Université de Provence. Licence 2ème année.
Probabilités-Statistiques.

Feuille de TD 1

Exercice 1 :

1. Quel est le nombre de tiercés dans l'ordre que l'on peut jouer avec 10 chevaux ?
2. Combien peut-on former de comités composés de 3 hommes et 2 femmes choisis parmi 22 hommes et 17 femmes ?

Exercice 2 : On lance 5 pièces de monnaie. Donner un espace de probabilité permettant de considérer les événements suivants et calculer leurs probabilités :
– La première pièce donne face ;
– Face sort exactement deux fois ;
– Face sort au plus trois fois.

Exercice 3 : A et B sont des évènements tels que

$$P(A) = 0,6 \quad P(B) = 0,3 \quad \text{et } P(A \cap B) = 0,1.$$

1. Quelle est la probabilité que A ou B arrive ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement un des deux évènements arrive ?
3. Quelle est la probabilité qu'au plus un des deux évènements arrive ?
4. Quelle est la probabilité que ni A ni B n'arrivent ?

Exercice 4 : *Un problème du Chevalier de Méré (1607-1684)*[1]
A-t-on plus de chances d'obtenir au moins une fois un 6 en lançant 4 fois un dé que d'obtenir au moins une fois un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 5 : Sur $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$, déterminer la loi de probabilité P telle que $P(i)$ soit proportionnel à i pour tout élément i de Ω.
Calculer la probabilité pour qu'un élément de Ω soit pair puis la probabilité pour qu'il soit impair.

Exercice 6 :
Calculer l'espérance et la variance de X lorsque cette variable suit :

1. une loi de Bernoulli de paramètre p,
2. une loi binomiale de paramètres n et p,
3. une loi géométrique de paramètre p.

Indication : Soit $(a_k)_k$ une suite numérique. S'il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| R^k < \infty$ alors la fonction définie par $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ est de classe C^1 sur $[-R, R]$. De plus, pour tout $x \in [-R, R]$, on a $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$.

Exercice 7 : Loi de Poisson.

1. Ce joueur qui était aussi un mathématicien amateur, est entré dans l'histoire des probabilités grâce à ses problèmes de jeux et aux solutions qu'en a données Blaise Pascal (1623-1662).

La distribution de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{c\lambda^i}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Trouver

1. la valeur de c,
2. $\mathbb{P}(X = 0)$,
3. $\mathbb{P}(X > 2)$,
4. l'espérance de X,
5. la variance de X.

Exercice 8 :
Soit X une variable aléatoire positive à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que son espérance peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k)\,.$$

Exercice 9 : Loi Binomiale négative.
Donnons-nous un nombre n. On répète la même expérience à deux issues (e.g. jeu de pile ou face) jusqu'à obtenir n succès. Les expériences sont supposées identiques et indépendantes et on note p la probabilité d'obtenir un succès lors d'une expérience. Notons alors N le nombre d'expériences effectuées jusqu'au n-ième succès. On dira que N suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.

1. Explicitez la loi de N.
2. Calculez l'espérance de N.
   Indication : cf. exercice 1

Exercice 10 : Loi hypergéométrique.
On dispose d'une urne contenant N boules : K boules blanches et $N - K$ boules noires. On tire sans remise n boules dans l'urne où $n \leqslant \min(K, N - K)$, et on note X le nombre de boules blanches dans le tirage. On dira que X suit une loi hypergéométrique de paramètres n, $\frac{K}{N}$, $\frac{N-K}{N}$.

1. Explicitez la loi de X.
2. Démontrez la relation : $\sum_{k=0}^{n} kC_K^k C_{N-K}^{n-k} = KC_{N-1}^{n-1}$.
3. Calculez l'espérance de X.

Exercice 11 : Soit X une variable géométrique de paramètre p.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$.
2. Montrer que X est sans mémoire i.e.

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k + l | X > l) = \mathbb{P}(X > k)\,.$$

Exercice 12 : Trois chasseurs tirent simultanément sur 3 canards : chaque chasseur, indépendamment des autres, choisit un canard au hasard et tire dessus. Soit N le nombre de canards tués.

1. Donner la loi de N et son espérance.
2. Quelle est la probabilité que le canard 1 soit tué sachant que deux canards sont morts ?

Exercice 13 :
Pendant un concours à la télévision, le présentateur cache un prix (une voiture) derrière une porte (il y a 3 portes : A, B et C). Il invite un concurrent à se présenter et à choisir l'une des trois portes, sans l'ouvrir. Il ouvre ensuite l'une des deux portes qui n'ont pas été choisies par le concurrent, en sachant que la voiture ne se trouve pas derrière ; il offre alors au concurrent la possibilité de choisir de nouveau parmi les deux portes qui restent. Quelle est le meilleur choix pour le concurrent, c'est-à-dire, est-ce que la probabilité de gagner en changeant de porte est plus grande que la probabilité de gagner sans changer de porte ?

