta)$ où $\eta < 1$ et D sont les constantes du Lemme 6.1. Pour $f \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$, montrons que $\widetilde{P}^K f \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$, i.e.*

$$|P^K(fh_*)|_\alpha \leq a\mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K f|\mathcal{A}).$$

La positivité de $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A})$ *entraîne que*

$$\mu(|f|) \leq \mu(f) + |fh_*|_\alpha \varepsilon^\alpha.$$

D'après le Lemme 6.1 (appliqué K *fois), on a*

$$\begin{aligned} |P^K(fh_*)|_\alpha &\leq \eta^K |fh_*|_\alpha + B\mu(|f|) \\ &\leq \eta^K |fh_*|_\alpha + B[|fh_*|_\alpha \varepsilon^\alpha + \mu(f)] \\ &\leq \left[a(\eta^K + B\varepsilon^\alpha) + 1\right] \mu(f). \end{aligned}$$

Par ailleurs, le Lemme 6.11 donne la minoration pour $a \leq \frac{1}{8}\varepsilon^{-\alpha}$,

$$\mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K f|\mathcal{A}) \geq \frac{1}{4}\mu(f).$$

En combinant les deux estimations, $\widetilde{P}^K f$ *appartiendra au cône* $\mathcal{C}_{\sigma a}(\mathcal{A})$ *si*

$$\eta^K + B\varepsilon^\alpha + \frac{1}{a} \leq \frac{\sigma}{4}.$$

Cette dernière inéquation a bien sûr des solutions $0 < a < \frac{1}{8}\varepsilon^{-\alpha}$ *dès que* K *est assez grand et* ε *assez petit.* □

On a prouvé que le cône était contracté par l'opérateur $\widetilde{P}$. On fixe alors une partition $\mathcal{A}$ de diamètre suffisamment petit, ainsi que le paramètre $a > D/(1-\eta)$ (de telle sorte que $h_* \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$) tel que le lemme soit vérifié.

Il reste alors à montrer que le diamètre hyperbolique de l'image est fini, ce qui donnera un taux de contraction exponentiel pour la métrique de Hilbert.

Lemme 6.13. *La distance de deux éléments de* $f, g \in \mathcal{C}_{\sigma a}(\mathcal{A})$ *dans* $\mathcal{C}_a(\mathcal{A})$ *est bornée par*

$$\Theta_a(f,g) \leq 2\log\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \log\left\|\frac{\mathbb{E}_\mu(g|\mathcal{A})}{\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A})}\right\|_\infty \left\|\frac{\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A})}{\mathbb{E}_\mu(g|\mathcal{A})}\right\|_\infty.$$

Preuve. La distance entre f *et* g *est donnée par le supremum des* r *et l'infimum des* s *tels que* $rf \preceq g \preceq sf$. *Or,*

$$|(g - rf)h_*|_\alpha \leq |gh_*|_\alpha + r|fh_*|_\alpha \leq \sigma a \mathbb{E}_\mu(g|\mathcal{A}) + r\sigma a \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A}).$$

Par conséquent $g - rf$ *sera dans le cône si*

$$\sigma a \mathbb{E}_\mu(g|\mathcal{A}) + r\sigma a \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A}) \leq a\mathbb{E}_\mu(g - rf|\mathcal{A}),$$

c'est-à-dire

$$r(1+\sigma)\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A}) \leq (1-\sigma)\mathbb{E}_\mu(g|\mathcal{A}).$$

Donc le plus grand des r sera

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\,\mathrm{Einf}\,\frac{\mathbb{E}_\mu(g|\mathcal{A})}{\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A})}.$$

Pour trouver s, le calcul est le même, il suffit d'échanger f et g et de remplacer r par s^{-1}. □

La distance entre deux éléments est donc bornée par le rapport des deux espérances conditionnelles.

Lemme 6.14. *Le diamètre hyperbolique de $\widetilde{P}^K\mathcal{C}_a(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{C}_a(\mathcal{A})$ est fini pour tout $K \geq K_1$, borné par*

$$\Delta = 2\log\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + 8\log 3 < \infty.$$

Preuve. *Soient $f, g \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$. Le Lemme 6.11 appliqué à f et g donne*

$$\frac{\frac{1}{4}\mu(f)}{\frac{9}{4}\mu(g)} \leq \frac{\mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K f|\mathcal{A})}{\mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^K g|\mathcal{A})} \leq \frac{\frac{9}{4}\mu(f)}{\frac{1}{4}\mu(g)}.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Lemme 6.15. *La convergence de $\widetilde{P}^n f$ pour $f \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$ à la densité $1\!\!1$ est exponentielle dans la métrique de Hilbert du cône $\mathcal{C}_a(\mathcal{A})$, la vitesse étant au moins de Λ^n, où $\Lambda = \tanh(\frac{\Delta}{4})^{1/K} < 1$.*

$$\Theta_a(\widetilde{P}^n f, 1\!\!1) \leq \frac{\Delta}{\Lambda^{2K}}\Lambda^n.$$

Preuve. *Rappelons que $\widetilde{P}1\!\!1 = 1\!\!1$ et $1\!\!1 \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$. On sait que le diamètre de l'image du cône est fini, donc $\widetilde{P}^K$ est une contraction stricte d'après le Théorème de Birkhoff A.7. Le taux de contraction est donné par $\Lambda^K = \tanh(\frac{\Delta}{4}) < 1$. En écrivant $n = m(K+1) + p$ avec $0 \leq p < K$, il vient*

$$\begin{aligned}
\Theta_a(\widetilde{P}^n f, 1\!\!1) &= \Theta_a(\widetilde{P}^n f, \widetilde{P}^n 1\!\!1)\\
&\leq \Theta_a((\widetilde{P}^K)^m \widetilde{P}^{K+p} f, (\widetilde{P}^K)^m \widetilde{P}^{K+p} 1\!\!1)\\
&\leq \Theta_a \Lambda^{Km}\Theta_a(\widetilde{P}^{K+p} f, \widetilde{P}^{K+p} 1\!\!1).
\end{aligned}$$

Et la conclusion vient en remarquant que $\widetilde{P}^{K+p}f$ et $\widetilde{P}^{K+p}1\!\!1$ sont à une distance inférieure à Δ par le lemme 6.14 □

Preuve. *[Théorème 6.10] Soit $f \in \mathcal{C}_a(\mathcal{A})$. Supposons pour simplifier que $\mu(f) = 1$. On sait déjà que pour $n \geq K$, $\Theta_a(\widetilde{P}^n f, 1\!\!1) < \infty$.*

Pour tout r, s tels que $r\mathbb{1} \preceq f \preceq s\mathbb{1}$ on a

$$\begin{aligned} |\widetilde{P}^n f h_* - h_*|_\alpha &\leq |\widetilde{P}^n f h_* - r h_*|_\alpha + (1-r)|h_*|_\alpha \\ &\leq a\mathbb{E}_\mu(\widetilde{P}^n f - r|\mathcal{A}) + (1-r)a \\ &\leq 2a(1-r) \leq 2a\Theta_a(\widetilde{P}^n f, \mathbb{1}) \\ &\leq \frac{2\Delta a}{\Lambda^{2K}}\Lambda^n. \end{aligned}$$

Pour obtenir la convergence de toute densité initiale $h \in V_\alpha$, il suffit de se rendre compte que $c_h + h$ appartient au cône pour une constante c_h suffisamment grande. La condition d'appartenance

$$|(h + c_h)h_*|_\alpha \leq a\mathbb{E}_\mu(h + c_h|\mathcal{A})$$

est impliquée par l'inégalité suivante :

$$|hh_*|_\alpha + c_h|h_*|_\alpha \leq a\left(c_h + \|h\|_{L^1_\mu} / \inf_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)\right).$$

Or $|hh_*|_\alpha \leq |h|_\alpha \|h_*\|_\infty + |h_*|_\alpha \|h\|_{L^1_\mu}$, et en se rappelant que $|h_*|_\alpha \leq \sigma a$, on voit que $c_h = C\|h\|_\alpha$ convient, avec

$$C = \frac{a^{-1} + 1/\inf_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)}{1-\sigma}(\|h_*\|_\infty + |h_*|_\alpha).$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} |(\widetilde{P}^n(h) - \mu(h))h_*|_\alpha &= |(\widetilde{P}^n(h + c_h) - (c_h + \mu(h)))h_*|_\alpha \\ &\leq \mu(h + c_h)\frac{2a\Delta}{\Lambda^{2K}} \\ &\leq c\|h\|_\alpha \Lambda^n. \end{aligned}$$

Avec la constante c définie par

$$c = \frac{2a\Delta(1 + C)}{\Lambda^{2K}}.$$

□

6.4 Étude des temps de retour

Nous allons maintenant essayer de prouver la convergence vers la loi exponentielle des temps de retour normalisés, et vers la loi de Poisson du nombre de visites. Par rapport au modèle intermittent étudié au chapitre 5, la difficulté provient du fait que cette application n'est pas Markovienne; il est donc très peu probable d'obtenir une sorte d'α-mélange. Par contre, le caractère *uniformément dilatant* des applications que l'on considère permet d'obtenir des estimations *exponentielles* pour toutes les quantités mises en jeu.

