

METHODES MATHÉMATIQUES  
POUR LE  
TRAITEMENT DU SIGNAL

B. Torrèsani  
Université de Provence

*Master Mathématiques et Applications*  
Première année

*Année Universitaire 2009-10, second semestre*





# Table des matières

<b>0. INTRODUCTION</b>	<b>7</b>
<b>1. Signaux Numériques</b>	<b>11</b>
1.1. Séries de Fourier	11
1.1.1. Rappels sur les espaces $L^p$ et $\ell^p$	11
1.1.2. La théorie $L^2$	12
1.1.3. Problèmes de convergence des séries de Fourier	13
1.1.4. Le problème de l'extension	16
1.1.5. Convolution-Produit	20
1.2. Signaux numériques et TFD	20
1.2.1. Transformation de Fourier discrète	20
1.2.2. Filtrage des signaux numériques	21
1.2.3. La transformation en $z$	24
1.2.4. La transformation de Fourier en pratique : transformation de Fourier finie (TFF)	28
1.3. Filtrage et traitement de signaux numériques : quelques exemples	30
1.3.1. Une application du filtrage numérique : filtrage adapté	30
1.3.2. Un exemple de problème inverse : la déconvolution	31
1.4. Signaux numériques multidimensionnels	33
1.5. Représentation des signaux numériques	36
1.5.1. Bases pour les signaux numériques	36
1.5.2. Exemple : le codeur d'images JPEG (tiré de l'article en ligne de l'encyclopédie Wikipedia)	39
1.5.3. Repères	41
1.6. Problème inverse	43
<b>2. SIGNAUX ALEATOIRES</b>	<b>45</b>
2.1. Définitions, propriétés simples	45
2.1.1. Premières définitions	45
2.1.2. Exemples	46
2.1.3. Signaux aléatoires du second ordre	48
2.2. Signaux aléatoires numériques	49
2.2.1. Filtrage de convolution de signaux stationnaires en m.o.d.	49
2.2.2. Mesure spectrale et densité spectrale pour les processus stationnaires en m.o.d.	50
2.2.3. Quelques exemples	51
2.2.4. Le cas fini ; application à la simulation de processus stationnaires en m.o.d.	52
2.2.5. Représentation spectrale pour les processus stationnaires en moyenne d'ordre deux	55
2.2.6. Filtrage numérique	56
2.2.7. Retour sur les signaux AR	56

2.3. Quelques exemples d'application . . . . .	57
2.3.1. Filtrage optimal et détection . . . . .	57
2.3.2. Débruitage d'un signal aléatoire : filtre de Wiener . . . . .	58
2.3.3. Codage du signal de parole par prédiction linéaire . . . . .	59
2.3.4. Estimation spectrale . . . . .	61
2.4. Représentations Hilbertiennes . . . . .	63
2.4.1. Représentation sur une base pour les signaux aléatoires de longueur finie . . . . .	63
2.4.2. Base de Karhunen-Loève pour les signaux de longueur finie . . . . .	63
2.5. Quantification, PCM et codage . . . . .	64
2.5.1. Quantification scalaire . . . . .	65
2.5.2. Quantification uniforme . . . . .	65
2.5.3. Compensation logarithmique . . . . .	68
2.5.4. Quantification scalaire optimale . . . . .	71
2.5.5. Quantification vectorielle . . . . .	71
<b>3. SIGNAUX ANALOGIQUES ;</b>	
<b>FILTRAGE ET ECHANTILLONNAGE</b>	<b>73</b>
3.1. Préliminaires . . . . .	73
3.2. Signaux d'énergie finie . . . . .	74
3.2.1. Transformation de Fourier et propriétés simples . . . . .	74
3.2.2. Inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	75
3.2.3. Transformation de Fourier et régularité . . . . .	76
3.2.4. La théorie $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	78
3.2.5. Inégalités de Heisenberg . . . . .	80
3.2.6. Produit de convolution et produit simple . . . . .	82
3.2.7. Autocorrélation . . . . .	82
3.3. La théorie spectrale de Wiener . . . . .	83
3.4. Filtrage linéaire (signaux d'énergie finie) . . . . .	85
3.4.1. Terminologie . . . . .	85
3.4.2. Filtres linéaires . . . . .	85
3.4.3. Exemples . . . . .	86
3.5. Filtrage adapté . . . . .	89
3.5.1. Le filtre adapté, version déterministe . . . . .	89
3.5.2. Application à la détection . . . . .	91
3.5.3. Fonction d'ambigüité radar . . . . .	92
3.6. Bancs de filtres, et analyse de Fourier locale . . . . .	93
3.6.1. Bancs de filtres . . . . .	93
3.6.2. Transformation de Fourier à fenêtre . . . . .	94
3.7. Signaux numériques, Echantillonnage . . . . .	95
3.7.1. Position du problème . . . . .	95
3.7.2. Le théorème d'échantillonnage . . . . .	95
3.7.3. Approximation par des séries finies et TFF . . . . .	97
3.7.4. Echantillonnage généralisé . . . . .	98
3.7.5. Multirésolution et bases d'ondelettes . . . . .	98
<b>A. Rappels d'analyse fonctionnelle</b>	<b>A.1</b>
A.1. Préliminaires . . . . .	A.1
A.2. Orthogonalité . . . . .	A.1
A.3. Systèmes orthonormaux, bases Hilbertiennes . . . . .	A.2
A.4. Bases de Riesz . . . . .	A.4
<b>B. Repères dans un espace de Hilbert</b>	<b>B.1</b>
B.1. Définitions . . . . .	B.1
B.2. Inversion . . . . .	B.4
<b>C. Fonctions d'une variable complexe, séries de Laurent</b>	<b>C.1</b>
C.1. Fonctions holomorphes, fonctions analytiques . . . . .	C.1
C.1.1. Fonctions holomorphes . . . . .	C.1
C.1.2. Séries . . . . .	C.2

C.1.3. Fonctions analytiques . . . . .	C.2
C.2. Intégration sur un chemin dans $\mathbb{C}$ . . . . .	C.2



# INTRODUCTION

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification...), d'analyse et d'interprétation des signaux. Elle fait donc largement appel aux résultats de la théorie de l'information, des statistiques ainsi qu'à de nombreux autres domaines des mathématiques appliquées.

## Généralités (extrait de l'encyclopédie libre *Wikipedia*)

Les signaux à traiter peuvent provenir de sources très diverses, mais la plupart sont des signaux électriques ou devenus électriques à l'aide de capteurs et transducteurs (microphones, rétines, senseurs thermiques, optiques, de pression, de position, de vitesse, d'accélération et en général de toutes les grandeurs physiques et chimiques).

On distingue essentiellement les signaux analogiques qui sont produits par divers capteurs, amplificateurs, convertisseurs numérique-analogique ; les signaux numériques issus d'ordinateurs, de terminaux, de la lecture d'un support numérique ou d'une numérisation par un convertisseur analogique-numérique.

Le traitement peut être fait, sans numériser les signaux, par des circuits électroniques analogiques ou aussi des systèmes optiques (traitement du signal optique). Il est de plus en plus souvent réalisé par traitement numérique du signal, à l'aide d'ordinateurs, de microprocesseurs embarqués, de microprocesseurs spécialisés nommés DSP, de circuits reconfigurables (FPGA) ou de composants numériques dédiés (ASIC).

Il existe plusieurs branches particulières du traitement du signal, en fonction de la nature des signaux considérés. En particulier :

- Traitement de la parole (ou plus généralement du son) - pour l'analyse, la compression et la reconnaissance de la parole
- Traitement d'images - pour l'analyse, la restauration et la compression d'images fixes
- Traitement de la vidéo - pour l'analyse et la compression de séquences vidéo
- Traitement de signaux en dimensions supérieures, ou "mixtes", tels que les signaux produits par les nouvelles technologies en biologie ou neurosciences par exemple.

Le traitement du signal peut avoir différentes finalités :

- la détection d'un signal
- l'estimation de grandeurs à mesurer sur un signal
- le codage, la compression du signal pour son stockage et sa transmission
- l'amélioration de sa qualité (restauration) selon des critères physiologiques (pour l'écoute et la visualisation).

Le traitement d'un signal effectué dépend du but poursuivi. En particulier, les notions de signal et de bruit sont subjectives, elles dépendent de ce qui intéresse l'utilisateur. On utilise différentes mesures représentatives de la qualité d'un signal et de l'information contenue :

- Le rapport signal sur bruit, notion utilisée très fréquemment mais équivoque puisque tout dépend de ce qui est considéré comme signal et comme bruit.
- Le nombre de bits effectifs Effective Number of Bits (ENOB) qui est une mesure de la qualité de conversion analogique-numérique.
- L'information de Fisher, utile en particulier en estimation de paramètres. C'est l'information relative à un paramètre ou à un couple de paramètres (matrice d'information de Fisher).
- L'entropie, grandeur issue de la physique statistique et de la théorie de l'information (travaux de Shannon), utilisée dans les opérations de codage. Elle est une mesure de l'information "intrinsèque" du signal.

## Applications (extrait de l'encyclopédie libre *Wikipedia*)

Parce qu'elles s'appliquent à toutes les étapes d'une chaîne d'acquisition, d'analyse, de transfert et de restitution des données, les techniques du traitement du signal trouvent des applications dans pratiquement tous les domaines de la technologie :

- dans les télécommunications : que ce soit dans le domaine de la téléphonie ou dans le transfert de données numériques terrestre ou via satellite, la compression des données est primordiale pour exploiter au mieux la bande passante disponible, et minimiser les pertes. La suppression d'échos est un autre domaine d'application.
- en audio : on cherche à améliorer les techniques d'enregistrement et de compression pour obtenir la plus grande qualité sonore possible. Les techniques de correction d'écho permettent de réduire les effets de réflexions acoustiques dans la pièce. Le traitement du son s'est largement amélioré grâce aux ordinateurs. Toutefois, certains musiciens parlent davantage d'un son de nature différente que d'une simple amélioration qualitative (de même que le CD ne "sonne" pas comme le vinyl, et que certains groupes, par exemple Genesis, ont particulièrement profité du "nouveau son" offert par le nouveau support). La synthèse sonore permet en outre de créer des sons artificiels ou de recréer les sons d'instruments naturels. Elle a été à l'origine de nombreux bouleversements en musique.
- l'analyse des échos permet d'obtenir des informations sur le milieu sur lequel les ondes se sont réfléchies. Cette technique est exploitée dans le domaine de l'imagerie radar ou sonar. En géophysique, en analysant les réflexions d'ondes acoustiques, on peut déterminer l'épaisseur et la nature des strates du sous-sol. Cette technique est utilisée dans le domaine de la prospection minière et dans la prédiction des tremblements de terre.
- en imagerie : on trouve des applications dans le domaine médical (reconstruction tomographique, imagerie par résonance magnétique - IRM), dans le spatial (traitement de photos satellite ou d'images radar). Ce domaine inclut aussi les techniques de reconnaissance de formes et de compression.
- le traitement de séquences vidéo concerne la compression, la restauration, la réalisation d'effets spéciaux, et l'extraction de descripteurs (reconnaissance de formes et textures, suivi de mouvements, caractérisation etc.) afin de produire des annotations automatiques dans une perspective de bases de données (recherche par le contenu).

## Objectif du cours

L'objectif de ce cours est de donner une introduction à un certain nombre de problèmes du traitement du signal, en insistant sur les aspects mathématiques. Les trois domaines des mathématiques auxquels fera principalement appel ce cours sont l'analyse harmonique (analyse de Fourier), l'analyse fonctionnelle, et les probabilités. On s'intéressera en particulier à la modélisation mathématique des signaux, notamment les modèles déterministes (fonctions ou suites) et les modèles de signaux aléatoires (processus stochastiques).

Les points essentiels traités dans ce cours seront :

- La représentation "spectrale" des signaux.
- Le filtrage des signaux, dans sa version numérique et sa version analogique.
- La conversion "analogique → numérique", notamment le théorème d'échantillonnage et les opérations préalables à l'échantillonnage.
- Les modèles de signaux aléatoires stationnaires en moyenne d'ordre deux, et les opérations correspondantes.

Un certain nombre d'applications spécifiques seront traitées plus en détails, prises par exemple parmi la liste suivante

- la détection optimale de signaux connus plongés dans un bruit Gaussien coloré,
- la compression des sons et/ou des images, avec par exemple l'application aux codeurs MP3 pour les sons, ou JPEG2000 pour les images.
- l'analyse temps-fréquence et l'analyse par ondelettes,
- le codage de la parole (par exemple avec un codeur par prédiction linéaire),
- les codes correcteurs d'erreur
- La séparation aveugle de sources,

---

---

- ...

Certains des aspects développés dans le cours seront également étudiés dans le cadre de travaux pratiques sous MATLAB.



# Signaux Numériques

Le traitement du signal classique s'appuie fortement sur l'analyse harmonique, et en particulier l'analyse de Fourier. On donne ici les éléments essentiels de la théorie des séries de Fourier, avant d'appliquer les résultats essentiels au traitement des signaux numériques.

## 1.1. Séries de Fourier

### 1.1.1. Rappels sur les espaces $L^p$ et $\ell^p$

Commençons par introduire les espaces  $L^p$  : soient  $a < b$  deux réels, et soit  $f$  une fonction :  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f \in L^p([a, b])$  si

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty .$$

L'application  $f \rightarrow \|f\|_p$  définit une seminorme sur  $L^p([a, b])$ , seminorme qui peut être transformée en norme par un passage au quotient approprié. Etant données  $f, g \in L^p([a, b])$ , on dira que  $f \sim g$  si  $\|f - g\|_p = 0$ . Ceci définit une relation d'équivalence, et on peut alors définir  $L^p([a, b])$  par

$$L^p([a, b]) = \mathcal{L}^p([a, b]) / \sim ,$$

c'est à dire en identifiant les fonctions qui diffèrent sur un ensemble de mesure nulle. On montre que la norme ainsi obtenue munit  $L^p([a, b])$  d'une structure d'espace de Banach.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . On dira que  $f \in L^p_p([a, b])$  si la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[a, b]$  appartient à  $L^p([a, b])$ , et si  $f$  est périodique dans le sens suivant : en posant  $T = b - a$ , et  $f_n(t) = f(t - nT)$ , on a  $f = f_n$  pour tout  $n$ .

On définit de façon analogue les espaces  $L^p(\mathbb{R})$ .

On dit qu'une suite  $f = \{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$  appartient à  $\ell^p(\mathbb{Z})$  si

$$\|f\|_p := \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^p \right)^{1/p} < \infty .$$

$\ell^p(\mathbb{Z})$  est lui aussi naturellement muni d'une structure d'espace de Banach par la norme  $\|\cdot\|_p$ .

Les espaces  $L^p([a, b])$  et  $\ell^p(\mathbb{Z})$  possèdent des propriétés simples d'inclusion :

**PROPOSITION 1.1** Soit  $1 < p < \infty$ .

1. Si  $f \in L^p([a, b])$ , alors  $f \in L^q([a, b])$  pour tout  $q$  tel que  $1 < q \leq p$ .
2. Si  $f \in \ell^p(\mathbb{Z})$ , alors  $f \in \ell^q(\mathbb{Z})$  pour tout  $q$  tel que  $p \leq q < \infty$ .

**Preuve :** 1) Soit  $f \in L^p([a, b])$ , et soit  $S$  l'ensemble des points  $t$  tels que  $|f(t)| \geq 1$ . Sur  $S$ , on a alors  $|f(t)|^q \leq |f(t)|^p$  pour tout  $q \leq p$ . On a alors, en notant  $I = [a, b]$ ,

$$\int_a^b |f(t)|^q dt = \int_S |f(t)|^q dt + \int_{I \setminus S} |f(t)|^q dt \leq \int_S |f(t)|^p dt + |I \setminus S| < \infty .$$

2) Le cas des suites est une conséquence directe du critère de Riemann. ♠

REMARQUE 1.1 Il est à noter que dans le cas des espaces  $L^p(\mathbb{R})$ , il n'existe aucune relation d'inclusion de telle sorte.

On définit de la façon usuelle le produit simple des suites  $((fg)_n = f_n g_n)$  et des fonctions  $((fg)(t) = f(t)g(t))$ ; on utilisera régulièrement le résultat suivant

PROPOSITION 1.2 (HÖLDER) Soient  $1 \leq p, q \leq \infty$ , et soit  $r$  tel que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (1.1)$$

1. Si  $f \in L^p([a, b])$  et  $g \in L^q([a, b])$ , alors  $fg \in L^r([a, b])$ .
2. Si  $f \in \ell^p(\mathbb{Z})$  et  $g \in \ell^q(\mathbb{Z})$ , alors  $fg \in \ell^r(\mathbb{Z})$ .

Dans tous les cas, on a l'inégalité de Hölder

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.2)$$

### 1.1.2. La théorie $L^2$

Considérons l'espace  $L^2_p([a, b])$  des fonctions périodiques de période  $b - a$ , de carré intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$  (et donc sur tout intervalle de longueur  $b - a$ ), muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\bar{g}(t) dt. \quad (1.3)$$

On considère les fonctions trigonométriques

$$e_n : t \rightarrow e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \exp\left(2i\pi \frac{nt}{b-a}\right). \quad (1.4)$$

On vérifie facilement que la famille de fonctions  $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est un système orthonormal dans  $L^2_p([a, b])$ . Pour montrer qu'il s'agit d'une base orthonormale, il nous suffit donc de montrer que le système est complet.

