Examen

Dans toute la suite, on note $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, et on note $\mathbb{P}_x$ sa loi lorsqu'elle part de x. On suppose par ailleurs que $d \geq 3$. On rappelle les notation pour $A \subset \mathbb{Z}^d$,

$$H_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\},$$

pour le temps d'atteinte de A, et

$$H_A^+ = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\},$$

pour le temps de retour en A.

Exercice 1 : On rappelle que si K est un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, alors pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{P}_x[H_K < \infty] = \sum_{y\in K} g(x,y)\mathbb{P}_y[H_K^+ = \infty], \tag{1}$$

où g est la fonction de Green :

$$g(x,y) = g(y-x) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{X_n = y\}\right].$$

Déduire de la formule (1) que pour tous $x \neq y$,

$$\text{cap}(\{x,y\}) = \frac{2}{g(0)+g(y-x)}.$$

Exercice 2 : On rappelle qu'il existe des constantes $0 < c < C < \infty$, telles que

$$\frac{c}{\|x-y\|^{d-2}} \leq g(x,y) \leq \frac{C}{\|x-y\|^{d-2}},$$

pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$. On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{Z}^d$ est récurrent si pour tout x, il est visité p.s. une infinité de fois par la marche simple partant de x, autrement dit si

$$\mathbb{P}_x\left(\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}(X_n \in A) = \infty\right) = 1, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Z}^d. \tag{2}$$

On dit qu'il est transient si

$$\mathbb{P}_x\left(\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}(X_n \in A) = \infty\right) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Z}^d. \tag{3}$$

On admettra dans la suite que tout ensemble A est ou bien récurrent, ou bien transient. On se fixe maintenant $A \subset \mathbb{Z}^d$, et on note pour tout $n \geq 1$,

$$A_n = \{x \in A \,:\, 2^{n-1} < \|x\| \leq 2^n\}.$$

1) En utilisant la formule (1), montrer que

$$c2^{-n(d-2)}\text{cap}(A_n) \;\leq\; \mathbb{P}_0(H_{A_n} < \infty) \;\leq\; C2^{-(n-1)(d-2)}\text{cap}(A_n).$$

En déduire que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{cap}(A_n)}{2^{n(d-2)}} < \infty \implies \mathbb{P}_0\left(\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}\{H_{A_n} < \infty\} < \infty\right) = 1 \implies A \text{ est transient.}$$

2) On souhaite maintenant montrer la réciproque. Montrer, en utilisant la propriété de Markov forte pour la marche simple, qu'il existe une constante $C' > 0$, telle que pour tous entiers n et m tels que $|n-m| > 1$,

$$\mathbb{P}_0(H_{A_n} < H_{A_m} < \infty) \leq C'\, \mathbb{P}_0(H_{A_n} < \infty)\mathbb{P}_0(H_{A_m} < \infty).$$

3) On note

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}\{H_{A_{2k}} < \infty\}, \quad \text{et} \quad J_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}\{H_{A_{2k+1}} < \infty\}.$$

Montrer en utilisant la question précédente qu'il existe une constante C_0 telle que

$$\mathbb{E}[I_n^2] \leq C_0\, \mathbb{E}[I_n]^2, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[J_n^2] \leq C_0\, \mathbb{E}[J_n]^2,$$

pour tout $n \geq 1$, puis que

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}[I_n]^2 \leq \mathbb{E}\left[I_n \mathbf{1}\{I_n \geq \frac{\mathbb{E}[I_n]}{2}\}\right]^2 \leq C_0\, \mathbb{P}(I_n \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[I_n])\, \mathbb{E}[I_n]^2.$$

(et similairement pour J_n.)
4) Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{cap}(A_n)}{2^{n(d-2)}} = \infty \implies \mathbb{E}[I_\infty] = \infty, \quad \text{ou} \quad \mathbb{E}[J_\infty] = \infty,$$

puis déduire de la question précédente que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{cap}(A_n)}{2^{n(d-2)}} = \infty \implies \mathbb{P}_0(I_\infty = \infty) \geq \frac{1}{4C_0}, \text{ ou } \mathbb{P}_0(J_\infty = \infty) \geq \frac{1}{4C_0} \implies A \text{ est récurrent.}$$

Exercice 3 : On note I^u le processus des entrelacs aléatoires de niveau u, vu comme sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$.
Calculer, pour tous x, y, $\mathbb{P}[\{x,y\} \in I^u]$ (on commencera par considérer le cas $x = y$).

Exercice 4 : On note N le nombre de composantes connexes infinies d'une configuration $\xi = (\xi_x)_{x\in\mathbb{Z}^d} \in \Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, et $\mathcal{P}^u$ la loi du modèle des entrelacs aléatoire de niveau u.
1) Montrer que pour tout $k \geq 1$, et $u > 0$, $\mathcal{P}^u[N = k] \in \{0,1\}$. Expliquer également pourquoi on a $\mathcal{P}^u[N \geq 1] = 1$.
On suppose maintenant que pour un certain $k \geq 2$, et un certain $u > 0$, $\mathcal{P}^u[N = k] = 1$.
2) On note $B_n = \{x \in \mathbb{Z}^d \ : \ \|x\|_\infty \leq n\}$, et A_n l'évènement :

$$A_n = \{\text{il existe exactement } k \text{ composantes connexes infinies qui intersectent } B_n\}.$$

Montrer que lorsque $n \to \infty$, $\mathcal{P}^u[A_n] \to 1$.
3) On note maintenant N_n le nombre de trajectoires dans le processus de poisson des entrelacs de niveau u qui intersectent B_n.
a) Quelle est la loi de N_n ?
b) On note $(S^i)_{i\geq 1}$ une suite de marches aléatoires indépendantes, de loi $\mathbb{P}_{\tilde{e}_{B_n}}$, et indépendantes de N_n. Calculer la probabilité qu'une de ces marches touche 0. En déduire la probabilité pour que les N_n premières d'entre elles passent toutes par l'origine.