On supposera pour simplifier la preuve que 1 est un valeur propre simple de l'opérateur de Perron-Frobenius, et que c'est l'unique valeur propre du cercle unité. Ou de manière équivalente, T a une unique mesure invariante absolument continue μ, qui est mélangeante. On fera de plus l'hypothèse que $\eta(\varepsilon_0) < 1/2$ dans la propriété (DS5).

On considère le cas de voisinages cylindriques de la partition $\mathcal{Z}$ de régularité de T, $\mathcal{Z} = \cup_i \{U_i\}$.

Théorème 6.16. *Pour presque tout $z \in \Omega$, la distribution limite des temps de retour est la loi exponentielle, et plus précisément pour tout $\beta < 1$,*

$$\sup t \geq 0 \left| \mu_{Z_n(z)} \left(\tau_{Z_n(z)} > \frac{t}{\mu(Z_n(z))} \right) - \exp(-t) \right| = \mathcal{O}(\mu(Z_n(z))^\beta).$$

Pour presque tout $z \in X$, la distribution limite du nombre de visites dans $Z_n(z)$ suit une loi de Poisson, et plus précisément pour tout t, K,

$$\left| \mu_{Z_n(z)} \left(N_{Z_n(z)}(t) = K \right) - \frac{t^K}{K!} \exp(-t) \right| = \mathcal{O}(\mu(Z_n)^{\beta/(K+1)}).$$

Remarque 6.4.1. *A priori la densité n'est pas minorée. Toutefois, comme l'application est dilatante sur chaque élément de la partition $\mathcal{Z}$, on a $\operatorname{diam}(\mathcal{Z}_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors une preuve similaire à celle de la Proposition 6.7 nous assure l'existence d'une fonction C, telle que μ-presque partout $0 < C < \infty$, et quel que soit $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{C(z)} \leq \frac{\mu(Z_n(z))}{m(Z_n(z))} \leq C(z).$$

On peut donc considérer les quantités $\mu(Z_n(z))$ et $m(Z_n(z))$ équivalentes dès que l'on se place autour d'un point générique $z \in \Omega$.

La stratégie générale de la preuve est essentiellement la même qu'au chapitre 5; La proposition 5.5 est valable pour ce type d'applications. La propriété de Markov n'est en général pas vérifiée dans ce cas, On ne donnera pas la démonstration qui est dans ce cas beaucoup plus simple, car l'hyperbolicité uniforme donne des estimations exponentielles.

Lemme 6.17. *Pour μ-presque tout $z \in \Omega$, la quantité $a_N(Z_n(z))$ est bornée par*

$$a_N(Z_n(z)) = N\mathcal{O}(\exp(-n\kappa)).$$

pour tout $\kappa < \lambda_\mu(T)$. $\lambda_\mu(T)$ est le taux de dilatation moyen (voir le Théorème 6.8)

Preuve. *Soit z un point typique pour les trois propriétés suivantes :*

(a) La $\mu-$mesure d'un cylindre soit équivalente à sa mesure de Lebesgue (voir remarque 6.4.1).

(b) Le taux de dilatation local $\lambda(z) := \lim_n \log|\det D_z T^n|$ est égal à la valeur moyenne λ_μ (le théorème de Birkhoff assure que c'est le cas pour presque tout point)

(c) Pour tout $\delta < 1$, $\tau_n > \delta n$ pour n assez grand ($n > n(\delta)$).

Le même calcul qu'au chapitre 5 nous donne, en posant $\tau_n = \tau(Z_n(z)$ le temps de premier retour de $Z_n(z)$, (on écrira $c(z)$ pour représenter une constante générique)

$$a_N(Z_n(z)) \leq c(z) \sup_{Z_n(z)} |\det DT^{\tau_n}|^{-1} \leq c(z)|\det D_z T^{\tau_n}|^{-1},$$

par un argument de distorsion classique. Il vient que pour tout $\varepsilon > 0$ et presque tout $z \in \Omega$,

$$a_N(Z_n(z)) \leq c(z) N \exp(-\tau_n(\lambda_\mu - \varepsilon)) \leq c(z) N \exp(-n(\lambda_\mu - 2\varepsilon)),$$

pourvu que n soit assez grand. Ceci termine la preuve car ε était arbitraire. □

Le point délicat est ici le Lemme 5.6 qui n'est vraisemblablement plus vérifié. Toutefois, il est possible de montrer le résultat suivant (on reporte au chapitre 1 pour la définition du mélange uniforme).

Lemme 6.18. *Les partitions $\mathcal{U}^{(n)} = \{Z_n, Z_n^c\}$ pour $Z_n \in \mathcal{Z}_n$ sont uniformément mélangeantes, la vitesse de mélange étant majorée par*

$$\gamma_{\mathcal{U}^{(n)}}(N) = \mathcal{O}(\Lambda^{N-n}).$$

Preuve. *On va montrer que la partition $\mathcal{U} = \{Z, Z^c\}$ est uniformément mélangeante, avec une vitesse $\gamma(N) = \lambda^N$. Ce mélange entraînera immédiatement que les partitions $\mathcal{U}^{(n)} = \{Z_n, Z_n^c\}$ pour $Z_n \in \mathcal{Z}_n$ le sont également, avec $\gamma_{\mathcal{U}^{(n)}}(N) = \gamma_{\mathcal{U}}(N-n)$.*

Posons $r_m = \sup_{R \in \sigma(\mathcal{Z}_m)} |P^m(1_R h)|_\alpha$. Alors le Théorème 6.9 assure que $\gamma(N) \leq C(1 + \sup_m r_m)\Lambda^N$. Donc si l'on arrive à montrer que la suite r_m est bornée, on aura un mélange exponentiel de la partition $\mathcal{U}$. Soit $R \in \sigma(\mathcal{Z}_{m+1})$. Soit alors R_+ (resp. R_-) le plus petit ensemble mesurable pour $\sigma(\mathcal{Z}_m)$ qui contient $R \cap T^{-m}Z$ (resp. $R \cap T^{-m}Z^c$). Alors R est l'union disjointe de $R_+ \cap T^{-m}Z$ et $R_- \cap T^{-m}Z^c$, donc

$$\begin{aligned} P^{m+1} 1\!\!1_R h &= P^{m+1}(1\!\!1_Z \circ T^m 1\!\!1_{R_+} h) + P^{m+1}(1\!\!1_{Z^c} \circ T^m 1\!\!1_{R_-} h) \\ &= P(1\!\!1_Z P^m(1\!\!1_{R_+} h)) + P(1\!\!1_{Z^c} P^m(1\!\!1_{R_-} h)). \end{aligned}$$

En regardant la preuve du Lemme 6.1, on peut se convaincre aisément que les discontinuités engendrées par les fonctions caractéristiques $1\!\!1_Z$ et $1\!\!1_Z^c$ sont déjà *prises en compte, ainsi on obtient*

$$\begin{aligned}|P^{m+1}1\!\!I_R h|_\alpha &\leq |P(1\!\!I_Z P^m(1\!\!I_{R_+}h))|_\alpha + |P(1\!\!I_{Z^c}P^m(1\!\!I_{R_-}h))|_\alpha\\ &\leq \eta|P^m(1\!\!I_{R_+}h)|_\alpha + D\mu(R_+) + \eta|P^m(1\!\!I_{R_-}h)|_\alpha + D\mu(R_-)\\ &\leq 2\eta r_m + 2D.\end{aligned}$$

Donc $r_{m+1} \leq 2\eta r_m + 2D$, et comme $2\eta < 1$, r_m est bornée.

On a donc montré que la vitesse de mélange de la partition $\mathcal{U}^{(n)}$ est exponentielle, avec $\gamma_{\mathcal{U}^{(n)}}(N) = \mathcal{O}(\Lambda^{N-n})$. □

Voyons maintenant la démonstration du Théorème 6.16:

Preuve. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour la statistique du premier temps de retour, on utilisera le Lemme 3.4. En prenant $N = \mu(Z_n)^{-\varepsilon}$, on a par le Lemme 5.4 pour $\kappa < \lambda_\mu = h_\mu$, suffisamment grand*

$$a_N(Z_n) = N\mathcal{O}(\exp(-n\kappa)) = \mathcal{O}(\mu(Z_n)^{1-2\varepsilon}).$$

Où l'on a utilisé le théorème de Shannon-McMillan-Breiman pour la dernière estimation. Remarquons qu'ici $b_N(Z_n(z))$ est majoré par $\Lambda^{\mu(Z_n)^{-\varepsilon}-n}/\mu(Z_n)$. Ce dernier terme est largement négligeable devant $\mu(Z_n)$, l'erreur pour le premier temps de retour est d'ordre $\mathcal{O}(\mu(Z_n)^\beta)$ pour tout $\beta < 1$, ce qui conclut la première partie du théorème.