Une première méthode consiste à utiliser la densité de  $C([a, b])$  dans  $L^2([a, b])$ . On peut alors utiliser le résultat d'approximation des fonctions continues par des polynômes trigonométriques (voir [13]) pour une démonstration) :

PROPOSITION 1.3 (WEIERSTRASS) Soit  $f \in C([a, b])$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $P(t)$  de période  $b - a$  tel que pour tout  $t \in [a, b]$ , on ait

$$|f(t) - P(t)| \leq \epsilon. \quad (1.5)$$

Supposons pour simplifier que  $[a, b] = [-\pi, \pi]$  (le cas général se traite de façon similaire). Soit  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ , et supposons que  $f$  soit orthogonale à toutes les fonctions  $e_n : \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt = 0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Soit  $g$  définie par  $g(t) = \int_{-\pi}^t f(s) ds$ .  $g$  est continue par construction, et vérifie  $g(\pi) = 0$ . Si  $C$  est une constante complexe quelconque, une intégration par parties montre que  $\int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - C)e^{-int} dt = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Un choix adéquat de  $C$  permet à cette égalité d'être valide pour  $n = 0$  également. On pose alors  $h(t) = g(t) - C$ .  $h \in C([-\pi, \pi])$ , et on sait d'après le résultat ci-dessus que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $P(t)$  tel que pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ ,  $|h(t) - P(t)| \leq \epsilon$ . Donc, on a

$$\|h\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(t)(h(t) - P(t)) dt \leq \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)| dt \leq \sqrt{2\pi}\epsilon \|h\|,$$

d'où on déduit que pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\|h\| \leq \sqrt{2\pi}\epsilon$ . Donc  $h(t) = 0$  presque partout,  $g(t) = C = g(\pi) = 0$  pour presque tout  $t$ , et donc  $f = 0$ . On a ainsi, comme pour tout  $q \geq 1$ ,  $L^q([-\pi, \pi]) \subset L^1([-\pi, \pi])$ , le résultat suivant

COROLLAIRE 1.1 Le système trigonométrique est complet dans  $L^2_p([-\pi, \pi])$ .

REMARQUE 1.2 En fait, on peut également utiliser directement la densité de  $C([a, b])$  dans  $L^2([a, b])$ .

Nous sommes donc en position d'utiliser les résultats précédents, ce qui conduit aux séries de Fourier. Pour tout  $f \in L^2([a, b])$ , on pose

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-2i\pi nt/(b-a)} dt . \quad (1.6)$$

Les nombres  $c_n(f)$  (qui existent puisque  $L^2([a, b]) \subset L^1([a, b])$ ) sont appelés *coefficients de Fourier* de  $f$ , et on s'intéresse aux sommes partielles

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{2i\pi nt/(b-a)} , \quad (1.7)$$

ainsi qu'à leur limite

$$f_\infty(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2i\pi nt/(b-a)} , \quad (1.8)$$

appelée *série de Fourier* de  $f$ .

Il résulte de la discussion précédente (et en particulier du théorème A.6 de l'Appendice A) que si  $f \in L^2_p([a, b])$ , la suite  $c(f) = \{c_n(f), n \in \mathbb{Z}\}$  appartient à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , et la série de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2i\pi nt/(b-a)}$$

converge au sens de  $L^2$ . On a donc

**THÉORÈME 1.1** *La famille des fonctions exponentielles  $e_n$  définies en (1.4) est une base orthonormée de  $L^2_p([a, b])$ . Pour tout  $f \in L^2_p([a, b])$ , on a*

$$\|f - f_N\|^2 = (b-a) \sum_{|n|>N} |c_n(f)|^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow \infty . \quad (1.9)$$

De plus, la formule de Parseval s'écrit, pour toutes  $f, g \in L^2_p([a, b])$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt . \quad (1.10)$$

**REMARQUE 1.3** Les séries de Fourier fournissent des décompositions des fonctions périodiques ou à support borné comme superpositions de "briques" élémentaires, les fonctions  $e_n$ . La variable  $n$  possède une signification "physique" essentielle : il s'agit d'une variable de fréquence, qui par exemple dans le cas où la fonction  $f$  étudiée représente un son, caractérise la "hauteur" du son. Les grands  $n$  (hautes fréquences) correspondent aux sons aigus, et les faibles valeurs de  $n$  aux sons graves.

### 1.1.3. Problèmes de convergence des séries de Fourier

La théorie  $L^2$  ne donne que des indications relativement limitées sur le comportement des coefficients de Fourier, et sur la convergence des séries de Fourier. Par exemple, la formule de Parseval implique que si  $f \in L^2_p([a, b])$ , alors  $|c_n(f)| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On sait également que la série de Fourier de  $f$  converge (fortement) vers  $f$ . Il est possible de démontrer également la convergence presque partout (c'est un théorème célèbre de L. Carleson), mais on n'a pas nécessairement convergence ponctuelle.

Il est utile de se poser de tels problèmes dans des cadres fonctionnels différents, par exemple dans le cadre  $L^1$ .

Commençons par le résultat important suivant, appelé *Lemme de Riemann-Lebesgue*.

**THÉORÈME 1.2** *Soit  $f \in L^1([a, b])$ , et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors*

$$\int_a^b f(t) e^{-i\alpha t} dt \longrightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow \infty . \quad (1.11)$$

La démonstration utilise le résultat classique suivant

**PROPOSITION 1.4**  $C^1([a, b])$  est dense dans  $L^1([a, b])$  : pour toute fonction  $f \in L^1([a, b])$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $f_\epsilon \in C^1([a, b])$  telle que  $\|f - f_\epsilon\|_1 \leq \epsilon$ .

Preuve du Théorème 1.2 : Supposons dans un premier temps que  $f \in C^1([a, b])$ . Alors, par intégration par parties, on a

$$\int_a^b f(t)e^{-in\alpha t} dt = -\frac{1}{in\alpha} [f(b)e^{-in\alpha b} - f(a)e^{-in\alpha a}] + \frac{1}{in\alpha} \int_a^b f'(t)e^{-in\alpha t} dt,$$

qui tend bien vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . On utilise maintenant la densité de  $C^1([a, b])$  dans  $L^1([a, b])$  : si  $f \in L^1([a, b])$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $g_\epsilon \in C^1([a, b])$  tel que  $\int_a^b |f(t) - g_\epsilon(t)| dt < \epsilon/2$ . Alors

$$\int_a^b f(t)e^{-in\alpha t} dt \leq \int_a^b |f(t) - g_\epsilon(t)| dt + \left| \int_a^b g_\epsilon(t)e^{-in\alpha t} dt \right|.$$

Pour tout  $\epsilon$ , il existe  $N$  tel que la seconde intégrale soit plus petite que  $\epsilon/2$  pour  $|n| \geq N$ . Ceci complète la démonstration. ♠

Une conséquence importante de ce résultat est le résultat suivant de convergence ponctuelle. Pour simplifier, on se limitera dans cette section au cas particulier  $b = -a = \pi$ . Etant donné un point  $t_0$ , on notera

$$f(t_{0+}) = \lim_{t \rightarrow t_0, t \geq t_0} f(t), \quad f(t_{0-}) = \lim_{t \rightarrow t_0, t \leq t_0} f(t)$$

quand ces limites existent.

**THÉORÈME 1.3 (DIRICHLET)** Soit  $f \in L^1_p([-\pi, \pi])$ . Soit  $t_0$  un point tel que les limites  $f(t_{0+})$  et  $f(t_{0-})$  existent, de même que les dérivées à gauche et à droite de  $f$  en  $t_0$ . Alors quand  $N \rightarrow \infty$ ,

$$f_N(t_0) \rightarrow \frac{1}{2} (f(t_{0+}) + f(t_{0-})) . \tag{1.12}$$

Preuve : Commençons par évaluer la somme partielle  $f_N(t_0)$  :

$$\begin{aligned} f_N(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \sum_{n=-N}^N e^{in(t_0-t)} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(N+1/2)(t_0-t)}{\sin(t_0-t)/2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0+s) \frac{\sin(N+1/2)s}{\sin s/2} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t_0+s) + f(t_0-s)) \frac{\sin(N+1/2)s}{\sin s/2} ds \end{aligned}$$

La même expression appliquée à la fonction constante  $f = 1$  donne

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N+1/2)s}{\sin s/2} ds = 1 .$$

En posant  $\mu = (f(t_{0+}) + f(t_{0-}))/2$ , on a donc

$$f_N(t_0) - \mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(s) \sin(N+1/2)s ds , \tag{1.13}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{f(t_0+s) - f(t_{0+})}{\sin s/2} + \frac{f(t_0-s) - f(t_{0-})}{\sin s/2} \\ &= 2 \left( \frac{f(t_0+s) - f(t_{0+})}{s} + \frac{f(t_0-s) - f(t_{0-})}{s} \right) \frac{s/2}{\sin s/2} . \end{aligned}$$

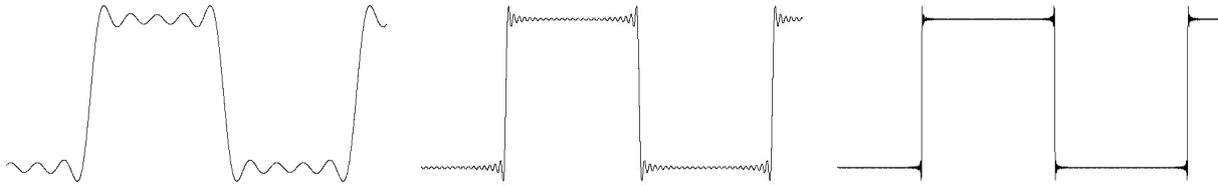


FIGURE 1.1.: Phénomène de Gibbs : sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction "créneau" : 10 termes (gauche), 50 termes (milieu) et 250 termes (droite)

Puisque  $f$  est supposée différentiable à droite et à gauche en  $t_0$ ,  $\phi(s)$  admet une limite finie en  $s \rightarrow 0$ . Donc, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\phi$  soit bornée sur  $]0, \alpha]$  :

$$|\phi(s)| \leq C \quad \text{pour tout } s \in ]0, \alpha] .$$

$\phi$  est donc intégrable sur  $]0, \alpha]$ . Comme  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ ,  $\phi$  est également intégrable sur  $]\alpha, \pi]$ , et donc sur  $[0, \pi]$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème de Riemann-Lebesgue à (1.13) pour conclure. ♠

EXEMPLE 1.1 Prenons l'exemple de  $f \in L^2_p([-\pi, \pi])$  définie par  $f(t) = \chi_{[0, \pi]}(t) - \chi_{[-\pi, 0]}(t)$ . Un calcul immédiat donne  $c_0(f) = 0$ , et  $c_n(f) = (1 - (-1)^n)/(in\pi)$  pour  $n \neq 0$ . On obtient également  $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) \exp\{int\} = 0$  pour  $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ce qui coïncide bien avec le résultat du théorème précédent.

REMARQUE 1.4 En particulier, si de plus  $f$  est continue en  $t_0$ ,  $f_N(t_0) \rightarrow f(t_0)$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

REMARQUE 1.5 Il est possible de prouver des versions plus "fines" de ce résultat, ainsi que des résultats de convergence uniforme des séries de Fourier. Par exemple, on a notamment les résultats suivants :

1. Théorème de convergence uniforme de Dirichlet : Soit  $f$  une fonction périodique, continûment différentiable au voisinage d'un intervalle  $I$ . Alors la série de Fourier de  $f$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ .
2. Théorème de Fejèr : Soit  $f$  une fonction périodique, continue dans un voisinage d'un intervalle  $I$ . On note

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{2i\pi n t/T}$$

les sommes partielles de la série de Fourier de  $f$ , et

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(t)$$

les moyennes de Cesàro de ces sommes partielles. Alors la suite des  $\sigma_N$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ .

Ces problèmes de convergence peuvent se vérifier visuellement, comme on peut le voir en FIG. 1.1, où on peut bien voir les oscillations présentes sur les sommes partielles au voisinage des discontinuités de la fonction originale. L'amplitude de ces oscillations ne décroît pas quand le nombre de termes augmente. Il s'agit d'un phénomène appelé **phénomène de Gibbs**. On pourra se référer à [16] pour plus de détails sur les aspects mathématiques et [5] pour certains aspects plus pratiques. .

### 1.1.4. Le problème de l'extension

Le théorème de Riemann-Lebesgue montre en particulier que si  $f \in L^1_p([a, b])$ , alors  $|c_n(f)| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \pm\infty$ . En pratique, on s'intéresse non seulement à la convergence ponctuelle, mais aussi à la vitesse de convergence. Or cette dernière est directement liée à la régularité de  $f$ , comme le montre le lemme suivant.

LEMME 1.1 Soit  $f \in C^r(\mathbb{R})$ , périodique de période  $b - a$  ; alors il existe une constante  $K$  telle que

$$|c_n(f)| \leq K|n|^{-r} .$$

*Preuve :* une intégration par parties donne

$$c_n(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-2i\pi \frac{nt}{b-a}} dt = \frac{-1}{2i\pi n} \int_a^b f'(t) e^{-2i\pi \frac{nt}{b-a}} dt ,$$

car  $f$  étant continue, on a en particulier  $f(b) = f(a)$ . Similairement, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{-(b-a)}{2i\pi n} \right)^r \int_a^b f^{(r)}(t) e^{-2i\pi \frac{nt}{b-a}} dt .$$

Cette dernière intégrale étant bornée par hypothèse, on en déduit le lemme. ♠  
Ceci permet d'estimer la vitesse de convergence des sommes partielles :

$$\|f - f_N\|^2 = (b-a) \sum_{|n|>N} |c_n(f)|^2 \leq 2(b-a)K^2 \sum_{|n|>N} n^{-2r} \leq K'N^{1-2r} .$$

REMARQUE 1.6 Il existe un résultat réciproque : soit  $f$  une fonction périodique, telle que ses coefficients de Fourier vérifient

$$|c_n(f)| \leq \frac{K}{|n|^{r+2}}$$

pour une constante positive  $K$  et un entier positif  $r$ . Alors  $f \in C^r(\mathbb{R})$ . En particulier,  $f$  est  $C^\infty$  si et seulement si ses coefficients de Fourier décroissent plus vite que toute puissance.

Cependant, on utilise également les séries de Fourier pour développer des fonctions à support borné. Et il y a là une différence importante avec le cas des fonctions périodiques. En effet, le développement en série de Fourier d'une fonction à support borné n'est *pas unique*, comme on va le voir.

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , à support borné dans l'intervalle  $[a, b]$ . Soit  $f_p$  la fonction périodique de période  $b - a$ , qui coïncide avec  $f$  sur  $[a, b]$ , définie par

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - k(b-a)) .$$

Il est clair que  $f_p \in L^2_p([a, b])$ . On peut donc la développer en série de Fourier, et écrire, puisque  $f = f_p \chi_{[a,b]}$

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N , \tag{1.14}$$

où la limite est toujours à prendre au sens de  $L^2$  (c'est à dire  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0$ ), et où

$$f_N(t) = \left( \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{2i\pi n t / (b-a)} \right) \chi_{[a,b]}(t) , \tag{1.15}$$

et où les coefficients de Fourier  $c_n(f) = c_n(f_p)$  sont toujours définis par

$$c_n(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-2i\pi n t / (b-a)} dt . \tag{1.16}$$

La série de Fourier de la fonction  $f_p$  est unique. Cependant, le passage de  $f$  à  $f_p$  n'est pas la seule possibilité. Il existe de multiples alternatives, dont on va donner deux exemples ci dessous.

Considérons tout d'abord la fonction  $g$ , définie sur l'intervalle  $[2a - b, b]$  par

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ f(2a - t) & \text{si } t \in [2a - b, a] . \end{cases}$$

$g$  est une fonction symétrique par rapport à  $a$ , et on peut considérer sa périodisée, de période  $2(b - a)$

$$g_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - 2k(b - a)) .$$

$g_p$  admet un développement en série de Fourier

$$g_p(t) = \sum_n c_n(g) e^{i\pi n t / (b-a)} ,$$

où

$$c_n(g) = \frac{1}{2(b-a)} \int_{2a-b}^b g_p(t) e^{i\pi n t / (b-a)} dt .$$

Cependant, on peut aussi écrire, pour  $n \neq 0$ ,

$$c_n(g) = e^{-in\pi a / (b-a)} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(\pi n \frac{t-a}{b-a}\right) dt ,$$

et

$$c_0(g) = c_0(f) .$$

Posons maintenant

$$A_n(f) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(\pi n \frac{t-a}{b-a}\right) dt . \quad (1.17)$$

Il est clair que  $A_{-n}(f) = A_n(f)$ ; la série de Fourier de  $g_p$  s'écrit maintenant

$$g_p(t) = \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n(f) e^{i\pi n (t-a) / (b-a)} .$$

Ceci nous donne directement une autre série de Fourier pour la fonction  $f$  :

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^{(C)} , \quad (1.18)$$

où les sommes partielles  $f_N^{(C)}$  sont définies par

$$f_N^{(C)}(t) = \left( \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^N A_n(f) \cos\left(\pi n \frac{t-a}{b-a}\right) \right) \chi_{[a,b]}(t) . \quad (1.19)$$

Une autre possibilité consiste à considérer une extension non pas symétrique (comme l'est la fonction  $g$ ) de  $f$ , mais une extension antisymétrique  $h$ , définie par

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ -f(2a - t) & \text{si } t \in [2a - b, a] . \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que la même procédure conduit à un développement en série de sinus : on a

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^{(S)} , \quad (1.20)$$

où les sommes partielles  $f_N^{(S)}$  sont définies par

$$f_N^{(S)}(t) = \left( \sum_{n=1}^N B_n(f) \sin\left(\pi n \frac{t-a}{b-a}\right) \right) \chi_{[a,b]}(t) , \quad (1.21)$$

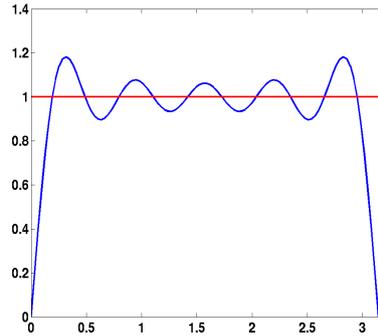


FIGURE 1.2.: Diverses séries de Fourier décrivant  $\chi_{[0,\pi]}$  : série de sinus, série de cosinus.

et où les coefficients  $B_n(f)$  sont donnés par

$$B_n(f) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin\left(\pi n \frac{t-a}{b-a}\right) dt . \quad (1.22)$$

La question qui se pose alors est celle du choix de la série à utiliser. Dans certaines applications, par exemple pour le codage des signaux ou des images, on a intérêt à privilégier la vitesse de décroissance des coefficients du développement de  $f$ . Nous avons vu plus haut que celui-ci est directement lié à la régularité, non pas de  $f$  elle-même, mais de la fonction périodique utilisée dans le développement, c'est à dire ici  $f_p$ , ou  $g_p$ , ou la fonction équivalente dans le cas du développement en série de sinus.