Exercice 14 : Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune initialement 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire au hasard une boule dans U_1 et sans la regarder on la place dans U_2, puis on tire au hasard une boule dans U_2. Quelle est la probabilité d'obtenir alors une boule blanche ? (suggestion : on calculera la probabilité d'obtenir alors une boule blanche sachant que la première boule est blanche, puis sachant que la première boule est noire).

Exercice 15 : Un test permet de détecter la grippe aviaire sur les poulets. Cependant, ce test n'est pas parfait car si un poulet n'est pas infecté, le test est positif avec probabilité $0,02$ et lorsque le poulet est infecté, le test est négatif avec probabilité $0,01$. On sait également que 10% des poulets sont infectés.

1. Sachant que le test est positif sur un poulet, quelle est la probabilité que ce poulet soit infecté ?
2. On considère des poulets **non infectés** par le virus.
   (a) Pour chaque poulet fixé, quelle est la probabilité p qu'il soit testé positif ?
   (b) On prélève un échantillon de 10 poulets non infectés. Chaque poulet subit un test qui peut s'avérer être positif ou négatif. Quelle est la probabilité d'obtenir dans notre échantillon 2 poulets testés positifs et 8 poulets testés négatifs ? D'une façon plus générale, donner la loi du nombre de tests positifs.

Exercice 16 : On s'intéresse aux effets du mildiou de la pomme de terre sur une parcelle. On notera N le nombre de pommes de terre produites sur la parcelle. On veut étudier le nombre X de pommes de terre touchées par la maladie. Pour simplifier le modèle on considèrera que :

1. le fait qu'une pomme de terre soit malade est indépendant des autres ;
2. chaque pomme de terre a une probabilité p d'être contaminée ;
3. N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Déterminer la loi de X.

Exercice 17 : On lance deux dés, un rouge et un bleu, et on note les numéros obtenus. Soit les évènements A : "le dé rouge amène un numéro pair", B : "le dé bleu amène un numéro pair", C : "la somme des numéros est paire".
Calculer les probabilités de A, B, C.
Vérifier que A, B, C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 18 : On dispose de deux urnes. L'urne U contient une boule blanche et quatre boules noires ; l'urne V contient trois boules blanches et deux boules noires. Dans l'une des urnes choisie au hasard, on effectue une série de tirages d'une boule avec remise (tous les tirages ont lieu dans la même urne). Soit A_i l'évènement "la i-ème boule tirée est blanche".

1. Calculer $P(A_1)$, $P(A_2)$. A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
2. Calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Sachant que les $(n-1)$ premiers tirages donnent chacun une boule blanche, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage ?
4. Sachant que les n premières boules tirées sont blanches, quelle est la probabilité d'avoir tiré dans U ?

Exercice 19 : Soit X_1, X_2 les variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit $\{Y_i; i = 1, 2\}$ les variables définies par $Y_i = 2X_i - 1$.

1. Est-ce que X_1 et X_1X_2 sont indépendantes ?
2. Est-ce que Y_1 et Y_1Y_2 sont indépendantes ? Le même résultat serait-il vrai si X_1 et X_2 étaient des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \neq \frac{1}{2}$?

Exercice 20 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, Y de loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable $X + Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 21 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 22 : Soient X et Y deux v. a. indépendantes, X de loi géométrique de paramètre p, Y de loi géométrique de paramètre q, avec $0 < p, q < 1$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k, k \in \mathbb{N}$.
2. On pose $U = \min(X, Y)$. Calculer $\mathbb{P}(U > k)$. Préciser la loi de la v.a. U.
3. On considère maintenant le couple $U = \min(X, Y)$, $V = X - Y$. Calculer, pour $k \geqslant 1$ et tout $l \in \mathbb{Z}$ (on distinguera les cas $l \geqslant 0$ et $l < 0$)
$$\mathbb{P}(U = k, V = l).$$
En déduire les lois des v.a. U et V (sans utiliser la question précédente), et que U et V sont indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(V \geqslant 0)$.

Exercice 23 :

1. On dispose de n boules. On met chacune d'elles, indépendamment des autres, dans la boîte A avec probabilité p, et dans la boîte B avec probabilité $1-p$. On désigne par X (resp. Y) le nombre de boules que l'on a ainsi placées dans A (resp. dans B). Préciser les lois des v. a. X et Y . Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
2. On dispose d'un nombre aléatoire Z de boules, où Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On refait les mêmes opérations que ci-dessus avec les Z boules, les tirages étant bien sûr indépendants de la valeur de Z. Montrer que cette fois X et Y sont indépendantes, X de loi de Poisson de paramètre λp, Y de loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - p)$. Sachant que $Z = n$, montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.