Pour le nombre de visites dans le cylindre $Z_n(z)$, On prendra aussi $M = \mu(Z_n)^{-\varepsilon}$. Pour la partition $\mathcal{U} = \{Z_n, Z_n^c\}$, on a encore

$$\gamma(M)/\mu(Z_n) = \mathcal{O}(\Lambda^{\mu(Z_n)^{-\varepsilon}-n}/\mu(Z_n)^2)$$

qui est négligeable devant $M\mu(Z_n)$. Donc d'après le Théorème 3.5 les différences des temps de retour successifs sont indépendants à $\mathcal{O}(\mu(Z_n)^\beta)$ près, pour tout $\beta < 1$. La conclusion vient alors en appliquant le Théorème 3.6. □

6.5 Réseaux d'applications couplées?

On définit un réseau d'applications couplées de la façon suivante : étant donné un ensemble R et un endomorphisme f de X, on considère sur l'espace produit $M = X^R$ le réseau d'applications découplées $T_0 = f^{\otimes R}$:

$$\begin{array}{rll}T_0: & M & \to M\\ & (x_r)_{r\in R} & \to (f(x_r))_{r\in R}.\end{array}$$

Ensuite on introduit un couplage $\Phi : M \to M$ par $T = \Phi \circ T_0$. Généralement, on prend Φ comme une perturbation de l'identité; Par perturbation de l'identité, on entend que certaines propriétés du système découplé sont préservées. Ce peut être une conjugaison régulière avec T_0, la conservation d'une structure hyperbolique, etc..

Lorsque le couplage est de type diffusif (par exemple sur les plus proches voisins) on parle alors de système de type réaction-diffusion.

Si T est une application dilatante par morceaux d'une partie compacte X de $\mathbb{R}^N$, et R un ensemble fini, alors T_0 est aussi une application dilatante par morceaux. A faible couplage, on peut donc espérer obtenir les mêmes propriétés pour le réseau couplé que pour l'application initiale.

Voyons un peu plus en détail comment traiter ce type de systèmes:

Tout d'abord, si l'on veut des hypothèses raisonnables sur l'application, il est nécessaire d'adapter la métrique à notre problème. En effet, la structure produit du système fait qu'il est plus judicieux de choisir une distance légèrement différente de la distance originale: On prendra, si $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur X,

$$d(x, y) = \max\{|x_r - y_y| | r \in R\}.$$

La moindre des choses serait que l'application découplée vérifie les hypothèses dès que l'application locale les vérifie. Ce n'est malheureusement pas le cas, car même avec cette nouvelle métrique, les hypothèses sont très contraignantes par rapport à la dimension. En effet, la multiplicité de la partition dynamique augmente inévitablement de manière exponentielle avec le nombre de sites, même s'il sont découplés. C'est principalement dû au fait que l'on n'a pas utilisé la structure particulière des singularités dans la preuve du lemme 6.1. Pour tenir compte de ceci, il faudrait établir un théorème d'extension au domaine de la trace d'une fonction sur le bord du dit domaine qui ne dépende pas de la dimension. Ainsi, la contraction ($\eta < 1$) ne dépendrait plus de la dimension, seule la constante D pourrait augmenter (vraisemblablement exponentiellement) avec la dimension.

Conclusion

Dans ce travail on a établi l'existence de plusieurs types de comportements limite pour certains systèmes dynamiques. Dans un premier temps on a développé une méthode alternative pour construire des états d'équilibre dans des systèmes présentant une quantité dénombrable de singularités. Pour les autres applications considérées, on a construit des mesures invariantes (SRB) décrivant les orbites "naturelles" de ces systèmes. Au delà de l'existence de ces mesures, les méthodes employées nous ont aussi donné des estimations constructives sur la vitesse de décroissance des corrélations. Cette connaissance nous a aussi permis de conduire l'étude des temps de retour plus précisément, en particulier on a obtenu une majoration fine de la vitesse de convergence des distributions des temps de retour vers leur loi limite.

On voudrait maintenant revoir d'un oeil plus critique les méthodes mises en oeuvre et les résultats présentés dans ce travail. Bien que certains problèmes semblent relativement accessibles, d'autres sont fondamentalement plus persistants.

La méthode perturbative du chapitre 5 présente un inconvénient majeur; Il s'agit de la nécessité d'avoir un mélange topologique très fort (recouvrement) et cette hypothèse n'est pas raisonnable pour des systèmes plus compliqués (par exemple en dimension supérieure).

Tout en étant générales et conceptuellement satisfaisantes, les hypothèses données sur les applications multidimensionnelles avec singularités semblent délicates à vérifier lorsque la partition est dénombrable (il n'y a pas d'analogue intéressant au Corollaire 6.4).

L'étude de la récurrence du chapitre 3 était assez générale pour s'appliquer à nos systèmes, toutefois celle-ci présuppose une connaissance assez fine du taux de décroissance des corrélations. On aimerait envisager le même problème pour les systèmes (non-uniformément) hyperboliques quelconques.

Pour conclure, voyons quelles ouvertures sont possibles dans la continuité de cette thèse. Le caractère hyperbolique des applications ne semble pas influencer le comportement asymptotique des temps de retour. Par contre, les vitesses de convergence calculées au chapitre 5 en dépendent de façon très nette. Il s'agirait maintenant de comprendre si une telle dépendance est purement technique, ou bien cache une raison plus profonde. Le formalisme thermodynamique (pression, états d'équilibre) est bien compris pour les systèmes axiome A ou les applications de l'intervalle, mais pour les applications multidimensionnelles avec singularités bien des questions restent en suspens. La suite logique serait aussi de comprendre le passage à la dimension infinie, afin de traiter les systèmes spatialement étendus.

Annexe A

Espaces ordonnés et métrique de Hilbert

Dans ce chapitre on rappelle dans un premier temps quelques définitions élémentaires bien connues. On présente ensuite l'essentiel des propriétés des espaces ordonnés utilisées tout au long de ce travail. Pour une vision plus complète de cette théorie, on renvoie à l'excellent ouvrage de G.D. Birkhoff [Bir79].

A.1 Définitions préliminaires

Pour éviter toute ambiguïté, on rappelle dans cette section quelques définitions fondamentales.

Définition A.1 (ordre partiel). *Une relation d'ordre partiel sur E est une relation binaire $x \leq y$ réflexive, antisymétrique et transitive.*

Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on écrira $x < y$.

Définition A.2 (ordre total). *Un ensemble totalement ordonné, ou chaîne, est un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel telle que pour tout x, y, $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Exemple A.1.1. *L'ensemble des nombres réels muni de la relation d'ordre usuelle est un ensemble totalement ordonné.*

Un autre exemple est l'ordre lexicographique sur le produit $X^{\mathbb{N}}$, où X est un espace totalement ordonné par $\leq$. Il est défini, pour $u \neq v \in X^{\mathbb{N}}$ par

$$u < v \Leftrightarrow u_n < v_n \text{ où } n \text{ est le plus petit entier tel que } u_n \neq v_n.$$

Définition A.3. *Soit X un ensemble totalement ordonné. On appellera intervalle ouvert les sous-ensembles de X de la forme*

$$(a, b) = \{x \in X \,|\, a < x \text{ et } x < b\}.$$

Les intervalles semi-ouverts $[a,b)$ *ou* $(a,b]$ *et fermés* $[a,b]$ *sont définis par ajout à l'intervalle ouvert (a,b) des points extrêmaux correspondants. On notera*

$$(a,\infty) = \bigcup_{a<b}(a,b) \text{ et } (-\infty,b) = \bigcup_{a<b}(a,b).$$

Définition A.4. *Un endomorphisme* T *de l'espace totalement ordonné* X *vérifie la propriété de Darboux si l'image d'un intervalle est un intervalle.*

Définition A.5. *Un endomorphisme* T *d'un espace ordonné* X *est dit croissant si il préserve l'ordre, décroissant si il l'inverse. Un endomorphisme croissant ou décroissant est dit monotone.*

Lorsque P est un opérateur linéaire croissant sur un espace vectoriel partiellement ordonné, on dira que P est un *opérateur positif.*

A.2 Topologie de l'ordre

On supposera dans cette section que X est un espace totalement ordonné. On va ensuite donner quelques définitions moins classiques, ainsi que certains critères permettant de travailler avec des espaces topologiques ordonnés.