Or, même si  $f$  est une fonction continue, il est rare qu'elle soit telle que  $f(b) = f(a)$ . Donc  $f_p$  est discontinue, et les coefficients  $c_n(f)$  n'ont aucune raison de décroître assez vite quand  $n$  est grand. Par contre, si  $f$  est continue, alors il est facile de voir que  $g_p$  est continue également, de sorte que les coefficients  $A_n(f)$  ont toutes les chances de décroître plus rapidement que les coefficients  $c_n(f)$ . C'est pourquoi on utilise souvent les séries de cosinus dans les codeurs de signaux comme ceux employés dans les standards de communication (comme JPEG ou MPEG par exemple).

EXEMPLE 1.2 Comme illustration de cet fait, prenons la fonction  $f(t) = \chi_{[0,\pi]}$ . Un calcul immédiat montre que  $c_n(f) = \delta_{n,0}$ . Par contre, les coefficients  $B_n(f)$  se comportent comme  $1/n$  ; Le développement en série de sinus est donc très inapproprié dans ce cas, comme on peut le voir en FIG. 1.2, avec l'approximation par cosinus (qui est exacte, et identique à la série de Fourier usuelle, et ne comporte qu'un terme) et l'approximation par une série de sinus comportant 10 termes. La série de sinus convergera toujours vers 0 en  $t = 0$  et en  $t = \pi$ .

EXEMPLE 1.3 On considère l'exemple de la fonction

$$f(t) = t(\pi - t)$$

définie sur  $[0, \pi]$ . Un calcul explicite montre que ses coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) e^{-2int} dt = -\frac{1}{2n^2} .$$

Par contre, on a aussi

$$A_n(f) = -\frac{2}{n^2} (1 + (-1)^n) ,$$

et

$$B_n(f) = -\frac{4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n) .$$

Donc, dans ce cas particulier, le développement en série de sinus est le plus économique. Les figures 1.3 et 1.4 représentent les approximations obtenues avec ces 3 développements, respectivement  $f$ ,  $f_5$ ,  $f_5^{(S)}$  et  $f_5^{(C)}$ . La figure 1.5 représente l'erreur d'approximation dans les 3 cas :  $f - f_5$ ,  $f - f_5^{(S)}$  et  $f - f_5^{(C)}$ .

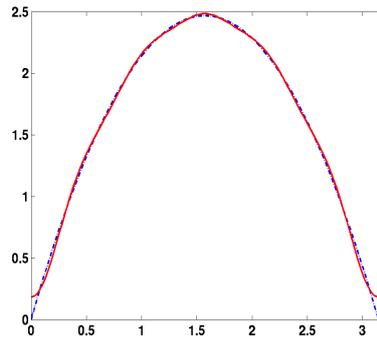


FIGURE 1.3.: Diverses séries de Fourier décrivant un arc de parabole : arc de parabole (tirets), et sa série de Fourier usuelle (trait plein).

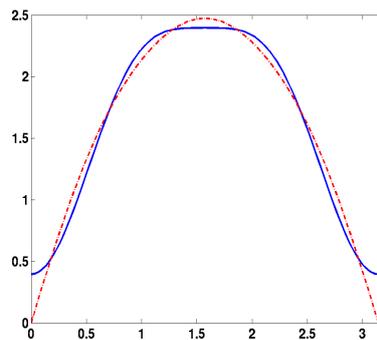


FIGURE 1.4.: Diverses séries de Fourier décrivant un arc de parabole (suite) : série de sinus (tirets) et série de cosinus (trait plein).

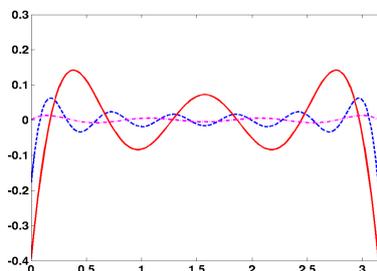


FIGURE 1.5.: Diverses séries de Fourier décrivant un arc de parabole (suite) : erreurs de reconstruction. Série de cosinus (trait plein), de sinus (tirets et pointillés) et de exponentielles (tirets)

### 1.1.5. Convolution-Produit

Etant données deux fonctions périodiques  $f, g$ , on leur associe leur produit de convolution  $h = f * g$ , défini par

$$(f * g)(t) = \int_a^b f(s)g(t-s) ds, \quad (1.23)$$

pour tout  $t$  tel que l'intégrale converge. On a le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.5 (YOUNG)** Soient  $f \in L_p^p([a, b])$  et  $g \in L_p^q([a, b])$ , où  $1 \leq p, q \leq \infty$ , et soit  $r$  défini par

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (1.24)$$

Alors  $f * g \in L_p^r([a, b])$  ; de plus, il existe  $C_{pq} \leq 1$  telle que l'inégalité de Young soit satisfaite :

$$\|f * g\|_r \leq C_{pq} \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.25)$$

Considérons donc  $f \in L_p^2([a, b])$ , et  $h \in L_p^1([a, b])$  ; il résulte des inégalités de Young que  $f * h \in L_p^2([a, b])$ . On peut donc calculer

$$c_n(h * f) = \frac{1}{T} \int_a^b \int_a^b h(s)f(t-s) ds e^{-2i\pi nt/T} dt = T c_n(f) c_n(h).$$

Notons que ce résultat reste vrai si on suppose que  $h \in L_p^2([a, b])$ , grâce aux relations d'inclusion que nous avons vues.

D'un autre coté, supposons  $f, g \in L_p^2([a, b])$ . Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $fg \in L_p^1([a, b])$ , et on peut calculer les coefficients de Fourier

$$\begin{aligned} c_n(fg) &= \frac{1}{T} \int_a^b f(t)g(t)e^{-2i\pi nt/T} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_a^b f(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(g)e^{-2i\pi(n-m)t/T} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(g)c_{n-m}(f). \end{aligned}$$

On obtient donc un produit de convolution des suites  $c(f)$  et  $c(g)$ .

**PROPOSITION 1.6** Soient  $f, g \in L_p^2([a, b])$ . Les coefficients de Fourier  $c_n(fg)$  et  $c_n(f * g)$  sont bien définis, et on a

$$c_n(fg) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(f)c_{n-m}(g) \quad (1.26)$$

$$c_n(f * g) = (b-a) c_n(f) c_n(g). \quad (1.27)$$

## 1.2. Signaux numériques et TFD

Par définition, on appelle signal numérique (ou digital) une suite  $\{s_n\}$  de nombres réels, finie ou infinie. On considère tout d'abord le cas infini. Le cadre mathématique le plus couramment utilisé est le cadre des signaux numériques d'énergie finie  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

### 1.2.1. Transformation de Fourier discrète

Les résultats obtenus plus haut (séries de Fourier) se transposent de façon immédiate au cas des signaux numériques. En effet, la théorie  $L^2$  des séries de Fourier permet de construire une transformation unitaire entre  $L_p^2([-\pi, \pi])$  et  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . La transformation inverse porte le nom de transformation de Fourier discrète.

**DÉFINITION 1.1** Soit  $s = \{s_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Sa transformée de Fourier discrète est la fonction  $2\pi$ -périodique  $\omega \rightarrow \hat{s}(\omega)$  définie par

$$\hat{s}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{-in\omega}, \quad (1.28)$$

pour tout  $\omega$  tel que la série soit convergente.

La variable  $\omega$  est appelée "fréquence" (ou pulsation). Il résulte de la théorie des séries de Fourier que la TFD d'une suite de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  est une fonction  $2\pi$ -périodique, de carré intégrable sur  $[-\pi, \pi]$ , et que la transformation inverse est donnée par le calcul des coefficients de Fourier de  $S$ . Plus précisément, on a

**THÉORÈME 1.4** La transformation de Fourier discrète est multiple d'une transformation unitaire de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  sur  $L^2_p([-\pi, \pi])$  : la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_n|^2 \quad (1.29)$$

est vérifiée. La transformation inverse est donnée par

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{s}(\omega) e^{in\omega} d\omega = c_{-n}(\hat{s}). \quad (1.30)$$

**REMARQUE 1.7** On verra plus loin, au moment de décrire la théorie de l'échantillonnage, l'utilité de cette transformation. Il est souvent nécessaire d'utiliser une variante, définie par

$$\hat{s}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{-in\omega/\eta},$$

où  $\eta$  est un réel strictement positif fixé (appelé *fréquence d'échantillonnage*).  $\hat{s}$  est alors  $2\pi\eta$ -périodique, et on a également

$$s_n = \frac{1}{2\pi\eta} \int_{-\pi\eta}^{\pi\eta} \hat{s}(\omega) e^{in\omega/\eta} d\omega.$$

## 1.2.2. Filtrage des signaux numériques

Les opérations de filtrage sont les opérations de base du traitement du signal. Le filtrage est utilisé pour modifier le "contenu fréquentiel" des signaux.

**DÉFINITION 1.2** Un filtre numérique est un opérateur linéaire noté  $K_h$ , associant à un signal numérique  $s$  un autre signal  $K_h s$ , appelé signal filtré, de la forme

$$(K_h s)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_m s_{n-m}, \quad (1.31)$$

pour tout  $n$  tel que la série soit convergente. La suite  $h = \{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est appelée réponse impulsionnelle du filtre.

Le filtre est dit causal si  $h_n = 0$  pour tout  $n < 0$ . Il est dit stable si  $K_h f$  est borné pour tout  $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$  (c'est à dire si  $K_h f$  est continu de  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$  sur  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ ). Il est réalisable s'il est causal et stable.

Il est immédiat qu'un tel opérateur commute avec les translations entières : étant donnée  $s \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , si on note  $s'$  une translatée de  $s$  :

$$s'_n = s_{n-n_0},$$

il vient immédiatement

$$(K_h s')_n = (K_h s)_{n-n_0}.$$

REMARQUE 1.8 Il est immédiat, d'après les inégalités d'Young, que si la réponse impulsionnelle  $h$  est de module sommable (i.e.  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ), le filtre  $K_h$  est automatiquement stable et continu  $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ .

La TFD simplifie considérablement les opérations de filtrage numérique : il est facile de vérifier (par un changement d'indice de sommation) que si  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ,

$$\widehat{K_h s}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m s_{n-m} e^{-in\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m e^{-im\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k e^{-ik\omega} = \hat{h}(\omega) \hat{s}(\omega). \quad (1.32)$$

La fonction  $m = \hat{h}$  est appelée *fonction de transfert* du filtre  $K_h$ . Par conséquent, les filtres numériques sont essentiellement utilisés pour modifier le contenu fréquentiel des signaux (on en verra des applications par la suite).

Plus généralement, partant d'une fonction de transfert  $m \in L^\infty([-\pi, \pi])$ , il est facile de voir que l'opérateur linéaire  $T : s \rightarrow s'$  défini par

$$(Ts)_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} m(\omega) \hat{s}(\omega) d\omega$$

est un filtre numérique ; sa réponse impulsionnelle est la TFD inverse de  $m$ .

REMARQUE 1.9 Dans ce cas,  $m \in L^\infty([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi])$ , de sorte que la réponse impulsionnelle  $h$ , TFD inverse de  $m$ , appartient automatiquement à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Par contre, elle n'est généralement pas dans  $\ell^1(\mathbb{Z})$ , ce qui peut parfois poser des problèmes pratiques, comme on va le voir plus loin.

L'exemple le plus simple est celui du *filtre passe-bas idéal*, qui force à zéro toutes les fréquences supérieures (en valeur absolue) à une certaine *fréquence de coupure*  $\omega_0 < \pi$ . Un tel filtre est défini par sa fonction de transfert

$$m(\omega) = \chi_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega).$$

Après TFD inverse, on obtient la réponse impulsionnelle suivante

$$h_n = \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin(n\omega_0)}{n\omega_0}.$$

Il est facile de voir que la réponse impulsionnelle de ce filtre n'appartient pas à  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Plus grave, ce filtre n'est pas réalisable, et ne peut donc pas être utilisé de façon exacte en pratique (on est obligé de tronquer les sommes infinies intervenant dans le calcul).

Un exemple de filtrage passe-bas utilisant un filtre idéal est décrit en FIG 1.6 : un signal (transitoire), et deux versions filtrées avec des fréquences de coupure différentes. On voit bien l'effet du filtrage qui atténue fortement les composantes les plus rapidement variables dans le signal. En particulier, dans le premier signal filtré (figure du milieu), les composantes très rapidement variables (donc les très hautes fréquences) ont été supprimées, mais des oscillations régulières subsistent. Par contre, dans le second exemple (figure du bas) obtenu avec une fréquence de coupure  $\omega_0$  inférieure à la précédente, ces oscillations ont été supprimées.

Les exemples les plus simples de filtres sont les **filtres à réponse impulsionnelle finie** (filtres  **FIR**), c'est à dire tels que la suite  $h$  soit de support fini :  $h_n \neq 0$  seulement si  $n \in n_1, \dots, n_2$ . Ces filtres sont en fait les seuls qui soient pratiquement utilisables si l'on s'en tient à la réalisation sous forme de produit de convolution

$$(K_h x)_n = \sum_{k=n_1}^{n_2} k_k x_{n-k},$$

dans la mesure où ils ne font intervenir qu'un nombre fini d'opérations.

La fonction de transfert est alors un polynôme trigonométrique

$$m(\omega) = \sum_{n=n_1}^{n_2} h_n e^{-in\omega}.$$

L'exemple le plus simple est celui du filtre passe-bas élémentaire, qui consiste simplement à effectuer des "moyennes" locales sur le signal d'entrée. Ce filtre est défini par  $h_0 = h_1 = 1/2$ , et  $h_k = 0$  sinon. Il est immédiat de voir que la fonction de transfert de ce filtre est la fonction  $\omega \rightarrow e^{-i\omega/2} \cos(\omega/2)$ ,

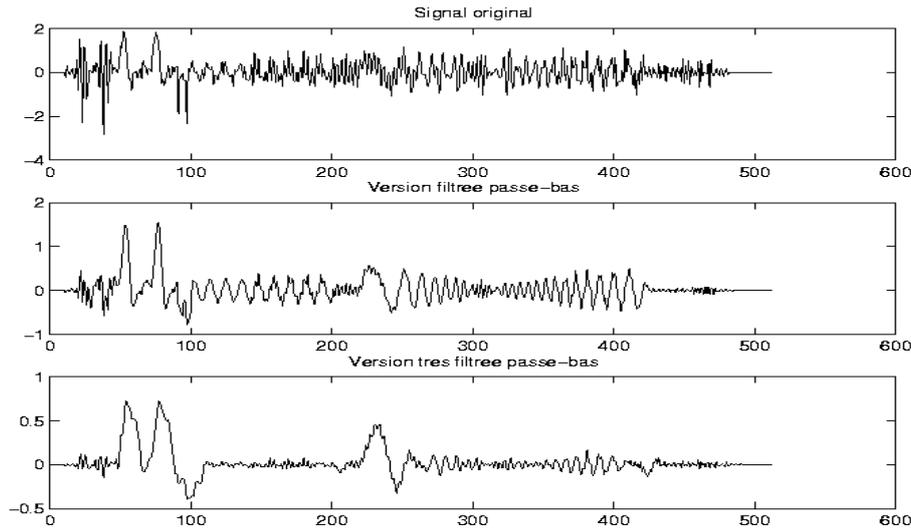


FIGURE 1.6.: Exemple de filtrage passe-bas : un signal transitoire, et deux versions filtrées (filtre passe-bas idéal) avec des fréquences de coupure différentes.

de sorte que  $|m(\omega)|^2 = \cos^2 \omega/2$ . multiplier la transformée de Fourier d'un signal par une telle fonction revient à l'atténuer au voisinage de  $\omega = \pm\pi$ , tout en la préservant au voisinage de  $\omega = 0$ . C'est le propre d'un filtrage passe-bas, loin d'un filtre idéal toutefois. De même, le choix  $h_0 = -h_1 = 1/2$ , et  $h_k = 0$  sinon conduit à  $|m(\omega)|^2 = \sin^2 \omega/2$ , ce qui donne un filtre "passe-haut", qui atténue les basses fréquences tout en préservant les hautes fréquences.

Les filtres FIR ne sont en général pas suffisants en pratique : leur fonction de transfert est un polynôme trigonométrique, et on sait que l'approximation de fonctions par des polynômes trigonométriques peut être problématique, en particulier pour le cas de fonctions peu régulières, par exemple discontinues, comme peut l'être la fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal (voir la Remarque 1.5). Il est nécessaire de se tourner vers des **filtres à réponse impulsionnelle infinie** (filtres **IIR**). Cependant, il est en pratique impossible d'implémenter des convolutions discrètes par des suites de longueur infinie. On a alors recours à une variante, appelée "filtrage récursif". L'idée de base du filtre récursif est de calculer de façon itérative une nouvelle valeur du signal filtré par filtrage FIR des valeurs passées du signal original et du signal filtré. Cette procédure est donc compatible avec des problématiques de "temps réel". Plus précisément, un filtre récursif associé à  $s$  la suite  $s'$  définie par

$$s'_n = \frac{1}{\alpha_0} \left( \sum_{m=0}^M \beta_m s_{n-m} - \sum_{m=1}^N \alpha_m s'_{n-m} \right), \quad (1.33)$$

où les coefficients  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont des nombres complexes fixés. Il s'agit donc d'une succession d'opérations causales.

