Feuille de TD n° 4 : Variables aléatoires continues (suite), théorèmes limites et approximations de la loi binomiale.

Exercice 1 : 1) Soit X une variable aléatoire qui possède une densité f. Montrer que si $\sigma \neq 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ alors la variable $Y = \sigma X + \mu$ admet une densité que vous calculerez. Que se passe-t-il si $\sigma = 0$?
2) Dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, montrer que $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et retrouver ainsi simplement l'espérance et la variance de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
3) Dans le cas où $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, quelle est la loi de Y ?
4) Dans le cas où $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, et $\mu = 0$, quelle est la loi de Y ?

Exercice 2 : (Loi de Cauchy)
Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}.$$

a) Trouver c pour que f soit une densité de probabilité.
b) Soit alors X une v.a. de densité f. Montrer que $\mathbb{E}(|X|) = +\infty$, et donc que $E(X)$ n'existe pas.

Exercice 3 : Montrer que si X et Y sont deux v.a. et $\epsilon > 0$ alors

- $\{|X| \leqslant \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{|Y| \leqslant \frac{\epsilon}{2}\} \subset \{|X+Y| \leqslant \epsilon\}$,
- $\{|X+Y| > \epsilon\} \subset \{|X| > \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{|Y| > \frac{\epsilon}{2}\}$,
- $\mathbb{P}(|X+Y| > \epsilon) \leqslant \mathbb{P}(|X| > \frac{\epsilon}{2}) + \mathbb{P}(|Y| > \frac{\epsilon}{2})$.

En déduire que si $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont deux suites de v.a. convergeant en probabilité [1] vers U et V respectivement, alors la suite $(U_n + V_n)_n$ converge en probabilité vers $U + V$.

Exercice 4 : Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.
1) On suppose que la loi commune des X_i est la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $\bar{X}_n$? On suppose maintenant que $\mu = 10$ et $\sigma = 2$. Trouver le plus petit entier n tel que $P(9,9 < \bar{X}_n < 10,1) \geq 0,99$.
2) On suppose que la loi commune des X_i est la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $1/\bar{X}_n$ converge en probabilité vers λ.

Exercice 5 : Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi, avec $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ bien défini. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.
Montrer que

$$Z_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \bar{X}_n^2.$$

En déduire (on pourra utiliser l'exercice 3) que (Z_n) converge en probabilité vers σ^2.

Exercice 6 : Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès qui dessert 5000 abonnés. À un instant t donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20%

1. On dit qu'une suite de v.a. (U_n) converge en probabilité vers une v.a. U, si pour tout $\epsilon > 0$, $P(|U_n - U| > \epsilon) \to 0$, lorsque $n \to \infty$.

d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.
1) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
2) On pose $Y = (X - 1000)/\sqrt{800}$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y ? En déduire une valeur approchée de $P(970 < X < 1030)$.
3) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à $2,5\%$. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

Exercice 7 : Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol. Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent). Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.
1) On considère que chaque passager a indépendamment une probabilité de désistement de 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol. Donner la loi de S_n, $E(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
2) Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que $P(S_n \leqslant 300) \geqslant 0,99$. En utilisant le TCL, proposez une solution approchée de ce problème. On pourra s'aider d'une table de la loi normale.

Exercice 8 : Dans une population de 800 personnes, la probabilité pour un individu d'être atteint d'une maladie rare est $0,005$.
1) Soit Z le nombre de malades. Quelle est la loi de Z ? Par quelle loi peut-on l'approximer ?
2) Calculer la probabilité pour que le nombre de malades soit strictement plus grand que 3.
3) Trouver le plus grand entier K tel que la probabilité que le nombre de malades soit supérieur ou égal à K soit inférieur à 10%.