Définition A.6. *On définit sur* X *la topologie de l'ordre comme étant la topologie la moins fine contenant les intervalles ouverts.*

Il est immédiat de voir que les ouverts sont exactement les unions quelconques d'intervalles ouverts. De même, les fermés sont des intersections quelconques d'unions finies d'intervalles fermés.

En prenant les intervalles ouverts comme base de voisinage, on montre facilement le théorème suivant :

Théorème A.1. *Tout espace totalement ordonné muni de sa topologie de l'ordre est un* espace de Hausdorff normal.

Définition A.7. *Pour tout ensemble* $A \subset X$ *on dira que* x *est un minorant (resp. majorant) ssi tout élément de* A *est supérieur (resp. inférieur) à* x.

Définition A.8. *Pour tout ensemble* $A \subset X$ *on dira que* x *est une borne inférieure, (resp. supérieure) et l'on notera* $x = \inf A$ *(resp.* $x = \sup A$*) de* A *ssi* a *est le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants).*

Proposition A.2. *Un ensemble* $K \subset X$ *est compact pour la topologie de l'ordre ssi tout sous-ensemble non vide de* K *possède une borne inférieure et une borne supérieure dans* K.

Montrons tout d'abord le lemme suivant

Lemme A.3. *Tout compact K possède une borne inférieure et une borne supérieure dans K.*

Preuve. *Soient K un compact non vide de X et $k \in K$. Si le compact $Q = K \cap \{x \leq k\}$ est recouvert par l'ensemble $P = \bigcup_{x \in Q}(x, \infty)$, alors il existe un nombre fini d'intervalles (x_i, ∞) avec $x_i \in K$ et $x_i \leq k$ qui recouvrent K, ce qui est impossible. Donc il existe un point de K qui n'est pas recouvert, et c'est forcément* $\inf K$. *On procède de la même façon pour le* $\sup K$. □

Preuve. [proposition] Soient K un compact et $A \subset K$. Si A n'est pas vide, alors $B = K \cap \bigcap_{a \in A}[\inf K, a]$ est un fermé non vide inclus dans K, donc il est compact. Ceci implique que $\sup B$ existe et appartient à B. On voit alors que $\inf A = \sup B \in K$. On procède de la même façon pour le $\sup A$.

Voyons maintenant la réciproque. X étant un espace T_1, le théorème d'Alexander nous dit qu'il suffit de vérifier que la sous-base des fermés composée des intervalles fermés vérifie la propriété de compacité. Soit $F_i = [a_i, b_i]$ une famille d'intervalles fermés avec $a_i, b_i \in K$. Si pour tout i, j,

$$K \cap [a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = K \cap [\sup(a_i, a_j), \inf(b_i, b_j)] \neq \emptyset,$$

alors $a_i \leq b_j$. Donc $c = \sup_i a_i$ existe, et appartient à l'intersection des F_i, qui est non vide. □

Définition A.9. *Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. On dira que f est à variation bornée sur X si sa variation $\bigvee f$ est finie.*

$$\bigvee f = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \,\middle|\, x_0 < x_1 < \cdots < x_k \right\}.$$

On notera $BV(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \bigvee f < \infty\}$.

Montrons un analogue du lemme d'Urysohn pour les fonctions à variation bornée

Lemme A.4. *Soient $[b, c] \subset (a, d) \subset X$. Il existe une fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$, positive, à variation bornée, $0 \leq \varphi \leq 1$, nulle en dehors de (a, d) et égale à 1 sur $[b, c]$.*

Preuve. *On va construire une fonction φ nulle en a et croissante jusqu'en b. Soit $q_n \in (0, 1)$ une suite dense dans $[0, 1]$, avec $q_0 = 0$ et $q_1 = 1$. On construit une suite x_n ordonnée comme q_n par le procédé suivant :*

on pose tout d'abord $x_0 = a$ et $x_1 = b$. A l'étape $n \geq 2$, on prend $i = \sup\{q_k < q_n | k < n\}$ et $j = \inf\{q_k < q_n | k < n\}$, et on considère l'intervalle $I_n = (x_i, x_j)$. Si I_n est vide, alors $\varphi = \mathbb{1}_{[x_j, b]}$ convient, sinon on prend $x_n \in I_n$, et ainsi de suite...

Si aucun des I_n n'est vide, alors $\varphi(x) = \sup\{q_n | x_n < x\}$ convient. □

On a aussi un analogue du théorème de représentation de Riesz pour les fonctionnelles sur BV. Notons que l'on ne suppose pas la compacité de l'espace, mais seulement une version plus souple.

Définition A.10 (famille compacte). *Une famille $(\mathcal{Z}_n)_n$ tel $Z \in \mathcal{Z}_n$ soit une partition de X en intervalles est une famille compacte ssi pour toute suite $x_j \in X$,*

$$\forall n \ \text{Card}\{Z_n(x_j) | \, j \geq 0\} < \infty, \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{j \geq 0} Z_n(x_j) \text{ est compact.}$$

Théorème A.5. *Si $(\mathcal{Z}_n)_n$ est une famille compacte de X et p est une fonctionnelle linéaire positive sur BV, σ-additive sur $\mathcal{Z}_n$, telle que $\varepsilon_n = \sup\{p(Z) | \, Z \in \mathcal{Z}_n\} \to 0$ quand $n \to \infty$, alors il existe une unique mesure borélienne m qui représente p dans le sens suivant :*

$$\forall f \in BV(X), \quad \int_X f \ dm = p(f).$$

Preuve. *On utilise une construction de Carathéodory pour obtenir une mesure borélienne qui minore p. Pour simplifier, on notera $p(J) = p(\mathbb{1}_J)$ quand J est une union finie d'intervalles, et l'on supposera que $p(X) = 1$.*

Pour tout $A \subset X$ on définit

$$m(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} p(J_i) \,\middle|\, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i, \ J_i \text{ intervalle ouvert} \right\}.$$

Par construction, m est une mesure extérieure. Les ensembles mesurables formant une σ-algèbre, il suffit de vérifier que les intervalles fermés sont mesurables pour montrer que les boréliens le sont.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé. On veut montrer

$$\forall A \subset X, \quad m(A) = m(A \cap I) + m(A \backslash I).$$

Soient (J_i^{int}) et (J_i^{ext}) des recouvrements par des intervalles ouverts de $A \cap I$ et $A \backslash I$.

Comme $(J_i^{int}, J_i^{ext})_i$ recouvre A,

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} p(J_i^{int}) + \sum_{i=1}^{\infty} p(J_i^{ext}),$$

donc $m(A) \leq m(A \cap I) + m(A \backslash I)$.

Soit (J_i) un recouvrement de A par des intervalles ouverts.

Pour $\varepsilon > 0$, à chaque J_i on peut associer trois intervalles ouverts J_i^-, J_i^0, J_i^+ tels que respectivement $(J_i^0)_i$, $(J_i^-, J_i^+)_i$ recouvrent $A \cap I$, $A \backslash I$ et $p(J_i^-) + p(J_i^0) + p(J_i^+) \leq p(J_i) + \varepsilon/2^i$. Il suffit de prendre, par exemple, $I_i^0 = \cup_{x \in A \cap I} Z_n(x)$ avec n tel que $3\varepsilon_n < \varepsilon/2^i$.

On obtient

$$m(A\cap I)+m(A\backslash I)\leq \sum_{i=1}^{\infty} p(J_i^0)+\sum_{i=1}^{\infty} p(J_i^-)+p(J_i^+)\leq \sum_{i=1}^{\infty} p(J_i)+\varepsilon.$$

Donc $m(A)\geq m(A\cap I)+m(A\backslash I)$.

Par conséquent m *est une mesure borélienne. Il reste maintenant à voir le lien entre* m *et* p.

Soit I *un intervalle de* X. *Par définition,* $m(I)\leq p(I)$.

Donc il suffit de montrer que $m(X)=1$ *pour conclure que* m *et* p *coïncident sur les intervalles.*

Soit $\varepsilon>0$ *et* x_j *une suite de* X *telle que* $p(Q_n)>1-\varepsilon$, *où* $Q_n=\bigcup_{j\geq 0} Z_n(x_j)$ *(l'existence d'une telle suite est la conséquence de la* σ*-additivité sur* $\mathcal{Z}_n$ *et de* $\varepsilon_n\to 0$.