La question est alors de trouver sous quelles conditions de telles opérations définissent un filtre continu sur  $\ell^2$ , ou tout du moins un filtre stable. Pour cela, remarquons que les signaux d'entrée  $s$  et de sortie  $s'$  du filtre sont reliés par une relation du type

$$\sum_{m=0}^N \alpha_m s'_{n-m} = \sum_{m=0}^M \beta_m s_{n-m}. \quad (1.34)$$

Il est facile de voir qu'après transformation de Fourier discrète, on aboutit à une relation du type

$$\left( \sum_{m=0}^N \alpha_m e^{-im\omega} \right) \hat{s}'(\omega) = \left( \sum_{m=0}^M \beta_m e^{-im\omega} \right) \hat{s}(\omega), \quad (1.35)$$

de sorte que la fonction de transfert  $m$  du filtre correspondant prend la forme d'une fraction rationnelle de deux polynômes trigonométriques

$$m(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^M \beta_m e^{-im\omega}}{\sum_{m=0}^N \alpha_m e^{-im\omega}} = H(e^{i\omega}), \quad (1.36)$$

pour une certaine fonction rationnelle  $H$ . Les propriétés du filtre dépendent bien évidemment des propriétés de  $m$ , et en particulier de son dénominateur. On peut facilement voir que si le dénominateur ne s'annule pas (c'est à dire si les racines du dénominateur de la fonction  $z \in \mathbb{Z} \rightarrow H(z)$  n'appartiennent pas au cercle unité), la fonction  $m$  est bornée, et le filtre correspondant est continu sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . On a donc

**PROPOSITION 1.7** Soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_N$  et  $\beta_0, \dots, \beta_M \in \mathbb{C}$ , tels que  $\sum_{m=0}^N \alpha_m z^{-m} \neq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ . Alors la fonction  $m$  définie en (1.36) est bornée, et l'équation récursive (1.34) définit bien un filtre numérique continu sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , par

$$(Tf)_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} \frac{\sum_{m=0}^M \beta_m e^{-im\omega}}{\sum_{m=0}^N \alpha_m e^{-im\omega}} \hat{f}(\omega) d\omega . \quad (1.37)$$

La fonction de transfert  $m$  du filtre correspondant est une fonction périodique, et peut être décomposée en série de Fourier. Cependant, celle-ci est (sauf dans certains cas triviaux) une série infinie, de sorte que le filtre considéré est bel et bien un filtre IIR. L'expression (1.35) montre donc qu'il est possible d'effectuer un filtrage IIR en n'utilisant qu'un nombre fini d'opérations. Cette remarque est d'une importance considérable en pratique.

Il est évident que les propriétés du filtre dépendent fortement des caractéristiques de la fonction de transfert  $m$ , et en particulier des zéros de son dénominateur. Ce dernier étant (tout comme le numérateur) un polynôme trigonométrique, c'est donc un polynôme dans la variable complexe  $z = e^{i\omega}$ , ce qui rend l'étude des zéros plus facile. Les zéros du numérateur et du dénominateur sont les racines de polynômes en  $z$  correspondants, ces dernières étant en général complexes. Ceci suggère d'utiliser des techniques de fonctions d'une variable complexe, et conduit naturellement à introduire un outil voisin de la TFD, à savoir la transformation en  $z$ .

### 1.2.3. La transformation en $z$

La transformation en  $z$  associe à une suite une fonction d'une variable complexe  $z$  (on pourra se référer à [2, 3, 14] pour plus de précision sur la théorie des fonctions d'une variable complexe). Elle peut être vue comme un prolongement de la TFD dans le plan complexe, et ses propriétés en font un outil très utilisé par les "signalistes" (voir par exemple [10, 14]).

#### Séries de Laurent, transformation en $z$

Etant donné un signal numérique  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , il existe des cas où sa transformée de Fourier discrète n'est pas définie au sens classique. On a parfois recours à une alternative, la transformée en  $z$ , dont on décrit ci-dessous les propriétés essentielles, sans entrer dans les détails.

**DÉFINITION 1.3** Soit  $s = \{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  un signal numérique. Sa transformée en  $z$  est la série de Laurent

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^{-n} , \quad (1.38)$$

définie dans la couronne de convergence (éventuellement vide)  $r_1 < |z| < r_2$ .

On sait d'après des résultats généraux sur les séries de Laurent que  $S$  est holomorphe dans sa couronne de convergence. Inversement, étant donnée une fonction  $S$  holomorphe dans une couronne  $r_1 < |z| < r_2$ , elle admet un unique développement en série de Laurent. De plus, on a le lemme classique suivant :

**LEMME 1.2** Le rayon de convergence  $\rho$  de la série entière  $z \rightarrow \sum_0^{\infty} a_n z^n$  est donné par

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Le premier critère est le critère de Cauchy, le second est le critère de d'Alembert.

On en déduit immédiatement la couronne de convergence de la transformée en  $z$  d'un signal numérique :

**COROLLAIRE 1.2** Soit  $S$  la transformée en  $z$  de la série  $s$ . Les bornes de la couronne de convergence de  $S$  sont données par

$$r_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n|^{1/n}, \quad \frac{1}{r_2} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |s_{-n}|^{1/n}. \quad (1.39)$$

**EXEMPLE 1.4** On dit qu'un signal numérique  $s$  est *causal* si  $s_n = 0$  pour tout  $n < 0$ . Inversement,  $s$  est dit *anticausal* si  $s_n = 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Supposons que  $s$  soit causal. Alors il est évident que  $r_2^{-1} = 0$ , de sorte que la transformée en  $z$  de  $s$  est bien définie dans le domaine  $|z| > r_1$ , c'est à dire à l'extérieur d'un cercle de rayon  $r_1$ .

De même, si  $s$  est anticausal,  $r_1 = 0$ , et  $S(z)$  est bien défini à l'intérieur du cercle de rayon  $r_2$ .

### Inversion de la transformation en $z$

Il existe plusieurs techniques permettant d'inverser une transformation en  $z$ . La plus simple consiste à expliciter un développement en série de Laurent de la fonction  $S$  considérée. Le développement en série de Laurent étant unique, ceci fournit directement une transformée inverse.

**EXEMPLE 1.5** Prenons l'exemple de la fonction

$$S(z) = \frac{z}{z - z_0}, \quad |z| < |z_0|;$$

on peut alors écrire, pour  $|z| < |z_0|$ ,

$$S(z) = \frac{z}{z - z_0} = -\frac{z}{z_0} \frac{1}{1 - z/z_0} = \frac{z}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} z_0^n z^{-n},$$

ce qui, conjugué à l'unicité du développement en série de Laurent, fournit

$$s_n = \begin{cases} z_0^n & \text{pour } n < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une alternative consiste à utiliser la TFD. Soit  $S$  la transformée en  $z$  d'un signal  $s$ , et soit  $r$  un nombre tel que  $r_1 < r < r_2$ . Calculons

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = \sum_m s_m r^{-m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = r^{-n} s_n.$$

On peut donc écrire

$$s_n = \frac{r^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta.$$

Par un changement de variables complexes  $z = re^{i\theta}$ , on obtient donc

**PROPOSITION 1.8** Soit  $s$  un signal numérique, et soit  $S$  sa transformée en  $z$ , définie dans la couronne de convergence  $r_1 < |z| < r_2$ . Les coefficients de  $s$  sont donnés par

$$s_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C S(z) z^n \frac{dz}{z}, \quad (1.40)$$

où  $C$  est un cercle centré sur l'origine du plan complexe, de rayon  $r \in ]r_1, r_2[$ .

On a généralement recours à la méthode des résidus pour calculer de telles intégrales.

### Transformation en $z$ et filtrage numérique

L'un des intérêts de la transformation en  $z$  est son comportement vis à vis des transformations simples, et en particulier des translations. Etant donnée une suite  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , et une suite de filtres  $\{s'_n, n \in \mathbb{Z}\}$  donnée par  $s'_n = s_{n-k}$ , on voit immédiatement que leurs transformées en  $z$  sont reliées par  $S'(z) = z^k S(z)$ . Le corollaire immédiat est le comportement de la transformation en  $z$  vis à vis du filtrage numérique. Etant donné un signal numérique  $s$  et un filtre numérique de réponse

impulsionnelle  $h$ , alors pour tout  $z$  à l'intérieur de l'intersection des couronnes de convergence des transformées  $S$  et  $H$  de  $s$  et  $h$  respectivement, on a

$$S'(z) = \sum_n s'_n z^{-n} = \sum_n \sum_k h_k z^{-k} s_{n-k} z^{-(n-k)},$$

de sorte que l'on a

$$S'(z) = H(z)S(z). \quad (1.41)$$

La fonction  $H$  est elle aussi appelée *fonction de transfert* du filtre.

En particulier, dans le cas d'un filtre récursif comme précédemment, on a

$$S'(z) = \frac{\sum_{m=0}^M \beta_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^N \alpha_m z^{-m}} S(z),$$

c'est à dire que la transformée en  $z$  de  $h$  prend la forme d'une fraction rationnelle. Cette expression est à rapprocher de l'expression (1.36) obtenue avec la TFD.

### Factorisation des filtres causaux d'ordre fini réels

**DÉFINITION 1.4** On dit qu'un filtre causal  $K_h$  est d'ordre fini si  $K_h$  peut être réalisé comme un filtre récursif comme en (1.34).

On va voir que de tels filtres peuvent être caractérisés par les pôles et les zéros (les racines du numérateur) de leur fonction de transfert. On parle de **représentation pôles-zéros**. On impose que le filtre  $K_h$  soit causal (donc la couronne de convergence de  $H(z)$  est de la forme  $|z| > r_1$ ) et stable (donc le cercle unité est inclus dans la couronne de convergence). Par conséquent, les pôles de  $H$  se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

On se limite ici aux filtres réels, c'est à dire tels que les coefficients  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont réels. Dans ce cas, il est facile de voir que

$$\bar{\hat{h}}(\omega) = \hat{h}(-\omega),$$

de sorte que le spectre prend la forme

$$|\hat{h}(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{i\omega}}.$$

Notons  $z_k$  les pôles de  $H$  (les zéros du dénominateur de  $H$ ) et  $\zeta_\ell$  les zéros de  $H$ . Il est immédiat que  $|\hat{h}(\omega)|^2$  est caractérisé par des facteurs de la forme

$$(z - z_k)(z^{-1} - z_k) = 1 + z_k^2 - z_k(z + z^{-1}), \quad \text{et} \quad (z - \zeta_k)(z^{-1} - \zeta_k) = 1 + \zeta_k^2 - \zeta_k(z + z^{-1}),$$

(avec  $z = e^{i\omega}$ ). La module carré de la fonction de transfert  $M(\omega) = |\hat{h}(\omega)|^2$  est donc une fonction rationnelle positive de la variable réelle

$$w = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \cos(\omega) \in [-1, 1],$$

où on a posé  $z = e^{i\omega}$ .

Inversement, soit  $\omega \rightarrow W(\cos \omega) = N(\cos \omega)/D(\cos \omega)$  une fonction rationnelle positive de la variable réelle  $w \in [-1, 1]$ . Notons  $w = \cos(\omega)$ , et  $w_k$  les zéros (dans le plan complexe) de  $D$  (le numérateur  $N$  se traite de façon identique). On voit facilement que l'équation en  $z$

$$w_k = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

possède deux solutions inverses l'une de l'autre, notées  $z_k$  et  $z_k^{-1}$ . Par convention, on choisit  $|z_k| < 1$ . On peut alors poser

$$d(z) = \prod_k (z - z_k).$$

De même, en notant  $v_k$  les zéros de  $N$ , et  $\zeta_k$  et  $\zeta_k^{-1}$  les solutions et  $\zeta$  de

$$v_k = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$$

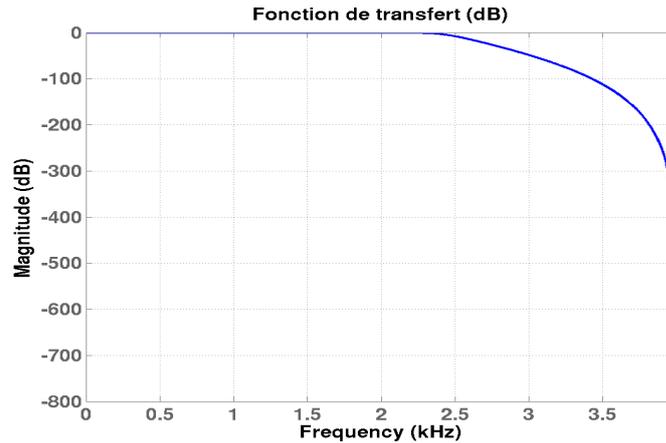


FIGURE 1.7.: Module de la fonction de transfert  $\omega \rightarrow |m(\omega)|$  (en logarithme) pour un filtre de Butterworth numérique d'ordre  $L = 10$ , avec une fréquence de coupure  $\omega_0 = \pi/3$ .

(sans nécessairement imposer  $|\zeta_k| < 1$ ), on est naturellement conduit à introduire

$$n(z) = \prod_k (z - \zeta_k) .$$

Il résulte de cette analyse que la fonction

$$z \rightarrow \frac{n(z)}{d(z)}$$

est la fonction de transfert d'un filtre causal stable d'ordre fini.

**PROPOSITION 1.9** 1. Soit  $K_h$  un filtre causal stable d'ordre fini. Alors le module carré de sa fonction de transfert  $M = |\hat{h}|^2$  est une fonction rationnelle non-négative de la variable réelle  $w = \cos \omega \in [-1, 1]$ .

2. Inversement, étant donnée une fonction rationnelle non-négative de  $w = \cos \omega$  notée  $\omega \rightarrow M(\omega) \in \mathbb{R}^+$ , il existe un filtre causal stable d'ordre fini  $K_h$  dont le module carré de la fonction de transfert coïncide avec  $M$ .

**REMARQUE 1.10** Le filtre  $K_h$  n'est pas unique, car il reste la liberté de choisir les zéros  $\zeta_k$  à l'intérieur ou à l'extérieur du disque unité pour former la fonction  $d$ . Choisir tous les zéros à l'intérieur du disque unité conduit aux filtres dits à *phase minimale*.

Un exemple est donné par la famille des *filtres de Butterworth* (dans leur version numérique), qui constituent des approximations de filtres passe-bas idéaux. En introduisant de nouveau la variable  $w = \cos(\omega)$ , les filtres de Butterworth sont caractérisés par une fonction de transfert telle que

$$|\hat{h}(\omega)|^2 = W(w) = \frac{(w+1)^L}{(w+1)^L + c(1-w)^L} , \quad (1.42)$$

où  $L$  est un nombre entier fixé, et  $c$  une constante positive. Un exemple d'une telle fonction  $W$  se trouve en FIG 1.7 Il est facile de vérifier qu'une telle fonction  $W$  entre tout à fait dans les hypothèses de la Proposition 1.9. Par conséquent, il est toujours possible de trouver un filtre causal d'ordre fini, de réponse impulsionnelle  $h$ , tel que l'équation (1.42) soit satisfaite.

Le nombre  $c$  contrôle en fait la fréquence de coupure, via la relation

$$c = 3 \left( \frac{1 + \cos \omega_0}{1 - \cos \omega_0} \right)^L$$

(par exemple,  $c = 3$  correspond à une fréquence de coupure égale à  $\omega_0 = \pi/2$ ).

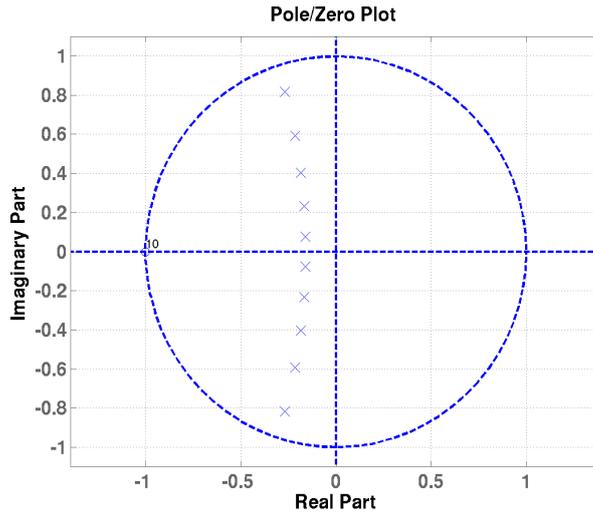


FIGURE 1.8.: Position dans le plan complexe des 10 pôles de la fonction de transfert  $m$  pour un filtre de Butterworth d'ordre 10, pour une fréquence de coupure égale à  $\pi/3$ .

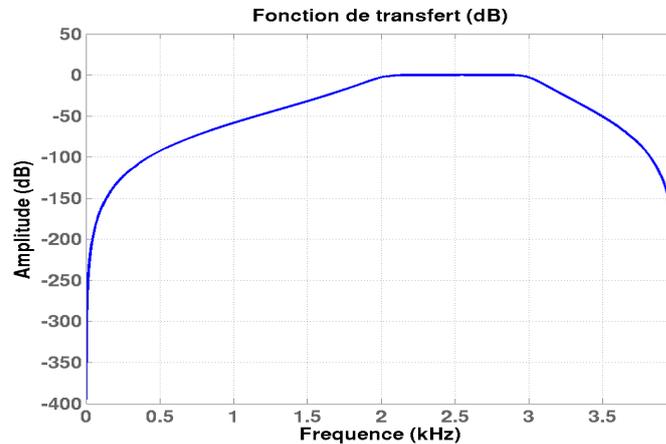


FIGURE 1.9.: Module de la fonction de transfert  $\omega \rightarrow |m(\omega)|$  (en logarithme) pour un filtre de passe-bande de Butterworth numérique d'ordre  $L = 10$ , sélectionnant une bande de fréquence entre  $\pi/2$  et  $3\pi/4$ .

Par exemple, dans le cas  $L = 2$ , on peut montrer que les (deux) racines complexes du dénominateur de la fonction de transfert  $H$  sont de la forme

$$z_0 = \frac{c^{1/2} - 1 - i\sqrt{2}c^{1/4}}{c^{1/2} + 1 + \sqrt{2}c^{1/4}}$$

$$z_1 = \frac{c^{1/2} - 1 + i\sqrt{2}c^{1/4}}{c^{1/2} + 1 + \sqrt{2}c^{1/4}}$$

(et sont donc complexes conjugués l'un de l'autre). On a représenté dans la FIG 1.8 les positions des pôles, c'est à dire des racines du dénominateur (croix) et des zéros (cercles) de  $H$  pour  $\omega_0 = \pi/3$ . Comme on peut le voir, les pôles sont bien à l'intérieur du disque unité.