Soit alors $K=\bigcap_{n\geq 0} Q_n$. K *étant compact, par définition de* m *il existe un recouvrement par des intervalles ouverts* $(J_i)_{i=1}^N$ *tel que*

$$m(X)\geq m(K)\geq \sum_{i=1}^{N} p(J_i)-\varepsilon.$$

Pour n *tel que* $N\varepsilon_n<\varepsilon$, *on a* $J_i^{(n)}=\bigcup_{x\in J_i} Z_n(x)$ *recouvre* Q_n, *et* $p(J_i^{(n)})\leq p(J_i)+2\varepsilon_n$. *On en déduit*

$$m(X)\geq \sum_{i=1}^{N}(p(J_i^{(n)})-\varepsilon_n)-\varepsilon\geq 1-3\varepsilon.$$

ε *étant arbitraire, on obtient* $m(X)=1$.

m *est donc une mesure de probabilité borélienne qui est égale à* p *sur les intervalles. Toute fonction à variation bornée étant une limite uniforme de fonctions constantes par morceaux (avec un nombre fini de sauts), on conclut que* m *et* p *sont égales sur* $BV(X)$.

En remarquant que la construction de Carathéodory est une involution, l'unicité du représentant est immédiate. En effet, supposons qu'il existe une autre mesure borelienne m' *qui représente* p. *Alors la construction va redonner* m' *puisqu'elle est* σ*-additive. Par conséquent,* $m=m'$. □

A.3 Métrique de Hilbert et espaces projectifs

Dans cette section nous introduirons une méthode développée par Garret Birkhoff [Bir79], qui est très performante dans l'analyse de certains opérateurs positifs.

Définition A.11 (cône convexe). *Soit* $\mathcal{V}$ *un espace vectoriel. On appellera cône un sous ensemble* $\mathcal{C}\subset\mathcal{V}$ *vérifiant les quatre propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{C} \cap -\mathcal{C} = \emptyset$,
(ii) $\forall \lambda > 0 \quad \lambda\mathcal{C} = \mathcal{C}$,
(iii) $\mathcal{C}$ *est convexe,*
(iv) $\forall f, g \in \mathcal{C}\ \forall \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \alpha_n \to \alpha, \quad g - \alpha_n f \in \mathcal{C} \Longrightarrow g - \alpha f \in \mathcal{C} \cup \{0\}$.

Un ensemble qui vérifie (iv) est appelé “Intégralement clos”, soulignons que $\mathcal{V}$ n'a pas besoin de topologie.

Lemme A.6. *la relation définie sur* $\mathcal{V}$ *par*

$$f \preceq g \Leftrightarrow g - f \in \mathcal{C} \cup \{0\}$$

est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{V}$ *compatible avec la structure algébrique de* $\mathcal{V}$*; elle vérifie* $\forall f, g \in \mathcal{V}$
(i) $f \preceq 0$ *et* $0 \preceq f \Rightarrow f = 0$,
(ii) $\forall \lambda > 0 \quad 0 \preceq f \Leftrightarrow 0 \preceq \lambda f$,
(iii) $f \preceq g \Leftrightarrow\ 0 \preceq g - f$,
(iv) $\forall \alpha_n \in \mathbb{R}\ \ \alpha_n \to \alpha,\ \ \alpha_n f \preceq g \Rightarrow \alpha f \preceq g$,
(v) $0 \preceq f$ *et* $0 \preceq g \Rightarrow 0 \preceq f + g$.

Preuve. (i), (ii) et (iv) sont exactement les propriétés correspondantes du cône.
(iii) est une conséquence directe de la définition de $\preceq$
(v) provient des propriétés (ii) et (iii) du cône, car

$$f + g = 2\left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g\right).$$

□

Remarque A.3.1. *Il est aussi possible, étant donné une relation d'ordre partiel sur* $\mathcal{V}$ *vérifiant les propriétés citées précédemment (cf [Bir79]) de lui associer le cône* $\mathcal{C}$ *des éléments strictement positifs, i.e.*

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{V} |\, 0 \preceq f, f \neq 0\}.$$

Définition A.12 (Métrique de Hilbert). *On peut maintenant définir une pseudo-métrique* Θ *sur* $\mathcal{C}$ *par la construction suivante :*

$$\begin{aligned} \alpha(f,g) &= \sup\{\lambda > 0 |\, \lambda f \preceq g\}, \\ \beta(f,g) &= \inf\{\mu > 0 |\, g \preceq \mu f\}, \\ \Theta(f,g) &= \log\frac{\beta(f,g)}{\alpha(f,g)}. \end{aligned}$$

On prendra $\alpha = 0$ *ou* $\beta = \infty$ *lorsque les ensembles correspondants sont vides.*

Remarque A.3.2 (Pseudo-métrique). *C'est en fait une métrique projective, car deux éléments proportionnels sont à une distance nulle. De plus, on peut avoir* $\Theta(f,g)=\infty$ *lorsque* f *et* g *ne sont pas comparables ou bien que l'un des deux éléments se trouve sur le bord du cône.*

Pour mieux comprendre à quoi correspond cette métrique, rien ne vaut un petit dessin : Si l'on prolonge le segment de droite $[xy]$ (contenu dans le cône), et que l'on note u et v les deux points d'intersection de la droite (x,y) avec le bord du cône, alors la distance est donnée par

$$\Theta(x,y) = \log \frac{|x-u||y-v|}{|x-v||y-u|}.$$

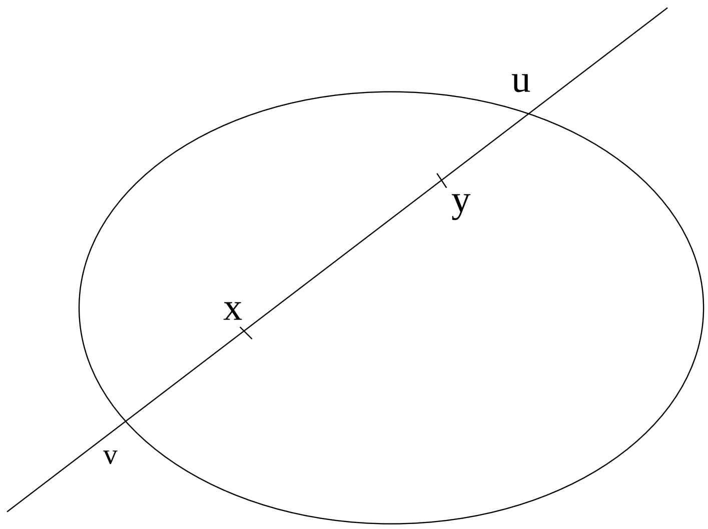

FIG. A.1 - *Métrique de Hilbert-Birkhoff.*

Le théorème suivant, dû à Birkhoff [Bir79], montre que tout opérateur linéaire positif (i.e. laissant le cône invariant) dont le diamètre de l'image du cône est fini est une contraction pour la métrique de Hilbert associée.

Théorème A.7 (Birkhoff). *Soit* $L : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ *un opérateur linéaire tel que* $L(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_2$, Θ_i *la métrique de Hilbert associée au cône* $\mathcal{C}_i$. *Si l'on note*

$$\Delta = \sup_{f,g\in\mathcal{C}_1} \Theta_2(Lf, Lg),$$

alors :

$$\Theta_2(Lf,Lg) \leq \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right)\Theta_1(f,g) \quad \forall f,g\in\mathcal{C}_1$$

($\tanh(\infty)=1$*).*

Preuve. *Soient $f, g \in \mathcal{C}_1$. Si $\alpha = 0$ ou $\beta = \infty$, alors l'inégalité est triviale. Sinon, on a d'après (iv) du lemme A.6*

$$\Theta_1(f, g) = \log \frac{\beta}{\alpha}$$

avec $\alpha f \preceq g \preceq \beta f$.

Si $\Delta = \infty$, le résultat est une conséquence directe de la positivité de L , car $\alpha L f \preceq L g \preceq \beta L f$.

Si $\Delta < \infty$, alors par hypothèse,

$$\Theta(L(g - \alpha f), L(\beta f - g)) \leq \Delta,$$

il existe donc $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\log \frac{\mu}{\lambda} \leq \Delta$. et

$$\lambda L(g - \alpha f) \preceq L(\beta f - g) \preceq \mu L(g - \alpha f).$$

L'inégalité précédente entraîne

$$\frac{\mu\alpha + \beta}{1 + \mu} L f \preceq L g \preceq \frac{\lambda\alpha + \beta}{1 + \lambda} L f,$$

et par définition de la métrique

$$\begin{aligned}
\Theta_2(Lf, Lg) &\leq \log \frac{(\lambda\alpha + \beta)(1 + \mu)}{(\mu\alpha + \beta)(1 + \lambda)} \\
&\leq \log \frac{\exp(\Theta_1(f, g)) + \lambda}{\exp(\Theta(f, g)) + \mu} - \log \frac{1 + \mu}{1 + \lambda} \\
&\leq \int_0^{\Theta_1(f,g)} \frac{(\mu - \lambda)\exp(\xi)}{(\exp(\xi) + \lambda)(\exp(\xi) + \mu)} d\xi \\
&\leq \Theta_1(f, g) \sup_{t \geq 1} \frac{(\mu - \lambda)t}{(t + \lambda)(t + \mu)} \\
&\leq \Theta_1(f, g) \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^2} \\
&\leq \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) \Theta_1(f, g).
\end{aligned}$$

□

Cette contraction n'est toutefois pas forcément exploitable directement. En particulier, il faudrait savoir si la métrique est complète pour appliquer un théorème de point fixe.

L'objet du prochain lemme est de relier cette distance à certaines normes définies sur $\mathcal{V}$.

Lemme A.8. *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{V}$ telle que*

$$\forall f, g \in \mathcal{V} \quad -f \preceq g \preceq f \Longrightarrow \|g\| \leq \|f\|,$$

et $p : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ homogène et croissante, i.e.

$$\begin{array}{rlcl} \forall \lambda > 0 & p(\lambda f) & = & \lambda p(f) \\ \forall f, g \in \mathcal{C} & f \preceq g & \Longrightarrow & p(f) \leq p(g). \end{array}$$

alors

$$\forall f, g \in \mathcal{C} \quad p(f) = p(g) > 0 \Longrightarrow \|f - g\| \leq (\exp(\Theta(f, g)) - 1) \min(\|f\|, \|g\|).$$

Preuve. Soient $f, g \in \mathcal{C}$.

Si $\alpha = 0$ ou $\beta = \infty$, alors l'inégalité est triviale. Sinon, on a

$$\Theta(f, g) = \log \frac{\beta}{\alpha},$$

avec $\alpha f \preceq g \preceq \beta f$.

ce qui donne, d'après les propriétés de p :

$$\alpha p(f) \leq p(g) \leq \beta p(f),$$

et donc $\alpha \leq 1 \leq \beta$. On obtient alors

$$(\alpha - \beta) f \preceq (\alpha - 1) f \preceq g - f \preceq (\beta - 1) f \preceq (\beta - \alpha) f,$$

ce qui entraîne

$$\begin{array}{rcl} \|g - f\| & \leq & (\beta - \alpha)\|f\| \\ & \leq & \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha}\|f\| \\ & \leq & (\mathrm{Exp}[\Theta(f, g)] - 1)\|f\| \end{array}$$

On conclut alors en échangeant f et g. $\square$

Remarque A.3.3 (choix de p). *On peut prendre dans le lemme précédent $p(\cdot) = \|\cdot\|$ qui vérifie bien la propriété requise. Un cas intéressant est aussi lorsque p est une application linéaire telle que $p(\mathcal{C}) \geq 0$ (comme par exemple l'intégrale sur un cône de fonctions réelles positives).*

Annexe B

L'espace quasi-Hölder

Nous allons dans cet appendice définir et donner certaines propriétés d'un espace de fonctions "Hölder en moyenne" (issues de Keller [Kel85]). Ces fonctions sont régulières, mais autorisent toutefois des discontinuités.

B.1 Définition

Dans ce qui suit, (M, d) sera un espace métrique et m une mesure borélienne, finie sur les bornés.

Définition B.1. *Soit $f \in L^\infty(M, m)$. Pour tout sous-ensemble mesurable $B \subset M$, on définit l'oscillation de f sur B par*

$$\operatorname{osc}\big(f, B\big) = \operatorname*{Esup}_B f - \operatorname*{Einf}_B f.$$

Proposition B.1. *Pour $f \in L^1(M, m)$, la fonction $x \mapsto \operatorname{osc}\big(f, B_\varepsilon(x)\big)$ est inférieurement semi-continue, donc mesurable.*

Preuve. *Soit $f \in L^1_m$ et $x_n \to x_\infty$. Posons $c = \liminf_{n\to\infty} \operatorname{Esup}_{B_\varepsilon(x_n)} f$ et $E_n(d) = \{y \in B_\varepsilon(x_n) | \, f(y) > d\}$. Pour tout $d > c$ il existe une sous-suite n_k telle que $m(E_{n_k}(d)) = 0$. Or $E_\infty(d) \subset \cup_k E_{n_k}(d)$ donc $m(E_\infty(d)) = 0$. En remplaçant f par $-f$ on montre que*

$$\operatorname{osc}\big(f, B_\varepsilon(x)\big) \le \liminf_{n\to\infty} \operatorname{osc}\big(f, B_\varepsilon(x_n)\big),$$

ce qui conclut la proposition. □

Remarque B.1.1. *Bien que les fonctions de L^1_m soient définies seulement presque partout, l'oscillation sur une boule $B(x)$ est une fonction réelle, positive définie pour tout $x \in M$. De plus,* $\operatorname{supp} \operatorname{osc}\big(f, B_\varepsilon(\cdot)\big) \subset B_\varepsilon(\operatorname{supp} f)$.

La proposition nous permet de définir, pour $0 < \alpha < 1$ et $\varepsilon_0 > 0$

$$|f|_\alpha = \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \varepsilon^{-\alpha} \int_M \operatorname{osc}\big(f, B_\varepsilon(x)\big) dm(x).$$

Remarque B.1.2. *Il est important de remarquer que $|f|_\alpha$ peut dépendre de ε_0. Toutefois, l'appartenance de f à V_α ne dépend pas de ε_0.*

Définition B.2. *On définit l'espace fonctionnel suivant*

$$V_\alpha = \left\{ f \in L^1_m(M, \mathbb{R}) \;\middle|\; |f|_\alpha < \infty \right\}.$$

Exemple B.1.1. *Voyons quelques exemples de fonctions de V_α :*

(i) Toute fonction α-Hölder continue à support borné appartient à V_α.

(ii) Les fonctions locales (Lipschitziennes), définies pour $A \subset M$ borné et $\delta > 0$ par

$$\varphi_{A,\delta}(x) = \Phi(\delta d(x, A)).$$

où $\Phi(r) = 1 - r$ pour $r \in [0, 1]$ et nulle ailleurs.

(ii) Pour tout borélien $A \subset M$, on a

$$|\mathbb{1}_A|_\alpha = \sup_{\varepsilon\leq\varepsilon_0} \frac{m(B_\varepsilon(A) \cap B_\varepsilon(A^c))}{\varepsilon^\alpha}.$$

Par conséquent, $\mathbb{1}_A$ appartient à V_α si et seulement si la dimension de boîte du bord de A est inférieure à α, et l' α-capacité supérieure est finie.

B.2 Propriétés

Lemme B.2. *Pour toute fonction $h \in V_\alpha$, positive, il existe une boule sur laquelle l'infimum de h est strictement positif. Son rayon est minoré par*

$$\varepsilon = \min\left(\varepsilon_0, \left(\frac{\int h dm}{|h|_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Preuve. Soient $h \in V_\alpha$ positive et ε donné par le lemme. On peut supposer que h n'est pas constante (sinon, c'est trivial), et donc $\displaystyle\int h\ dm < \int \sup_{B_\varepsilon(x)} h\ dm(x)$. Mais par définition de l'oscillation,

$$\int \sup_{B_\varepsilon(x)} h\ dm(x) \leq \int \inf_{B_\varepsilon(x)} h\ dm(x) + |h|_\alpha \varepsilon^a.$$

Ceci implique, en tenant compte du choix d'ε que $\displaystyle\int \inf_{B_\varepsilon(x)} h\ dm(x) > 0.$ $\square$

Proposition B.3. *Soient $f, g \in L^\infty_m$, g positive, $0 < a, b, c$ et S un borélien de M. Soit $f_i \in L^\infty_m$ pour $i = 1, 2, \ldots$. L'oscillation possède les propriétés suivantes*

(i) $\operatorname{osc}\big(\sum_i f_i, B_a(\cdot)\big) \leq \sum_i \operatorname{osc}\big(f_i, B_a(\cdot)\big)$,

(ii) $\operatorname{osc}\big(f 1\!\!I_S, B_a(\cdot)\big) \leq \operatorname{osc}\big(f, S \cap B_a(\cdot)\big) 1\!\!I_S(\cdot) + 2\left[\operatorname*{Esup}_{B_a(\cdot)\cap S} |f|\right] 1\!\!I_{B_a(S)\cap B_a(S^c)}(\cdot)$,

(iii) l'oscillation d'un produit est contrôlée par

$$\operatorname{osc}\big(fg, S\big) \leq \operatorname{osc}\big(f, S\big) \operatorname*{Esup}_S g + \operatorname{osc}\big(g, S\big) \operatorname*{Einf}_S |f|,$$

(iv) si $a + b \leq c$, alors pour tout $x \in M$ on a

$$\operatorname*{Esup}_{B_a(x)} f \leq \frac{1}{m(B_b(x))} \int_{B_b(x)} \big[f(y) + \operatorname{osc}\big(f, B_c(y)\big)\big]\, dy.$$

Preuve. (i) est trivial.