On peut similairement obtenir des filtres de Butterworth passe-bande, par exemple des filtres sélectionnant une bande de fréquences donnée.

### 1.2.4. La transformation de Fourier en pratique : transformation de Fourier finie (TFF)

Les suites de longueur finie se prêtent au même type d'analyse que les suites infinies. On peut également leur associer une transformée de Fourier (qui est elle aussi une suite de longueur finie),

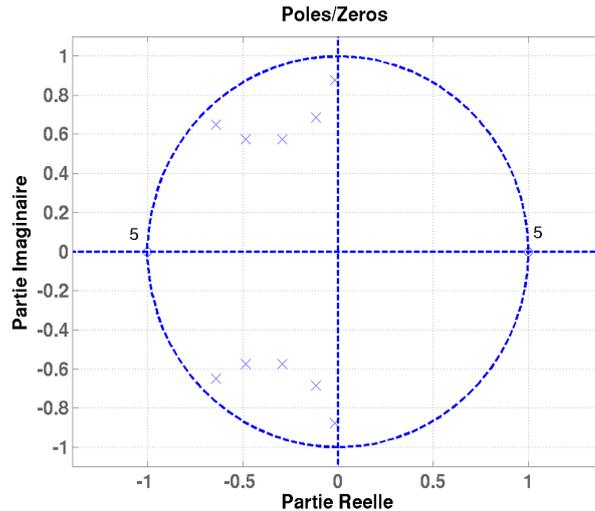


FIGURE 1.10.: Position dans le plan complexe des 2 zéros (d'ordre 5 chacun) et des 10 pôles de la fonction de transfert  $m$  pour un filtre passe-bande de Butterworth d'ordre 10, sélectionnant une bande de fréquences entre  $\pi/2$  et  $3\pi/4$ .

et la transformation correspondante est de nouveau une transformation unitaire (à une constante près). Plus précisément, à la suite finie  $u = \{u_n, n = 0 \dots N - 1\} \in \mathbb{C}^N$  on associe la suite  $\hat{u} = \{\hat{u}_k, k = 0, \dots, N - 1\} \in \mathbb{C}^N$ , définie par

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} . \tag{1.43}$$

C'est alors un jeu d'enfant que de montrer des propriétés analogues aux propriétés que nous avons déjà vues : formule de Parseval et inversion. De fait, on a

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{u}_k|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^2 , \tag{1.44}$$

et

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi \frac{kn}{N}} . \tag{1.45}$$

REMARQUE 1.11 En d'autres termes, ceci est équivalent à dire que la famille des vecteurs

$$e_k = \left( \frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi k/N}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi k(N-1)/N} \right) \tag{1.46}$$

est une base orthonormée de  $\mathbb{C}^N$ , et on a posé  $\hat{u}_k = \langle u, e_k \rangle / \sqrt{N}$ .

La relation plus précise entre la TFD et la TFF peut également se comprendre de la façon suivante, dans le cas des signaux de longueur finie.

PROPOSITION 1.10 Soit  $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , tel que  $f_n = 0$  pour tout  $n \notin \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Alors la transformée de Fourier discrète de  $f$  est complètement caractérisée par la TFF de  $\{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ , via la relation

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \frac{1 - e^{iN(\omega - 2\pi k/N)}}{1 - e^{i(\omega - 2\pi k/N)}} , \quad \omega \neq 2\pi k/N . \tag{1.47}$$

Preuve : La preuve résulte de la définition de la TFD, de l'expression des nombres  $f_n$  à partir des  $\hat{f}_k$  et de la somme de la série géométrique. ♠

Dans le cas où le signal considéré  $s$  n'est pas à support fini, il est néanmoins facile d'obtenir une estimation de sa transformée de Fourier à partir d'un "segment" fini, et des estimations d'erreur grâce à la formule de Parseval.

### 1.3. Filtrage et traitement de signaux numériques : quelques exemples

On s'intéresse ici à quelques exemples de problématiques de traitement des signaux numériques faisant intervenir les notions de filtrage.

#### 1.3.1. Une application du filtrage numérique : filtrage adapté

Le problème de détection optimale est un problème classique du traitement du signal. En quelques mots, on suppose que l'on dispose d'une observation (un signal) qui contient un signal connu (par exemple une impulsion radar envoyée par un émetteur), arrivant avec un décalage temporel  $\tau$  inconnu (par exemple après un trajet de durée inconnue) et une amplitude inconnue également. Le problème posé est de construire un filtre, qui sera optimal dans le sens suivant : le signal filtré devra être d'amplitude aussi faible que possible à tout instant différent de  $\tau$ , et maximale à l'instant  $\tau$ , afin de permettre l'estimation de  $\tau$ .

plus précisément, on suppose que l'on a un signal de référence connu  $s \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , et que l'on observe un signal  $x$  de la forme

$$x_n = As_{n-n_0} + b_n, \quad (1.48)$$

où  $A \in \mathbb{C}$  et  $n_0 \in \mathbb{Z}$  sont inconnus et à déterminer, et où  $b \in \ell^2(\mathbb{Z})$  est une perturbation (bruit, ou erreur de mesure), dont seul est connu le "spectre"

$$\mathcal{S}(\omega) = |\hat{b}(\omega)|^2.$$

Le problème est d'identifier  $A$  et  $n_0$  à partir de  $x$ , en utilisant des méthodes linéaires.

Pour cela, on considère une famille paramétrique de formes linéaires sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , notées  $\varphi_\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}$ , qui sont donc de la forme

$$\varphi_\tau(x) = \langle x, \gamma^\tau \rangle \quad (1.49)$$

pour une certaine fonction  $\gamma^\tau \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . On peut donc écrire

$$\varphi_\tau(x) = A\langle T_{n_0}s, \gamma^\tau \rangle + \langle b, \gamma^\tau \rangle.$$

On a ici introduit l'opérateur de translation  $T_{n_0}$ , défini par  $(T_{n_0}y)_n = y_{n-n_0}$ . On cherche alors à trouver la famille de fonctions  $\gamma^\tau$ , telle que pour tout  $n_0$ ,  $\langle T_{n_0}s, \gamma^{n_0} \rangle$  soit le plus grand possible (en module), tout en gardant le second terme (contribution du bruit) le plus petit possible.

Pour cela, calculons

$$\begin{aligned} \langle T_{n_0}s, \gamma^{n_0} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{T_{n_0}s}(\omega) \overline{\widehat{\gamma^{n_0}}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widehat{T_{n_0}s}(\omega)}{\sqrt{\mathcal{S}(\omega)}} \sqrt{\mathcal{S}(\omega)} \overline{\widehat{\gamma^{n_0}}(\omega)} d\omega, \end{aligned}$$

de sorte que l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne immédiatement

$$|\langle T_{n_0}s, \gamma^{n_0} \rangle| \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\widehat{T_{n_0}s}(\omega)|^2}{\mathcal{S}(\omega)} d\omega} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}(\omega) |\widehat{\gamma^{n_0}}(\omega)|^2 d\omega}.$$

Le second facteur donne en fait une estimation de la "taille" du bruit après calcul de  $\varphi_{n_0}(x)$ . On peut écrire

$$\frac{|\langle T_{n_0}s, \gamma^{n_0} \rangle|}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}(\omega) |\widehat{\gamma^{n_0}}(\omega)|^2 d\omega}} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\widehat{T_{n_0}s}(\omega)|^2}{\mathcal{S}(\omega)} d\omega}.$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si les deux facteurs sont proportionnels, c'est à dire si

$$\widehat{T_{n_0}s}(\omega) = K^{-1} \mathcal{S}(\omega) \widehat{\gamma^{n_0}}(\omega)$$

pour une certaine constante  $K$ , en d'autres termes, en supposant que la fonction  $\hat{s}/\mathcal{S}$  soit bornée,

$$\widehat{\gamma^{n_0}}(\omega) = K e^{-in_0\omega} \frac{\hat{s}(\omega)}{\mathcal{S}(\omega)}.$$

Donc, la famille de formes optimale (au sens de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)  $\{\varphi_\tau, \tau \in \mathbb{Z}\}$  est définie par

$$\varphi_\tau(y) = \langle y, \gamma^\tau \rangle = \frac{K}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} \frac{\widehat{s}(\omega)}{\mathcal{S}(\omega)} \widehat{y}(\omega) d\omega ,$$

ce qui définit un filtre numérique, de fonction de transfert

$$m : \omega \rightarrow m(\omega) = K \frac{\widehat{s}(\omega)}{\mathcal{S}(\omega)} .$$

On peut donc énoncer le résultat suivant.

**PROPOSITION 1.11** Soient  $s \in \ell^2(\mathbb{Z})$  et  $\mathcal{S} \in L^\infty([-\pi, \pi])$ , telles que la fonction

$$m : \omega \rightarrow m(\omega) = \frac{\widehat{s}(\omega)}{\mathcal{S}(\omega)} \tag{1.50}$$

soit bornée. Alors la famille de suites  $\{\gamma^\tau \in \ell^2(\mathbb{Z}), \tau \in \mathbb{Z}\}$  qui maximise pour tout  $n_0 \in \mathbb{Z}$  le rapport signal à bruit

$$\rho_{n_0} = \frac{|\langle T_{n_0}s, \gamma^{n_0} \rangle|}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}(\omega) |\widehat{\gamma^{n_0}}(\omega)|^2 d\omega}} \tag{1.51}$$

est nécessairement multiple de

$$\gamma_{n_0} : n \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n_0)\omega} m(\omega) d\omega = \gamma_0(n - n_0) .$$

Ainsi, la famille de transformations  $\varphi_\tau$  correspondante prend la forme d'un filtre numérique, de fonction de transfert  $m$  :

$$\varphi_\tau(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-\tau)\omega} m(\omega) \widehat{x}(\omega) d\omega .$$

Finalement, on montre aussi facilement que pour tout  $n_0 \in \mathbb{Z}$ ,

$$|\varphi_\tau(T_{n_0}x)| \leq |\varphi_{n_0}(T_{n_0}x)| .$$

Ceci qui suggère, en présence d'une observation de la forme (1.48) avec un  $n_0$  inconnu, de rechercher les maxima de  $\varphi_\tau(x)$  pour estimer  $n_0$ . Une fois  $n_0$  estimé, on peut alors obtenir une estimation de l'amplitude inconnue  $A$ .

Un exemple de filtrage adapté est donné en figure 1.11. Comme on le voit, le signal de sortie du filtre adapté présente un "pic", c'est à dire un maximum bien marqué à la position où le signal de départ décalé était présent.

### 1.3.2. Un exemple de problème inverse : la déconvolution

Il arrive fréquemment (c'est même la situation la plus courante) que les signaux, acquis à l'issue de mesures physiques, soient corrompus par un bruit de mesure, et/ou modifiés par une *réponse d'appareil*. Les observations sont alors de la forme

$$y = \Phi(x^{(0)}) + b ,$$

où  $b$  est un bruit additif (inconnu), et  $\Phi$  une transformation reflétant la mesure. Le problème est alors d'essayer de restaurer  $x$  à partir de l'observation  $y$  ; on parle de **problème inverse**.

$\Phi$  est souvent modélisé par un opérateur linéaire, on parle alors de problème inverse linéaire. On va considérer ici un cas particulier, dans lequel l'opérateur linéaire  $\Phi$  est un filtre numérique, c'est à dire un opérateur de convolution, de réponse impulsionnelle donnée  $h$ , et on supposera que la fonction de transfert  $\widehat{h}$  est bornée. Le modèle est donc

$$y = K_h x^{(0)} + b , \tag{1.52}$$

avec  $h$  donnée, telle que  $\widehat{h} \in L^\infty$ , et  $b$  est inconnu, mais supposé petit : on suppose

$$\|b\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \epsilon .$$

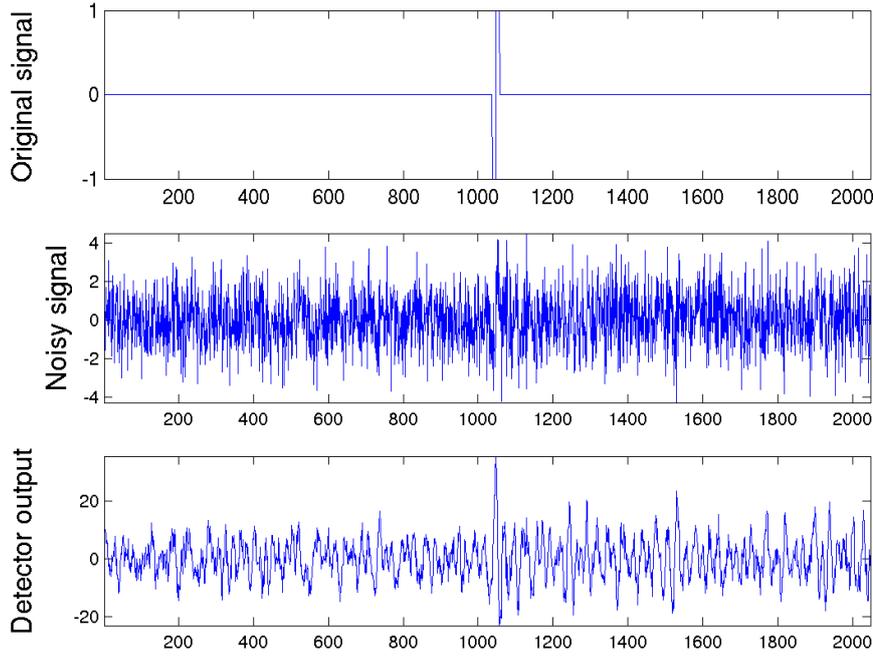


FIGURE 1.11.: Exemple de filtrage adapté. En haut, le signal original, au milieu le signal original bruité, en bas le signal de sortie du filtre adapté, qui présente un maximum bien marqué à la position du signal original.

Une formulation classique de ce problème est donnée par une formulation variationnelle, ici un problème de moindres carrés : le  $x$  est obtenu en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \ell^2(\mathbb{Z})} \|y - K_h x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 . \quad (1.53)$$

Supposons dans un premier temps que la fonction de transfert  $m = \hat{h}$  du filtre soit bornée inférieurement : plus précisément, on suppose qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|\hat{h}(\omega)| \geq \delta , \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi] . \quad (1.54)$$

Dans ce cas, il suffit d'écrire, grâce à la formule de Parseval

$$\|y - K_h x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 = \left\| \hat{y} - \hat{h} \hat{x} \right\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2$$

pour voir que ce problème admet une solution immédiate

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{h}(\omega)} , \quad (1.55)$$

en d'autres termes que la solution  $x$  s'obtient par filtrage de l'observation, par un filtre de fonction de transfert égale à  $1/\hat{h}$ . Remarquons que ce filtre n'est autre que l'inverse  $K_h^{-1}$  de l'opérateur linéaire  $K_h$ , inverse qui est donc continu  $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ .

En insérant cette solution dans le modèle (1.52), on obtient finalement une borne pour l'erreur

$$\|x - x^{(0)}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\hat{b}}{\hat{h}} \right\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2 \leq \frac{1}{2\pi\delta^2} \|\hat{b}\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2 ,$$

d'où

$$\|x - x^{(0)}\| \leq \frac{\epsilon}{\delta} .$$

Il est maintenant facile de voir que cette approche ne fonctionne plus quand  $|\hat{h}|$  n'est plus borné inférieurement par une constante  $\delta > 0$  : la solution  $\hat{x}$  précédente n'appartient plus nécessairement à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , signe que l'inverse  $K_h^{-1}$  de  $K_h$  n'est pas continu  $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ .

On a alors recours à une technique appelée **régularisation de Tikhonov**, qui force la solution à appartenir à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , en remplaçant le problème variationnel (1.53) par une variante

$$\min_{x \in \ell^2(\mathbb{Z})} \left[ \|y - K_h x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 + \lambda \|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 \right], \quad (1.56)$$

$\lambda > 0$  étant un paramètre permettant de régler l'importance relative des deux termes. Ce problème peut être résolu explicitement grâce de nouveau à la TFD. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|y - K_h x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 + \lambda \|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left[ |\hat{y}(\omega) - \hat{h}(\omega)\hat{x}(\omega)|^2 + \lambda |\hat{x}(\omega)|^2 \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \Re \int_{-2\pi}^{2\pi} \left[ |\hat{y}(\omega)|^2 - 2\bar{\hat{h}}(\omega)\hat{x}(\omega)\hat{y}(\omega) + (|\hat{h}(\omega)|^2 + \lambda)|\hat{x}(\omega)|^2 \right] d\omega \\ &= \|y\|^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{|\hat{y}(\omega)|^2}{|\hat{h}(\omega)|^2 + \lambda} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} (|\hat{h}(\omega)|^2 + \lambda) \left| \hat{x}(\omega) - \frac{\bar{\hat{h}}(\omega)\hat{y}(\omega)}{|\hat{h}(\omega)|^2 + \lambda} \right|^2 d\omega \end{aligned}$$

On voit facilement que la fonction  $\hat{x}$  qui minimise cette dernière expression est alors donnée par le résultat suivant, qui généralise le cas non-régularisé  $\lambda = 0$  :

**PROPOSITION 1.12** Soit  $h$  telle que  $\hat{h} \in L^\infty([-\pi, \pi])$ . Le problème variationnel (1.56) admet une solution unique, de la forme

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\bar{\hat{h}}(\omega)\hat{y}(\omega)}{|\hat{h}(\omega)|^2 + \lambda}.$$

Ainsi, la solution est encore une fois obtenue via un filtrage numérique de l'observation  $y$ , le filtre numérique correspondant ayant comme fonction de transfert

$$m(\omega) = \frac{\bar{\hat{h}}(\omega)}{|\hat{h}(\omega)|^2 + \lambda}$$

une version "régularisée" de la précédente  $1/\hat{h}$ , que l'on retrouve dans la limite  $\lambda \rightarrow 0$ .

**REMARQUE 1.12** Là encore, dans le cas général, la réponse impulsionnelle du filtre ainsi obtenu n'a aucune raison d'être à support fini, ni même causale, même lorsque  $h$  l'est. On doit donc recourir en pratique à des approximations par des filtres d'ordre fini.

## 1.4. Signaux numériques multidimensionnels

Nous nous sommes jusqu'à présent limités au cas des signaux unidimensionnels, en prenant principalement comme "inspiration" les signaux sonores. On a souvent à traiter des signaux de dimension supérieure, comme par exemple des images (dimension 2), des vidéos (dimension 2+1) ou même des signaux en bien plus grande dimension.

Un signal numérique  $d$ -dimensionnel est défini comme une suite à  $d$  indices

$$x : n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{Z} \rightarrow x_{n_1, n_2, \dots, n_d} \in \mathbb{C}.$$

Un exemple de signal bidimensionnel (image) est présenté en FIG. 1.12. L'axe horizontal est l'axe  $n_1$ , et l'axe vertical est l'axe  $n_2$ . Un point  $(n_1, n_2)$  est appelé *pixel*. La valeur de l'image  $x_{n_1, n_2}$  au pixel  $(n_1, n_2)$  est représentée par un niveau de gris d'intensité proportionnelle à  $x_{n_1, n_2}$ .



FIGURE 1.12.: Exemple d'images, en niveaux de gris

Comme dans le cas unidimensionnel, le modèle le plus classique est le modèle Hilbertien  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ , c'est à dire celui des signaux dits d'énergie finie, tels que

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} |x_{n_1, n_2, \dots, n_d}|^2 < \infty .$$

Une bonne part des techniques que nous avons vues jusqu'à présent se transposent aisément au cadre multidimensionnel, en particulier les outils liés à l'analyse de Fourier.

**DÉFINITION 1.5** *La transformation de Fourier discrète (TFD)  $d$ -dimensionnelle est la transformation linéaire qui associe à toute suite à  $d$  indices  $x$  la fonction de  $d$  variables réelles  $(2\pi)^d$ -périodique définie par*

$$\hat{x}(\xi_1, \dots, \xi_d) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} x_{n_1, n_2, \dots, n_d} e^{-i(n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + \dots + n_d \xi_d)} , \quad (1.57)$$

*pour toutes les valeurs de  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$  telles que cette série converge.*

La TFD  $d$ -dimensionnelle possède des propriétés en tous points similaires à celles de son analogue unidimensionnelle. En particulier, on voit facilement que  $\hat{x}$  est bien définie dès que  $x \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ . De même, la théorie  $L^2$  se transpose facilement

**THÉORÈME 1.5** *La TFD  $d$ -dimensionnelle définit une transformation unitaire (à une constante multiplicative près) bijective entre  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$  et l'espace des fonctions de module carré sommable sur le  $d$ -tore  $L^2([-\pi, \pi]^d)$ . La formule de Parseval s'écrit, pour tout  $x \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ,*

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} |\hat{x}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_d = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} |x_{n_1, n_2, \dots, n_d}|^2 . \quad (1.58)$$

*On a de plus la formule d'inversion*

$$x_{n_1, n_2, \dots, n_d} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{x}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) e^{i(n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + \dots + n_d \xi_d)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_d . \quad (1.59)$$

**REMARQUE 1.13** La transformée de Fourier discrète  $d$ -dimensionnelle d'un signal  $x$  est cette fois une fonction de  $d$  variables fréquentielles. Dans les cas  $d = 2$  ou  $d = 3$ , on parle de fréquence spatiale.

Pour fixer les idées, prenons le cas 2D. La représentation de Fourier représente un signal comme combinaison linéaire de sinusôides, oscillant à la fréquence  $\xi_1$  dans la direction 1, et  $\xi_2$  dans la direction 2. Comme dans le cas 1D, plus la fréquence est élevée, plus les oscillations sont rapides.

Le filtrage linéaire, que nous avons longuement étudiée dans le cas unidimensionnel, est l'opération fondamentale du traitement du signal. Il se généralise presque mot pour mot au cadre multidimensionnel.

Etant donnée une suite à  $d$  indices  $h$ , le filtre linéaire  $K_h$  de réponse impulsionnelle  $h$  est l'opérateur linéaire qui associe à tout signal numérique  $d$ -dimensionnel  $x$  le signal  $K_h x = h * x$  défini par

$$(K_h x)_{n_1, \dots, n_d} = \sum_{k_1, \dots, k_d} h_{k_1, \dots, k_d} x_{n_1 - k_1, \dots, n_d - k_d}, \quad (1.60)$$

pour tout  $d$ -uplet  $(n_1, \dots, n_d)$  tel que la série converge. De nouveau il est clair que si  $h \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ ,  $K_h x$  est borné dès que  $x$  l'est, et  $K_h x \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  dès que  $x \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ .

Le lien avec la TFD est le même que dans le cas unidimensionnel. Supposant pour simplifier  $h \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ , on montre facilement que

$$\widehat{K_h x}(\xi_1, \dots, \xi_d) = \hat{h}(\xi_1, \dots, \xi_d) \hat{x}(\xi_1, \dots, \xi_d) \quad (1.61)$$

de sorte que l'on peut exprimer le filtrage sous la forme

$$(K_h x)_{n_1, \dots, n_d} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} m(\xi_1, \dots, \xi_d) \hat{x}(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{i(n_1 \xi_1 + \dots + n_d \xi_d)} d\xi_1 \dots d\xi_d. \quad (1.62)$$

**Exemples de filtres bidimensionnels :** Pour illustrer ce que nous venons de voir, considérons le cas bidimensionnel.

1. L'exemple le plus simple est celui du filtrage passe-bas idéal, que l'on peut cette fois concevoir de deux façons différentes :
  - Filtrage "Cartésien", ou "tensoriel", dans lequel la fonction de transfert est le produit de deux fonctions de transferts unidimensionnelles :

$$m(\xi_1, \xi_2) = \chi_{[-\omega_0, \omega_0]}(\xi_1) \chi_{[-\omega_0, \omega_0]}(\xi_2).$$

Comme dans le cas 1D, ce filtre supprime le contenu de l'image aux fréquences dont soit la composante 1 soit la composante 2 est supérieure à une fréquence de coupure  $\omega_0$ . L'image est ainsi débarrassée de ses composantes rapidement variables, et apparaît donc plus floue que l'image originale, comme on peut le voir en FIG. 1.13.

Notons que ce filtrage tensoriel fait jouer un rôle prépondérant aux axes 1 et 2.

- Filtrage "radial". On évite dans ce cas de privilégier des axes, en choisissant une fonction de transfert de la forme

$$m(\xi_1, \xi_2) = \chi_{[0, \omega_0]}(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}).$$

2. Filtrage "passe haut" idéal. En définissant la fonction de transfert comme

$$m_{PH}(\xi_1, \xi_2) = 1 - m_{PB}(\xi_1, \xi_2),$$

où  $m_{PB}$  est l'une des deux fonctions de transfert de filtres passe-bas vue ci-dessus, on obtient un filtre passe haut, qui ne conserve dans les images que les composantes rapidement variables.

3. Filtres tensoriels : la technique du produit tensoriel permet de générer des filtres 2D à partir de filtres 1D. Soient  $m_1$  et  $m_2$  les fonctions de transfert de deux filtres 1D. On leur associe alors la fonction de transfert d'un filtre 2D comme suit :

$$m(\xi_1, \xi_2) = m_1(\xi_1) m_2(\xi_2).$$

On vérifie facilement que si  $m_1$  et  $m_2$  sont des fonctions de transfert de filtres passe bas,  $m$  définit aussi un filtre passe-bas. On peut de cette façon construire de multiples types de filtres.



FIGURE 1.13.: Image de la Figure 1.12, filtrée par filtrage passe-bas.

## 1.5. Représentation des signaux numériques

Nous nous sommes jusqu'à présent focalisés sur deux façons différentes de "représenter" des signaux numériques : la représentation temporelle (ou spatiale, dans les cas 2D ou 3D), où un signal est représenté par ses valeurs  $x_n$ , et la représentation fréquentielle, dans le domaine de la TFD.

Dans de nombreux domaines, on utilise maintenant d'autres types de représentations des signaux, exploitant l'analyse fonctionnelle élémentaire. L'idée est d'utiliser une modélisation des signaux comme éléments d'un espace de Hilbert (séparable), et les représenter par les coefficients de leur développement sur une base bien choisie.

### 1.5.1. Bases pour les signaux numériques

Les notions essentielles pour cette section sont rappelées dans l'Appendice A. On se focalise ici sur les bases orthonormales. Rappelons qu'une base orthonormale d'un espace de Hilbert  $H$  (aussi appelée Base Hilbertienne) est une famille orthonormale qui est complète dans  $H$ . Le cas de la dimension finie est bien connu. Si  $H$  est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, la famille orthonormale  $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est complète si pour tout  $x \in H$ , on a  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - \sum_{-N}^N \langle x, e_n \rangle e_n\| = 0$ . Une condition équivalente est qu'il n'existe pas de vecteur isotrope, c'est à dire  $\langle x, e_n \rangle = 0 \forall n$  implique  $x = 0$ .

On donne ci-dessous quelques exemples de bases "classiques".

#### Bases de Fourier en dimension finie et DCT

Le cas  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$  (ou  $\mathbb{R}^N$ ). On a vu dans la section 1.2.4 que les sinusoïdes  $e^k = (e_0^k, e_1^k, \dots, e_{N-1}^k) \in \mathbb{C}^N$ , où

$$e_n^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\{2i\pi kn/N\}$$

forment une base orthonormée de  $\mathbb{C}^N$ . Ces bases sont en fait peu utilisées en pratique, car les signaux sont souvent à valeurs réelles, et on préfère alors éviter de manipuler des nombres complexes.

On leur préfère alors les bases de  $\mathbb{R}^N$  appelées bases DCT (pour Discrete Cosine Transform). Ces dernières existent en huit versions différentes, les deux plus "populaires" étant :

– La **DCT-II**, définie par

$$e_n^0 = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1.63)$$

$$e_n^k = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos(\pi(k+1/2)n/N), \quad k \neq 0, n = 0, \dots, N-1. \quad (1.64)$$

– La **DCT-IV**, définie par

$$e_n^k = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos(\pi(k+1/2)(n+1/2)/N), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (1.65)$$

### Bases DCT locales en dimension finie

. Lorsque l'on doit représenter un long signal, par exemple une seconde de son (ce qui représente habituellement 44100 valeurs par seconde, ou maintenant 48000), on ne peut pas se permettre de travailler dans des espaces vectoriels de si grande dimension, et on les "coupe en morceaux" de la façon suivante.

Supposons que  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^{pN}$ , où  $p$  est un entier positif fixé. Le découpage consiste à écrire  $\mathcal{H}$  sous la forme de somme directe

$$\mathcal{H} = \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^N \quad p \text{ fois},$$

en d'autres termes représenter un signal  $x \in \mathbb{R}^{pN}$  par  $p$  signaux de longueur  $N$ . Ces derniers peuvent ensuite être représentés par leurs coefficients sur une base usuelle de  $\mathbb{R}^N$ .

Plus concrètement, soit  $\{e^0, e^1, \dots, e^{N-1}\}$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^N$ . Pour tout  $j = 0, \dots, p-1$ , soit  $\phi_{jk}$  la copie du vecteur  $e^k$  définie par décalage de  $kN$  :

$$\phi_n^{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin I_j \\ e_{n-jN}^k & \text{si } n \in I_j \end{cases}$$

où  $I_j$  est l'intervalle dans  $\mathbb{Z}$

$$I_j = \mathbb{Z} \cap [jN, (j+1)N - 1].$$

Soit  $x \in \mathbb{C}^{pN}$ . Pour  $j$  donné, notons  $x^{(j)}$  la restriction de  $x$  à l'intervalle  $I_j = \mathbb{Z} \cap [jN, (j+1)N - 1]$ , définie par

$$x_n^{(j)} = \begin{cases} x_n & \text{si } n \in I_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut alors écrire

$$x = \sum_{j=0}^{p-1} x^{(j)}.$$

Notons maintenant, pour  $j$  donné,  $u^{(j)}$  le vecteur de  $\mathbb{C}^N$  défini par

$$u_m^{(j)} = x_{m+jN}^{(j)}, \quad m = 0, \dots, N-1.$$

En décomposant  $u^{(j)}$  sur la base choisie de  $\mathbb{C}^N$ , on est amené à écrire  $u_m^{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} \langle u^{(j)}, e^k \rangle e_m^k$ , d'où

$$x_n^{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} \langle u^{(j)}, e^k \rangle e_{n-jN}^k (\mathbf{1}_{I_j})_n = \sum_{k=0}^{N-1} \langle u^{(j)}, e^k \rangle \phi_n^{jk}.$$

Maintenant, on voit facilement que

$$\langle u^{(j)}, e^k \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} u_m^{(j)} \bar{e}_m^k = \sum_{m=0}^{N-1} x_{m+jN}^{(j)} \bar{e}_m^k = \sum_{n=jN}^{(j+1)N-1} x_n^{(j)} \bar{e}_{n-jN}^k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n (\mathbf{1}_{I_j})_n \bar{e}_{n-jN}^k = \langle x, \phi^{jk} \rangle,$$

d'où on déduit

$$x = \sum_{j,k} \langle x, \phi^{jk} \rangle \phi^{jk}$$

On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^{pN}$

$$x = \sum_{j=0}^{p-1} x \mathbf{1}_{I_j} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \langle x, \phi^{jk} \rangle \phi^{jk}$$

$\mathbf{1}_I$  étant l'indicatrice d'un segment  $I$ , et on montre facilement que

$$\langle \phi^{jk}, \phi^{j'k'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'} ,$$

de sorte que  $\{\phi^{jk}, j = 0, \dots, p-1, k = 0 \dots N-1\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^{pN}$ .

### Bases de $\ell^2(\mathbb{Z})$

La base (orthonormale) de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  la plus "commune" est la base de Krönecker  $\{\delta^n, n \in \mathbb{Z}\}$ , définie par

$$\delta_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n . \end{cases}$$

Cette base n'est toutefois pas très pratique dans de nombreuses situations.

Dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , les fonctions exponentielles complexes intervenant dans les décompositions de Fourier des signaux numériques ne forment pas une base de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . En effet, ces fonctions ne sont pas elles mêmes de module carré sommable.

Pour obtenir des bases trigonométriques de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , il faut "localiser" ces fonctions, comme on l'a fait ci-dessus dans le cas de  $\mathbb{C}^{pN}$ . En considérant comme précédemment une base orthonormale  $\{e^0, e^1, \dots, e^{N-1}\}$  de  $\mathbb{C}^N$ , définissons pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et  $k = 0, \dots, N-1$  la suite  $\phi_n^{jk}$  par

$$\phi_n^{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin I_j \\ e_{n-jN}^k & \text{si } n \in I_j \end{cases} .$$

On obtient ainsi une généralisation de la base précédente.

**THÉORÈME 1.6** *La famille trigonométrique locale  $\{\phi^{jk}, j \in \mathbb{Z}, k = 0, \dots, N-1\}$  définie ci-dessus est une base orthonormée de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Donc, pour tout  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,*

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=-J}^J \sum_{k=0}^{N-1} \langle x, \phi^{jk} \rangle \phi^{jk} \right\|^2 = 0 .$$

Preuve : On montre facilement que la famille  $\{\phi^{jk}\}$  est orthonormée, reste donc à montrer qu'elle est complète. ♠

### Bases MDCT

Les bases ci-dessus peuvent être vues comme des bases obtenues en multipliant des sinusoides par une fenêtre rectangulaire, que l'on translate ensuite. Ce choix a le défaut majeur de produire des « effets de bloc », liées à la discontinuité des fenêtres rectangulaires. Ces dernières peuvent être remplacées par des fenêtres plus lisses (ce qui entraîne un recouvrement des trames consécutives), à condition de judicieusement choisir ces dernières. Plus précisément, il est possible de montrer le résultat suivant.

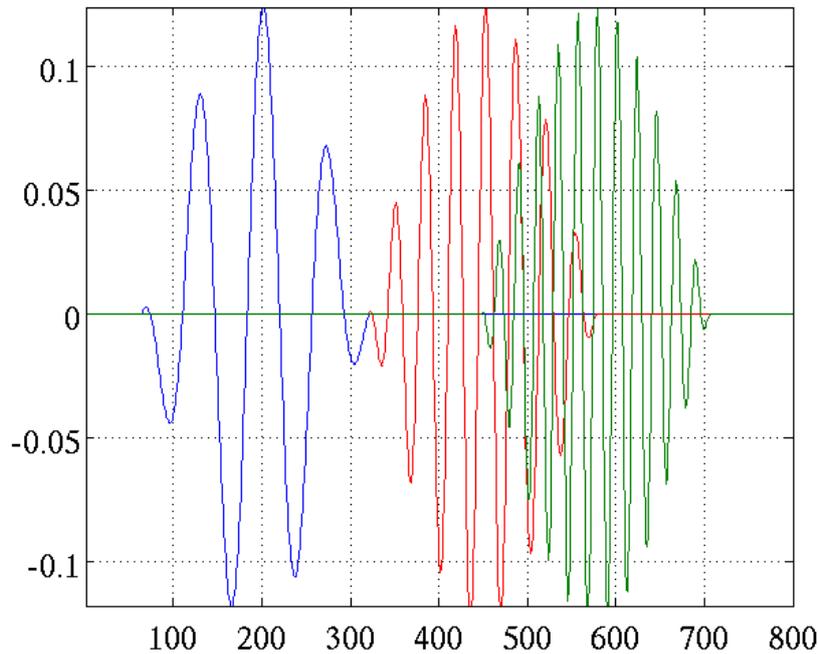


FIGURE 1.14.: Quelques exemples de fonctions de base MDCT (à chevauchement maximal :  $\eta = a/2$ ). De gauche à droite,  $(j, k) = (4, 1)$ ,  $(j, k) = (8, 3)$  et  $(j, k) = (12, 4)$ .