(ii) Soit $x \in M$. Si x est tel que $d(x, S) < a$ et $d(x, S^c) < a$, alors

$$\operatorname{osc}\big(f 1\!\!I_S, B_a(x)\big) \leq 2 \sup_{B_a(x)\cap S} |f|.$$

Sinon, soit la boule $B_a(x)$ est disjointe de S, auquel cas l'oscillation de $f 1\!\!I_S$ est nulle, ou bien elle est complètement incluse dans S, et donc $f 1\!\!I_S = f$ sur la boule. D'où le résultat.

(iii) Si f ne change pas de signe sur S, alors on peut supposer $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}\big(fg, S\big) &\leq \operatorname*{Esup}_S f \operatorname*{Esup}_S g - \operatorname*{Einf}_S f \operatorname*{Einf}_S g \\ &\leq \operatorname*{Esup}_S g (e\sup_S f - \operatorname*{Einf}_S f) + \operatorname*{Einf}_S f (\operatorname*{Esup}_S g - \operatorname*{Einf}_S g). \end{aligned}$$

Si f change de signe, alors

$$\operatorname*{Esup}_S fg - \operatorname*{Einf}_S fg = \operatorname*{Esup}_S fg + \operatorname*{Esup}_S -fg \leq \operatorname*{Esup}_S g (\operatorname*{Esup}_S f + \operatorname*{Esup}_S -f).$$

(iv) Soit $x \in M$ fixé. Pour tout $y \in B_b(x)$ on a $B_a(x) \subset B_c(y)$, donc presque partout,

$$\operatorname*{Esup}_{B_a(x)} f \leq \operatorname*{Esup}_{B_c(y)} f \leq f(y) + \operatorname{osc}\big(f, B_c(y)\big).$$

Le résultat vient alors en intégrant sur $y \in B_b(x)$. □

Voyons maintenant quelques propriétés d'analyse fonctionnelle de cet espace

Lemme B.4. *Si $f_n \in L^1_m$ converge dans L^1_m vers f, alors*

$$|f|_\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|_\alpha.$$

Preuve. Soit f_n une suite de fonctions de L^1_m qui converge vers f. Soit B un borélien de mesure positive. Posons $c = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Esup}_B f_n$. On a $\mathrm{Esup}_B f \leq c$. En effet, si $\mathrm{Esup}_B f > a$ avec $a > c$, alors il existe un ensemble $A \subset B$ de mesure positive tel que $f > a$ sur A. Donc $am(A) \leq \int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \leq cm(A)$, ce qui est impossible.

Un même raisonnement pour l'infimum nous donne

$$\operatorname{osc}\big(f, B\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \operatorname{osc}\big(f_n, B\big).$$

Le lemme de Fatou permet alors de conclure, pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\int \operatorname{osc}\big(f, B_\varepsilon(x)\big) dm(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int \operatorname{osc}\big(f_n, B_\varepsilon(x)\big) dm(x) \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|_\alpha \varepsilon^\alpha.$$

□

Proposition B.5. *V_α est un espace vectoriel, et muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_{L^1_m} + |\cdot|_\alpha$ c'est un espace de Banach.*

Preuve. Il est clair que V_α est un espace linéaire, et que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur V_α. Montrons qu'elle rend cet espace complet. Soit $f_n \in V_\alpha$ une suite de Cauchy. f_n est aussi de Cauchy dans L^1_m, donc la suite possède une limite $f \in L^1_m$. Par le lemme précédent, cette limite est aussi dans V_α, puisque $\|f_n\|_\alpha$ est bornée.

Pour tout n on a

$$|f - f_n|_\alpha \leq \liminf_{p\to\infty} |f_p - f_n|_\alpha.$$

Ce qui implique que $f_n \to f$ dans V_α. □

Proposition B.6. *Si $d := \mathrm{Einf}_x\, m(B_{\varepsilon_0}(x)) > 0$ alors V_α s'injecte continûment dans L^∞_m. Dans ce cas, c'est une algèbre avec la somme et le produit usuel des fonctions essentiellement bornées.*

Preuve. Soit $f \in V_\alpha$. Presque partout $x \in M$, on a pour $y \in B_{\varepsilon_0}(x)$

$$|f(x)| \leq |f(y)| + \operatorname{osc}\big(f, B_{\varepsilon_0}(x)\big).$$

Une intégration par rapport à y sur $B_{\varepsilon_0}(x)$ donne alors

$$\||f|(\cdot) m(B_{\varepsilon_0}(\cdot))\|_\infty \leq \|f\|_{L^1_m} + |f|_\alpha \varepsilon_0^\alpha.$$

Donc si d est différent de zéro, $\|f\|_\infty \leq \frac{\max(1,\varepsilon_0^\alpha)}{d} \|f\|_\alpha$. □

Proposition B.7. *V_α est dense dans L^1_m.*

Preuve. Soit $A \in M$ un fermé borné et $\delta > 0$. On considère la suite de fonctions $\varphi_{A,\delta}$ définie dans l'exemple B.1.1.ii. Il est facile de voir que la suite décroissante $\varphi_{A,\delta}$ converge vers $\mathbb{1}_A$ dans L^1_m lorsque $\delta \to 0$. Comme tout borélien de mesure finie est une limite croissante de compacts (qui sont bien sûr fermés et bornés) on conclut que $\overline{V_\alpha}$ contient les fonctions caractéristiques des boréliens. Finalement, en passant par les fonctions simples on obtient la densité dans L^1_m. $\square$

Proposition B.8. *Si Ω est un compact de M, l'intersection de la boule unité de V_α avec l'ensemble des fonctions à support dans Ω est compacte dans L^1_m.*

Preuve. Tout d'abord on considère une suite de partitions mesurables finies $\mathcal{A}_k$ telles que $\operatorname{diam}(\mathcal{A}_k) \to 0$ quand $k \to \infty$. Pour une suite f_n dans la boule unité de V_α, on va montrer qu'il existe une sous-suite qui converge dans L^1_m (c'est suffisant car L^1_m est un espace métrique).

Pour tout $f \in V_\alpha$, $\|E_m(f|\mathcal{A}_k) - f\|_{L^1_m} \leq \operatorname{diam}(A_k)^\alpha$. De plus, comme $\|f_n\|_{L^1_m} \leq 1$, $E_m(f_n|\mathcal{A}_k)$ est bornée pour tout k. Donc on peut choisir une sous-suite (par un procédé diagonal) telle que pour tout k, la limite g de $g_k = E_m(f_{n_k}|\mathcal{A}_k)$ existe. Comme par ailleurs, $\|f_{n_k} - g_k\|_{L^1_m} \leq \operatorname{diam}(\mathcal{A}_k)$, f_{n_k} converge dans L^1_m vers g. La limite vérifie $\|g\|_\alpha \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_\alpha \leq 1$. $\square$

Bibliographie

[AZ96] K. Adl-Zarabi, *Absolutely continuous invariant measures for piecewise expanding C^2 transformations in $\mathbb{R}^n$ on domains with cusps on the boundaries*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), 1–18.

[Bal89] V. Baladi, *Fonctions zêta, fonctions de corrélations et mesures d'équilibre pour quelques systèmes dynamiques non axiome A*, Thèse de Doctorat, Université de Genève, 1989.

[BK90] V. Baladi et G. Keller, *Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), no. 3, 459–477.

[BY] M. Benedicks et L.-S. Young, *Decay of correlations for certain Henon maps*, Prétirage.

[Bir79] G. Birkhoff, *Lattice theory*, third ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979.

[Bla87] M. Blank, *Stochastic properties of deterministic dynamical systems*, Sov. Sci. Rev. C Maths/Phys. **6** (1987), 243–271.

[Bow75] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470.

[Bre96] X. Bressaud, *Opérateurs de transfert sur le décalage à alphabet infini et applications*, Thèse de Doctorat, Université de Paris VI, 1996.

[Bro94] A. Broise, *Aspects stochastiques de certains systèmes dynamiques*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes, 1994.

[Buz97] J. Buzzi, *Intrinsic ergodicity of affine maps in* $[0,1]^d$, Mh. Math. **124** (1997), 97–118.

[CI94] M. Campanino et S. Isola, *On the invariance principle for non-uniformly expanding transformations of* $[0,1]$, Forum Mathematicum (1994), A paraître.

[CI95] M. Campanino et S. Isola, *Statistical properties of long return times in type I intermittency*, Forum Mathematicum **7** (1995), 331–348.

[CI96] M. Campanino et S. Isola, *Infinite invariant measures for non-uniformly expanding transformations of* $[0,1]$*: Weak law of large numbers with anomalous scaling*, Forum Mathematicum **8** (1996), no. 1.