**THÉORÈME 1.7** Soit  $w \in \ell^2(\mathbb{Z})$  une fenêtre, c'est à dire une fonction à valeurs positives, à support compact. Supposons de plus qu'il existe deux entiers  $a$  et  $\eta$  tels que  $a \geq 2\eta$ , et que  $w$  vérifie

$$\begin{aligned} w_k &= 0 & \forall k \notin \{-\eta, \dots, a + \eta\} \\ w_k &= 1 & \forall k = \eta, \dots, a - \eta \\ w_{-k} &= w_k & \forall k = 0, \dots, \eta \\ w_k^2 + w_{-k}^2 &= 1 & \forall k = 0, \dots, \eta \end{aligned}$$

Alors la collection des fonctions  $\phi^{jk}$  définies par

$$\phi_n^{jk} = \sqrt{\frac{2}{a}} w_{n-ka} \cos\left(\pi(j+1/2)\frac{n-ka}{a}\right), \quad j \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}$$

est une base orthonormée de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

Cette base est appelée « base MDCT », ou « base trigonométrique locale ». On obtient de même des bases MDCT de  $\mathbb{R}^N$ , en modifiant légèrement les fenêtres sur les bords. Des exemples de fonction de base MDCT se trouvent en FIG. 1.14, où on peut notamment voir le chevauchement des fonctions de base (dans cet exemple, les fenêtres sont à chevauchement maximal, c'est à dire  $\eta = a/2$ ).

### 1.5.2. Exemple : le codeur d'images JPEG (tiré de l'article en ligne de l'encyclopédie Wikipedia)

JPEG est un acronyme signifiant *Joint Photographic Experts Group*. C'est un comité d'experts qui édite des normes de compression pour l'image fixe. La norme communément appelée JPEG, de son vrai nom ISO/IEC IS 10918-1 | ITU-T Recommendation T.81, est le résultat de l'évolution des travaux qui ont débuté dans les années 1978 à 1980 avec les premiers essais en laboratoire de compression d'images.

Le groupe JPEG qui a réuni une trentaine d'experts internationaux, a spécifié la norme en 1991.

Mais la norme officielle et définitive n'a été adoptée qu'en 1992. Pratiquement, seule la partie concernant le codage arithmétique est brevetée, et par conséquent protégée par IBM, son concepteur.

JPEG normalise uniquement l'algorithme et le format de décodage. Le processus d'encodage est laissé libre à la compétition des industriels et universitaires, du moment que l'image produite est décodable par un décodeur standard. La norme propose un jeu de fichiers de tests appelés fichiers de conformance qui permettent de vérifier qu'un décodeur respecte bien la norme. Un décodeur est alors dit conforme s'il est capable de décoder tous les fichiers de conformance.

JPEG définit deux classes de processus de compression :

- Compression avec pertes ou compression irréversible. C'est le JPEG « classique ». Il permet des taux de compression de 3 à 100.
- Compression sans pertes ou compression réversible. Il n'y a pas de pertes d'information et il est donc possible de revenir aux valeurs originales de l'image. Les gains en terme de compression sont alors plus modestes, avec un taux de compression de l'ordre de 2. Cette partie fait l'objet d'une norme spécifique JPEG-LS.

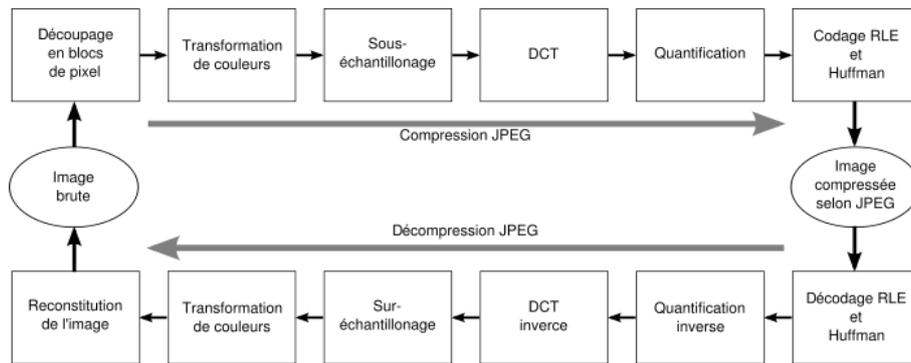


FIGURE 1.15.: Le codeur JPEG (d'après Wikipedia).

Les principales étapes du codage (et décodage), illustrées dans la FIG. 1.15 sont les suivantes :

- Découpage de l'image en "blocs", ou "imagelettes", généralement de 8 pixels sur 8 pixels.
- Transformation des couleurs : La transformation de couleurs est optionnelle. Elle consiste à passer de l'espace couleur de l'image d'origine (en général RVB, c'est à dire Rouge Vert Bleu) à l'espace couleur YUV (1 luminance, 2 chrominances) plus adapté pour la compression car les 3 composantes sont beaucoup moins corrélées.
- Sous-échantillonnage : La façon la plus simple d'exploiter la faible sensibilité de l'oeil à la chrominance est simplement de sous-échantillonner les signaux de chrominance, c'est à dire de réduire le nombre de pixels considérés. Généralement on utilise un sous-échantillonnage de type 2h1v ou 2h2v. Dans le premier cas (le plus utilisé) on a un sous-échantillonnage 1 : 1 horizontalement et 2 : 1 verticalement, dans le deuxième cas on a un sous-échantillonnage 2 : 1 horizontalement et verticalement. Ces sous-échantillonnages sont utilisés pour les chrominances, pour la luminance on n'utilise jamais de sous-échantillonnage.
- Transformation DCT : décomposition de chaque imagelette pré-traitée comme ci-dessus dans une base DCT bidimensionnelle. Ce sont les coefficients de la décomposition qui vont être effectivement codés. Dans chaque imagelette, on notera  $c(\nu_1, \nu_2)$  le coefficient DCT correspondant à la fréquence spatiale  $(\nu_1, \nu_2)$ .
- Quantification : La quantification est l'étape dans laquelle on perd réellement des informations (et donc de la qualité visuelle), mais c'est celle qui fait gagner beaucoup de place (contrairement à la DCT, qui ne compresse pas). La DCT a retourné, pour chaque bloc, une matrice de  $8 \times 8$  nombres (dans l'hypothèse que les blocs de l'image font  $8 \times 8$  pixels). La quantification consiste à diviser cette matrice par une autre, appelée matrice de quantification, et qui contient  $8 \times 8$  coefficients savamment choisis par le codeur. Le but est ici d'atténuer les hautes fréquences, c'est-à-dire celles auxquelles l'oeil humain est très peu sensible. Ces fréquences ont des amplitudes faibles, et elles sont encore plus atténuées par la quantification (les coefficients sont même ramenés à 0).

La formule donnant la quantification est

$$Q(\nu_1, \nu_2) = \left\lfloor \frac{c(\nu_1, \nu_2) + \lfloor w(\nu_1, \nu_2)/2 \rfloor}{w(\nu_1, \nu_2)} \right\rfloor ,$$

où  $\lfloor x \rfloor$  est la partie entière de l'entier  $x$ , et où  $w$  est une matrice de poids, fixée, qui caractérise le quantificateur.

- Codage : Le codage des imagettes s'effectue en zigzag comme on le montre en FIG. 1.16 et se termine par un caractère de fin. Le résultat est ensuite compressé selon un algorithme de codage par plages (qui code les valeurs nulles en utilisant seulement la longueur des "plages" de valeurs nulles), puis un codage entropique de type Huffman ou arithmétique, qui génère un flux de bits, de taille minimale, à partir des valeurs quantifiées.

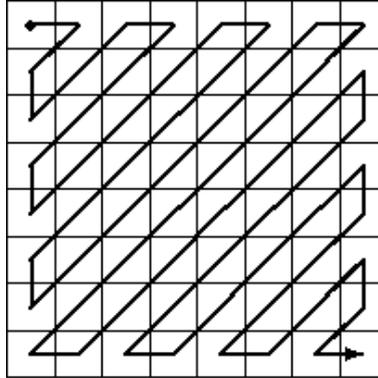


FIGURE 1.16.: Le codage en zig zag du codeur JPEG (d'après Wikipedia).

### 1.5.3. Repères

Il existe de nombreuses situations dans lesquelles les bases orthonormales que l'on sait construire ne sont pas bien adaptées aux traitements que l'on voudrait effectuer sur les signaux. En effet, les hypothèses d'orthonormalité sont souvent trop contraignantes, et ne permettent pas de générer des familles de signaux élémentaires sur lesquelles décomposer les signaux, qui possèdent les propriétés requises.

On peut alors avoir avantage à recourir à la notion de repère, décrite dans l'Annexe B. En quelques mots, les repères constituent une généralisation de la notion de famille génératrice de vecteurs, adaptable aux espaces de Hilbert de dimension infinie. Un repère dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est une famille de vecteurs  $\{\varphi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  telle qu'il existe deux constantes strictement positives  $0 < A \leq B < \infty$  vérifiant, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , la version "affaiblie" de l'identité de Parseval

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle x, \varphi_\lambda \rangle|^2 \leq B\|x\|^2 .$$

On montre facilement (voir l'Annexe B) que dans ces conditions, l'opérateur d'analyse

$$U : x \in \mathcal{H} \mapsto Ux = \{\langle x, \varphi_\lambda \rangle, \lambda \in \Lambda\} \in \ell^2(\Lambda)$$

est borné, et que son adjoint, l'opérateur de synthèse

$$U^* : c \in \ell^2(\Lambda) \mapsto U^*c = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \varphi_\lambda \in \mathcal{H}$$

l'est également, de sorte que l'opérateur de repère

$$\mathcal{R} : x \in \mathcal{H} \mapsto \mathcal{R}x = U^*Ux = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, \varphi_\lambda \rangle \varphi_\lambda \in \mathcal{H}$$

est borné, inversible à inverse borné. Par conséquent, tout  $x \in \mathcal{H}$  se décompose sous la forme

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, \varphi_\lambda \rangle \tilde{\varphi}_\lambda ,$$

où on a noté

$$\tilde{\varphi}_\lambda = \mathcal{R}^{-1}\varphi_\lambda .$$

De tels repères peuvent être utilisés pour représenter des signaux.

**EXEMPLE 1.6 Repères de Fourier à court terme finis :** Dans  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$  : soit  $g \in \mathbb{C}^N$ , tel que  $g \neq 0$  un signal de référence, normalisé de sorte que  $\|g\| = 1$ . On lui associe la famille d'**atomes de Gabor**, copies translattées et modulées de  $g$ , définies par

$$g^{k\ell} : n = 0, \dots, N-1 \rightarrow g_n^{k\ell} = e^{2i\pi kn/N} g_{n-\ell}, \quad k, \ell = 0, \dots, N-1,$$

où  $n - \ell$  est à prendre modulo  $N$  pour que ceci ait un sens.

On vérifie facilement que pour tout  $x \in \mathbb{C}^N$ , on a une formule de type “formule de Parseval”

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} |\langle x, g^{k\ell} \rangle|^2 = \|x\|^2,$$

de sorte que la famille  $\{g^{k\ell}, k, \ell = 0, \dots, N-1\}$  est un repère strict de  $\mathbb{C}^N$ .

Par conséquent, on peut donc écrire tout  $x \in \mathbb{C}^N$  sous la forme

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} G_x(k, \ell) g^{k\ell},$$

où les coefficients

$$G_x(k, \ell) = \langle x, g^{k\ell} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi kn/N} \bar{g}_{n-\ell}$$

forment la **transformée de Fourier à court terme** de  $x$ . Notons qu’il s’agit de la transformée de Fourier de  $x$ , multipliée par une copie translattée de  $\bar{g}$ . Ainsi, si  $g$  est localisée autour de  $n = 0$ ,  $G_x(\cdot, \ell)$  représente une transformée de Fourier d’une copie de  $x$ , que l’on a “localisée” au voisinage de  $n = \ell$ .

**EXEMPLE 1.7 Repères de Gabor finis :** Avec les mêmes notations que ci-dessus, on note cette fois

$$g^{k\ell} : n = 0, \dots, N-1 \rightarrow g_n^{k\ell} = e^{2i\pi kn\nu_0/N} g_{n-\ell b_0}, \quad k = 0, \dots, N/\nu_0 - 1, \ell = 0, \dots, N/b_0 - 1,$$

où  $b_0$  et  $\nu_0$  sont deux entiers positifs, diviseurs de  $N$ . Il est possible de montrer que pour un choix convenable de  $g$ ,  $b_0$  et  $\nu_0$ , la famille  $\{g^{k\ell}\}$  forme un repère de  $\mathbb{C}^N$ . Les coefficients

$$G_x(k, \ell) = \langle x, g^{k\ell} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi kn\nu_0/N} \bar{g}_{n-\ell b_0}$$

forment la **transformée de Gabor** correspondante, qui est inversible.

Un exemple de transformée de Gabor d’un signal audio (un extrait d’une chanson de Norah Jones, comprenant une montée harmonique de piano, que l’on peut clairement identifier comme la succession de “tâches rouges montantes” sur l’image), représentée par une image, se trouve à la FIG. 1.17.

**EXEMPLE 1.8** Il est possible de développer une version de la transformation de Gabor adaptée aux signaux numériques infinis  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Elle est cependant un peu plus complexe. Elle se base sur des atomes de Gabor de la forme

$$g_n^{k\ell} = e^{2i\pi k\nu_0 n} g_{n-\ell b_0},$$

et comme précédemment requiert un choix convenable de la fenêtre  $g$ , ainsi que des pas d’échantillonnage temporels et fréquentiels  $b_0$  et  $\nu_0$ .

**EXEMPLE 1.9** Les bases MDCT vues plus haut sont couramment utilisées dans le domaine du codage des signaux audio (parole, musique,...). Ceci étant, le paramètre  $a$  qui règle la taille des fenêtres utilisées pour la construction de ces bases est parfois difficile à choisir. En effet, les signaux d’intérêt contiennent généralement des composantes pour lesquelles différents choix de ce paramètre seraient souhaitables. Une alternative est alors de recourir à un repère formé de l’union de deux (ou plus) bases MDCT, chacune avec son propre choix de paramètre.

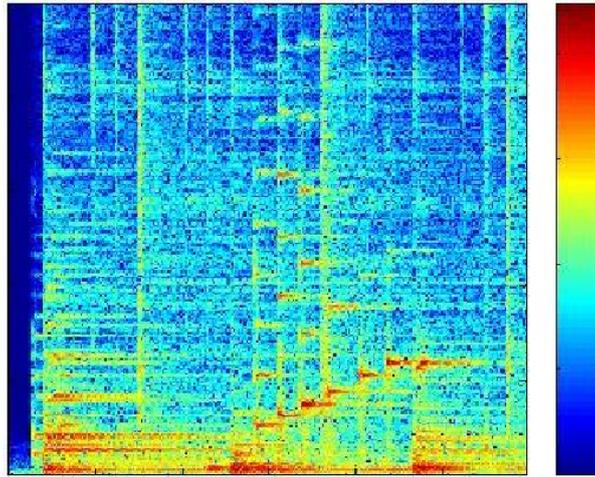


FIGURE 1.17.: Transformée de Gabor d'un extrait d'une chanson de Norah Jones, codée en couleurs. L'axe horizontal est l'axe temporel, et l'axe vertical est l'axe fréquentiel. On peut clairement identifier la montée harmonique du piano, ainsi que les attaques des notes.

## 1.6. Problème inverse

Le domaine du problème inverse correspond à une famille de problématiques dans lesquelles les signaux ne sont pas observés directement, mais au travers d'une certaine transformation (supposée connue), qui engendre généralement une perte d'information. On formalise cette situation sous la forme

$$y = \Phi(x) + b, \quad (1.66)$$

où  $b$  est un bruit additif (inconnu), représentant par exemple les incertitudes de mesure, et  $\Phi$  une transformation reflétant la mesure.  $\Phi$  est souvent modélisé par un opérateur linéaire. Le problème de dé-bruitage suppose que  $\Phi$  est l'identité, et on cherche alors à restaurer à partir de l'observation  $y$  un signal aussi proche que possible de  $x$ , en faisant des hypothèses sur le bruit  $b$ . Dans le problème inverse,  $\Phi$  n'est plus supposé trivial, mais est généralement non-inversible, ou son inversion pose problème, en particulier en présence de bruit. Le problème inverse consiste donc à essayer d'estimer le signal d'intérêt  $x$  à partir de l'observation bruitée  $y$ . Une première idée simple est de transformer le problème en un problème de moindres carrés, c'est à dire de rechercher des solutions  $x$  en minimisant l'erreur en moyenne quadratique

$$\min_x \|y - \Phi(x)\|^2. \quad (1.67)$$

Lorsque la transformation  $\Phi$  est linéaire, la solution est connue et prend une forme relativement simple, comme on va le voir en dimension finie.