[Col84] P. Collet, *An estimate of the decay of correlations for mixing non Markov expanding maps*, Prétirage, 1984.

[CF90] P. Collet et P. Ferrero, *Some limit ratio theorem related to a real endomorphism in case of a neutral fixed point*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **52** (1990), no. 3, 283–301.

[CG93] P. Collet et A. Galves, *Statistics of close visits to the indifferent fixed point of an interval map*, J. Statist. Phys. **72** (1993), no. 3-4, 459–478.

[CGS92] P. Collet, A. Galves, et B. Schmitt, *Unpredictability of the occurrence time of a long laminar period in a model of temporal intermittency*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **57** (1992), no. 3, 319–331.

[Che95] N. Chernov, *Limit theorem and Markov approximations for chaotic dynamical systems*, Prob. Th. and Rel. fields **101** (1995), 321–362.

[Che] N. Chernov, *Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows*, Prétirage.

[DKU90] M. Denker, G. Keller, et M. Urbański, *On the uniqueness of equilibrium states for piecewise monotone mappings*, Studia Math. **97** (1990), no. 1, 27–36.

[DU91] M. Denker et M. Urbański, *On the existence of conformal measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), no. 2, 563–587.

[Dol] D. Dolgopiat, *Decay of correlations for Anosov flows*, Prétirage.

[DS88] N. Dunford et J.T. Schwartz, *Linear operators. Part III*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, Spectral operators, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1971 original, A Wiley-Interscience Publication.

[FF70] B.U. Felderhof et M.E. Fisher, Ann. Phys. (N.Y.) **58** (1970).

[FS] P. Ferrero et B. Schmitt, *On the rate of convergence for some limit ratio theorem related to endomorphisms with a non regular invariant density*, Prétirage.

[FO70] N. A. Friedman et D. S. Ornstein, *On isomorphism of weak Bernoulli transformations*, Advances in Math. **5** (1970), 365–394 (1970).

[Gal76] G. Gallavotti, *Funzioni zeta e insiemi basilari*, Accad. Lincei Rend. Sc. fis. mat. e nat. **61** (1976), 309–317.

[GS97] A. Galves et B. Schmitt, *Inequalities for hitting time in mixing dynamical systems*, Random Comput. Dynam. (1997), A paraître.

[GW88] P. Gaspard et X.J. Wang, Proc. Math. Acad. Sci. USA **85** (1988), 4591.

[GBP91] P. Góra, A. Boyarsky, et H. Proppe, *On the number of invariant measures for higher-dimensional chaotic transformations*, J. Statist. Phys. **62** (1991), no. 3-4, 709–728.

[Hir93] M. Hirata, *Poisson law for Axiom A diffeomorphisms*, Ergodic Theory Dynamical Systems **13** (1993), no. 3, 533–556.

[Hir95] M. Hirata, *Poisson law for the dynamical systems with the "self-mixing" conditions*, Dynamical systems and chaos, Vol. 1 (Hachioji, 1994) (River Edge, NJ), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995, pp. 87–96.

[Hof86] F. Hofbauer, *Piecewise invertible dynamical systems*, Probab. Theory Relat. Fields **72** (1986), no. 3, 359–386.

[HK82a] F. Hofbauer et G. Keller, *Equilibrium states for piecewise monotonic transformations*, Ergodic Theory Dynamical Systems **2** (1982), no. 1, 23–43.

[HK82b] F. Hofbauer et G. Keller, *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Math. Z. **180** (1982), no. 1, 119–140.

[ITM50] C.T. Ionescu Tulcea et G. Marinescu, *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*, Annals of Math. (1950), no. 52, 140–147.

[Iso] S. Isola, *Dynamical zeta functions and correlation functions for intermittent interval map*, Prétirage.

[KH95] A. Katok et B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[Kel85] G. Keller, *Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **69** (1985), no. 3, 461–478.

[Kel89] G. Keller, *Markov extensions, zeta functions, and Fredholm theory for piecewise invertible dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), no. 2, 433–497.

[LSV93] A. Lambert, S. Siboni, et S. Vaienti, *Statistical properties of a nonuniformly hyperbolic map of the interval*, J. Statist. Phys. **72** (1993), no. 5-6, 1305–1330.

[LY73] A. Lasota et J.A. Yorke, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **186** (1973), 481–488 (1974).

[Led74] F. Ledrappier, *Principe variationnel et systèmes dynamiques symboliques*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **30** (1974), 185–202.

[Liv95a] C. Liverani, *Decay of correlations*, Ann. of Math. **142** (1995), no. 2, 239–301.

[Liv95b] C. Liverani, *Decay of correlations for piecewise expanding maps*, J. Statist. Phys. **78** (1995), no. 3-4, 1111–1129.

[Liv96] C. Liverani, *Central limit theorem for deterministic systems*, International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995) (Harlow), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 362, Longman, Harlow, 1996, pp. 56–75.

[Liv97] C. Liverani, *Flows, random perturbations and rate of mixing*, Ergodic Theory Dynam. Systems (1997), A paraître.

[LSV96] C. Liverani, B. Saussol, et S. Vaienti, *Conformal measure and decay of correlations for covering weighted systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems (1996), A paraître.

[LSV97] C. Liverani, B. Saussol, et S. Vaienti, *A probabilistic approach to intermittency*, Ergodic Theory Dynam. Systems (1997), A paraître.

[Lop93] A.O. Lopez, *The zeta function, non-differentiability of the pressure and the critical exponent of transition*, Adv. in Math. **101** (1993), 133–165.

[Mor93] M. Mori, *On the intermittency of a piecewise linear map (Takahashi model)*, Tokyo Jour. of Math. **16** (1993), no. 2, 411–428.

[Orn70] D. Ornstein, *Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic*, Advances in Math. **4** (1970), 337–352 (1970).

[Par81] W. Parry, *Topics in ergodic theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 75, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[PP90] W. Parry et M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque (1990), no. 187-188, 268.

[Pat76] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), no. 3-4, 241–273.

[PSV98] V. Penné, B. Saussol, et S. Vaienti, *Fractal and statistical characteristics of recurrence times*, 1998, talk given by Sandro Vaienti at the conference “Disorder and Chaos” (Rome 22-24th sept. 1997), in honour of Giovanni Paladin.

[PM80] Y. Pomeau et P. Manneville, Comm. Math. Phys. **74** (1980), 189–197.

[PS92] T. Prellberg et J. Slawny, *Maps of intervals with indifferent fixed points: thermodynamic formalism and phase transitions*, J. Statist. Phys. **66** (1992), no. 1-2, 503–514.

[PGB90] H. Proppe, P. Góra, et A. Boyarsky, *Inadequacy of the bounded variation technique in the ergodic theory of higher-dimensional transformations*, Nonlinearity **3** (1990), no. 4, 1081–1087.

[Rue78] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 5, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978, The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics, With a foreword by Giovanni Gallavotti and Gian-Carlo Rota.

[Ryc83] M. Rychlik, *Bounded variation and invariant measures*, Studia Math. **76** (1983), no. 1, 69–80.

[Sau95] B. Saussol, *Vitesse de convergence des mesures de Gibbs pour des applications expansives de l'intervalle*, Mémoire de DEA, Université de Toulon et du Var, 1995.

[Sau98] B. Saussol, *Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps*, Prétirage, En cours de soumission, 1998.

[Sch74] H.H. Schaefer, *Banach lattices ad positive operators*, Springer-Verlag, New York, 1974, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 215.

[Str81] E. Straube, *On the existence of invariant, absolutely continuous measures*, Comm. Math. Phys. **81** (1981), no. 1, 27–30.

[Tak81] V. Takahashi, *Fredholm determinant of unimodal linear maps*, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo **31** (1981), no. 2, 61–87.

[Tak85] V. Takahashi, *One dimensional maps and power spectrum*, Recent studies on turbulent phenomena (1985), 61–87.

[Tha80] M. Thaler, *Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points*, Israel J. Math. **37** (1980), no. 4, 303–314.

[Wal78a] P. Walters, *Equilibrium states for β-transformations and related transformations*, Math. Z. **159** (1978), no. 1, 65–88.

[Wal78b] P. Walters, *Invariant measures and equilibrium states for some mappings which expand distances*, Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978), 121–153.

[Wan89] X.-J. Wang, *Statistical physics of temporal intermittency*, Phys. Rev. **A40** (1989), 6647.

[You] L.-S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Prétirage.

[You97] L.-S. Young, *Recurrence times and rates of mixing*, Prétirage, 1997.

[Yur96] M. Yuri, *Decay of correlations for certain multi-dimensional maps*, Nonlinearity **9** (1996), no. 6, 1439–1461.

Index