### Le cas de dimension finie

Supposons donc que les signaux considérés soient de longueur finie.  $x, y \in \mathbb{C}^N$ , et  $\Phi$  est une matrice  $N \times N$ . Le problème d'optimisation se résout donc en utilisant les techniques classiques, et cherchant les points critiques. Calculons donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \|y - \Phi x\|^2 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left| \sum_{\ell=0}^{N-1} \left( y_\ell - \sum_{\ell'=0}^{N-1} \Phi_{\ell\ell'} x_{\ell'} \right) \right|^2 \\ &= 2 \sum_{\ell=0}^{N-1} \bar{\Phi}_{\ell k} \left( y_\ell - \sum_{\ell'=0}^{N-1} \Phi_{\ell\ell'} x_{\ell'} \right) \\ &= 2 [(\Phi^* y)_k - (\Phi^* \Phi x)_k], \end{aligned}$$

où  $\Phi^*$  est la matrice adjointe de  $\Phi$  (définie par  $\Phi_{k\ell}^* = \overline{\Phi_{\ell k}}$ ). Ainsi, les points critiques  $x$  sont les solutions de l'**équation normale**

$$\Phi^* \Phi x = \Phi^* y . \quad (1.68)$$

Si on suppose que  $\Phi^* \Phi$  est inversible, on peut introduire la **pseudo-inverse**  $\Phi^\dagger$  de  $\Phi$

$$\Phi^\dagger = (\Phi^* \Phi)^{-1} \Phi^*$$

et la solution prend la forme

$$x = \Phi^\dagger y .$$

REMARQUE 1.14 Dans le cas de grandes dimensions (pour  $N$  très grand), les opérations matricielles peuvent poser problème (inverser une matrice peut devenir compliqué dès que  $N$  dépasse quelques milliers). Ces opérations matricielles peuvent être évitées en recourant à un algorithme itératif d'inversion. Dans le monde du problème inverse, l'algorithme de Landweber, basé sur l'itération suivante

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} + \alpha \Phi^* (y - \Phi x^{(n)}) ,$$

est assez couramment utilisé, et converge dès que  $\alpha$  est suffisamment petit. En outre, lorsque la matrice  $\Phi^* \Phi$  est mal conditionnée, cet algorithme ne converge pas, mais on utilise parfois en pratique une solution approchée, obtenue après quelques itérations seulement de cet algorithme.

### Cas général

La solution obtenue dans le cadre de dimension finie précédent se généralise à la dimension infinie, par exemple au cadre de signaux  $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Il est toutefois nécessaire d'utiliser une technique de démonstration différente

PROPOSITION 1.13 Soit  $\Phi$  un opérateur linéaire, tel que  $(\Phi^* \Phi)$  soit inversible, et soit  $\Phi^\dagger$  l'opérateur linéaire défini par

$$\Phi^\dagger = (\Phi^* \Phi)^{-1} \Phi^* , \quad (1.69)$$

(où  $\Phi^*$  est l'adjoint de  $\Phi$ ) appelé **pseudo-inverse** de  $\Phi$ . La solution du problème inverse (1.67) est donnée par

$$x = \Phi^\dagger y , \quad (1.70)$$

Cette solution ne fait donc sens que lorsque  $\Phi^* \Phi$  est inversible, et bien conditionnée (c'est à dire lorsque le rapport de sa plus grande valeur propre à sa plus petite n'est pas trop grand).

Malheureusement, même dans les cas les plus simples (à savoir  $\Phi$  linéaire) il arrive fréquemment que la pseudo-inverse  $\Phi^\dagger$  ne soit pas bornée, ce qui signifie qu'une petite incertitude  $b$  sur la mesure de  $y$  peut provoquer une énorme imprécision sur l'estimation de  $x$ . On dit alors que le problème inverse est mal posé. Pour pallier ce problème, on procède alors à une opération appelée « régularisation », qui vise à réduire l'influence éventuelle du bruit.

### Régularisation

Toujours dans le cadre de l'estimation par moindres carrés, une solution classique revient à remplacer le problème (1.67) par problème voisin, de la forme

$$\min_x [\|y - \Phi(x)\|^2 + C(x)] , \quad (1.71)$$

où la fonction  $C$  est choisie de sorte à imposer que la solution soit bornée (et peut également être utilisée pour introduire des informations *a priori* supplémentaires sur la solution si on dispose de telles informations).

Le choix  $C(x) = \|\Gamma x\|^2$ , où  $\Gamma$  est un opérateur linéaire fixé par l'utilisateur, est un choix assez naturel, et est un cas particulier de ce que l'on appelle **régularisation de Tikhonov**.

PROPOSITION 1.14 Soit  $\Gamma$  un opérateur linéaire, tel que  $\Phi^* \Phi + \Gamma^* \Gamma$  soit inversible à inverse borné. Alors la solution du problème de moindres carrés régularisé (1.71) est donnée par

$$x = (\Phi^* \Phi + \Gamma^* \Gamma)^{-1} \Phi^* y . \quad (1.72)$$

En pratique, on choisit souvent pour  $\Gamma$  un multiple de l'opérateur identité, ce qui a le mérite de permettre le contrôle de la norme de la solution.

REMARQUE 1.15 En dimension finie, il existe de nombreux algorithmes permettant de résoudre ce type de problème, parmi lesquels les algorithmes itératifs sont assez populaires car très simples. Par exemple, lorsque  $C(x) = \mu\|x\|^2$ , il est possible de démontrer qu'une itération de Landweber amortie

$$x^{(n)} = \frac{1}{1 + \mu} \left( x^{(n-1)} + \alpha \Phi^*(y - \Phi x^{(n)}) \right)$$

converge vers la solution du problème, pour peu que le paramètre  $\alpha$  soit assez petit. Plus généralement, sous certaines hypothèses sur la fonctionnelle  $C$ , un algorithme itératif similaire peut être développé.



On a souvent recours à des modèles de signaux faisant intervenir des quantités aléatoires. On peut trouver à cela deux justifications essentielles :

- La nécessité de modéliser des classes relativement larges de signaux, regroupés par certaines propriétés génériques : par exemple, des signaux audiophoniques, le signal de parole, des images...
- Le besoin de modéliser divers types de “bruits” (bruits de mesure par exemple), généralement difficilement contrôlables.

Le cadre mathématique adapté à cette situation est celui des processus aléatoires. L’objectif de ce court chapitre est d’aboutir à la représentation spectrale des processus stationnaires (puis à la représentation de Karhunen-Loève dans un cadre plus général), afin d’être en position d’utiliser les outils développés aux chapitres précédents.

On verra en particulier que les opérations de base, telles que le filtrage de convolution, peuvent être bien définies dans ce cadre aussi, et qu’elles ont la même signification physique. On verra également quelques exemples d’application, notamment en dé-bruitage de signaux, en détection, ou encore en problème inverse.

## 2.1. Définitions, propriétés simples

Dans cette section on désignera par  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On note par  $\mathcal{L}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{L}^0(\mathcal{A}, \mathbb{P})$  l’espace des variables aléatoires sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs réelles ou complexes. Etant données deux variables aléatoires  $X, Y \in \mathcal{L}^0(\mathcal{A})$ , on dit que  $X \sim Y$  si  $X = Y$  presque sûrement. Ceci définit une relation d’équivalence, et on note

$$L^0(\mathcal{A}) = \mathcal{L}^0(\mathcal{A}) / \sim$$

l’espace quotient, c’est à dire l’espace des variables aléatoires différentes presque sûrement. Etant donnée une variable aléatoire  $X \in L^0$ , on en notera  $\mathbb{E}\{X\}$  l’espérance.

### 2.1.1. Premières définitions

Un signal aléatoire est en fait un processus stochastique, indexé par un espace discret ou continu. Plus précisément :

**DÉFINITION 2.1** Soit  $T \subset \mathbb{R}$  une partie (continue ou discrète) de  $\mathbb{R}$ . On appelle signal aléatoire indexé par  $T$  à valeurs réelles ou complexes une application

$$t \in T \rightarrow X_t \in L^0(\mathcal{A}). \quad (2.1)$$

Etant donné  $a \in \mathcal{A}$ , l’application  $t \rightarrow X_t(a)$  est appelée trajectoire du signal aléatoire.

Un signal aléatoire sera aussi appelé processus aléatoire, processus stochastique, ou série chronologique. On introduit de même des signaux aléatoires multidimensionnels (pour lesquels  $T$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$ ), mais on se limitera ici au cas unidimensionnel.

**DÉFINITION 2.2** Etant donné un signal aléatoire  $\{X_t, t \in T\}$ , et  $n$  valeurs  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$ .  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est une variable aléatoire vectorielle. L’ensemble des distributions de toutes ces variables forme le système de lois marginales du processus.

Un théorème célèbre de Kolmogorov (le théorème d'extension qui porte son nom) montre que la connaissance du système de lois marginales est suffisante pour caractériser la distribution du processus.

### 2.1.2. Exemples

Les exemples suivants donnent une idée de la variété des situations que l'on peut rencontrer.

**EXEMPLE 2.1** L'exemple le plus simple est celui d'un bruit blanc discret. On considère pour cela une famille  $\{W_0, \dots, W_{N-1}\}$  de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, par exemple  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Il s'agit d'un signal aléatoire indexé par  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ , que l'on appelle bruit blanc discret Gaussien. Ce bruit blanc joue un rôle fondamental aussi bien sur le plan mathématique que pour les applications pratiques. En effet, tous les générateurs de nombres pseudo-aléatoires disponibles sur les ordinateurs proposent des générateurs de bruit blanc, qui peut ensuite être modifié pour obtenir d'autres types de signaux aléatoires.

**EXEMPLE 2.2** Partant de l'exemple précédent, et étant donnée une suite finie  $\{h_0, h_1, \dots, h_{N-1}\}$ , on peut former la suite  $\{X_0, \dots, X_{N-1}\}$  définie par le produit de convolution circulaire

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n W_{(k-n) \bmod N}$$

On a alors par exemple  $\mathbb{E}\{X_n\} = 0$  pour tout  $n$ , et aussi

$$\mathbb{E}\{X_k X_\ell\} = \sum_n h_n h_{((k-\ell)+n) \bmod N}$$

**EXEMPLE 2.3** Plus généralement encore, étant donné un bruit blanc Gaussien comme ci-dessus, et en notant  $\mathbf{X}$  le vecteur colonne correspondant, on considère une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , et on introduit le vecteur aléatoire

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X}.$$

Il est alors facile de voir que  $\mathbf{Y}$  définit un signal aléatoire du second ordre  $\{Y_0, \dots, Y_{N-1}\}$ , centré ( $\mathbb{E}\{Y_n\} = 0$  pour tout  $n$ ). De plus, à l'ordre 2, on a

$$\mathbb{E}\{Y_k Y_\ell\} = \sum_{m,n} A_{km} A_{\ell n} \mathbb{E}\{X_m X_n\} = \sum_{m,n} A_{km} A_{\ell n} \delta_{mn} = \sum_m A_{km} A_{m\ell}^T = (AA^T)_{k\ell},$$

$A^T$  étant la transposée de  $A$ . Notons que  $AA^T$  est une matrice symétrique semi-définie positive. Nous verrons plus loin l'intérêt de cette remarque.

**EXEMPLE 2.4** On s'intéressera également à des signaux à temps continu, c'est à dire au cas où  $T$  n'est pas dénombrable. Prenons par exemple  $T = \mathbb{R}^+$ , et introduisons les temps  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$ . Soient  $Z_0, Z_1, \dots$  une suite de variables aléatoires sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ; on peut alors introduire le processus "à sauts"  $X$  défini par

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \chi_{[t_n, t_{n+1})}(t). \tag{2.2}$$

$X$  est bien un signal aléatoire sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ; ses trajectoires sont des fonctions constantes par morceaux, généralement discontinues (voir la notion de continuité presque sûre des trajectoires plus bas).

**EXEMPLE 2.5** Un signal harmonique est un processus défini sur  $\mathbb{R}^+$ , de la forme

$$X_t = A e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi), \tag{2.3}$$

où  $A, \omega$  et  $\tau$  sont des constantes, et où  $\varphi$  est une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0, 2\pi]$ .  $X$  est aussi un signal aléatoire sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , indexé par  $\mathbb{R}^+$ .

En fait, on peut mettre l'accent sur deux classes de processus particulièrement intéressantes, car basées sur des hypothèses simplificatrices relativement réalistes dans de nombreux cas pratiques.

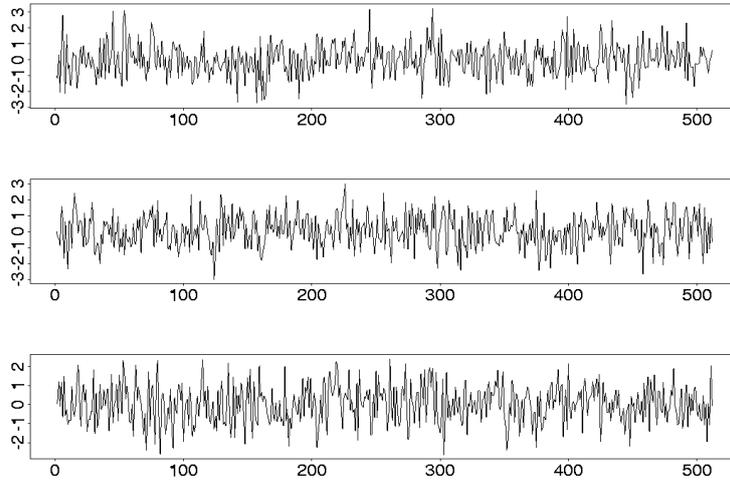


FIGURE 2.1.: 3 trajectoires de bruit blanc.

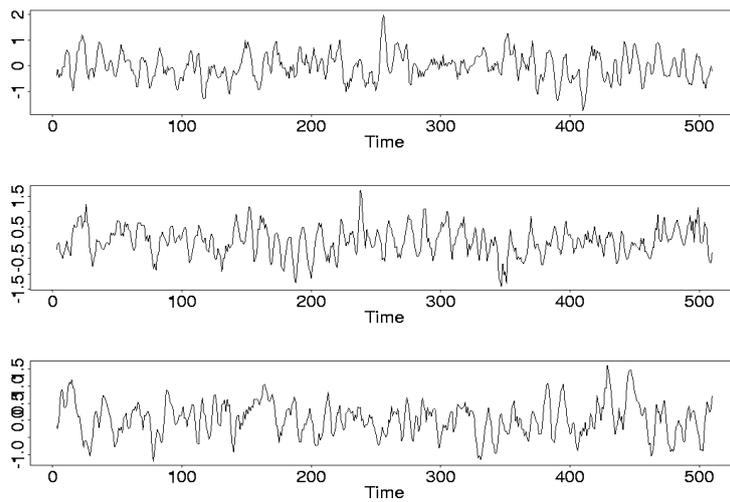


FIGURE 2.2.: 3 trajectoires de bruit blanc filtré (filtrage passe-bas).

1. Processus à accroissements indépendants : ce sont les processus tels que pour tous temps  $t_1 < t_2 < \dots < t_M$ , la famille de variables aléatoires  $\{X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_M} - X_{t_{M-1}}\}$  soit une famille de variables aléatoires indépendantes. On verra plus loin un exemple avec le processus de Wiener.
2. Processus Gaussiens : toutes les mesures de probabilités du système de lois marginales sont Gaussiennes.

Notons que ces deux hypothèses ne sont pas exclusives (voir l'exemple du processus de Wiener). L'hypothèse de "Gaussianité" est particulièrement utile, car elle permet de caractériser les distributions de probabilités par leurs moments d'ordre 1 et 2.

### 2.1.3. Signaux aléatoires du second ordre

On se limitera dans ce cours au cas des signaux aléatoires du second ordre c'est à dire des processus tels que leur covariance est bien définie.

**DÉFINITION 2.3** 1. Un signal aléatoire  $\{X_t, t \in T\}$  est dit du second ordre si pour tout  $t \in T$ , on a  $\mathbb{E}\{|X_t|^2\} < \infty$ . Il est uniformément du second ordre si la fonction  $t \rightarrow \mathbb{E}\{|X_t|^2\}$  est bornée.

2. Lorsque  $T$  est un ensemble continu, un signal aléatoire du second ordre est dit continu en moyenne d'ordre 2 si pour tout  $t \in T$ ,  $\mathbb{E}\{|X_{t+\delta} - X_t|^2\} \rightarrow 0$  quand  $\delta \rightarrow 0$ .

**REMARQUE 2.1** Soit  $X \in L^0(\mathbb{P})$ , telle que  $\mathbb{E}\{|X|^2\} < \infty$ . Alors il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\mathbb{E}\{|X|\} = \int |X(a)| d\mathbb{P}(a) \leq \sqrt{\int |X(a)|^2 d\mathbb{P}(a)} < \infty .$$

Par conséquent, étant donné un signal aléatoire du second ordre  $X$ , on peut introduire sa moyenne

$$\mu_t = \mathbb{E}\{X_t\} . \tag{2.4}$$

On introduit également la covariance du processus

$$C_X(t, s) = \mathbb{E}\{(X_t - \mu_t)(\overline{X_s} - \overline{\mu_s})\} = R_X(t, s) - \mu_t \overline{\mu_s} , \tag{2.5}$$

où

$$R_X(t, s) = \mathbb{E}\{X_t \overline{X_s}\} \tag{2.6}$$

est l'autocorrélation. On a (de nouveau comme conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), pour tous  $t, s \in T$

$$|R_X(t, s)| \leq \sqrt{|R_X(t, t)|} \sqrt{|R_X(s, s)|} ,$$

et de même pour  $C_X$ . Ces deux fonctions vérifient en outre la propriété suivante

**PROPOSITION 2.1** Les fonctions  $C_X$  et  $R_X$  sont semi-définies positives.

On rappelle qu'une fonction de deux variables  $F$  est semi-définie positive si pour tous  $t_1, \dots, t_n \in T$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ , on a

$$\sum_{k, \ell=1}^n \alpha_k \overline{\alpha_\ell} F(t_k, t_\ell) \geq 0 , \tag{2.7}$$

en d'autres termes si la matrice  $n \times n$   $\{F(t_k, t_\ell), k, \ell = 1, \dots, n\}$  est semi-définie positive pour tous  $t_1, \dots, t_n$ . Elle est définie positive lorsque l'inégalité est stricte.

*Preuve de la proposition :* Il suffit de le prouver pour  $R_X$  (la preuve pour  $C_X$  est identique). On a

$$\sum_{k, \ell=1}^n \alpha_k \overline{\alpha_\ell} R_X(t_k, t_\ell) = \sum_{k, \ell=1}^n \alpha_k \overline{\alpha_\ell} \mathbb{E}\{X_{t_k} \overline{X_{t_\ell}}\} = \mathbb{E}\left\{\left|\sum_{k=1}^n \alpha_k X_{t_k}\right|^2\right\} \geq 0 .$$



Les variables aléatoires  $X$  sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  telles que  $\mathbb{E}\{|X|^2\} < \infty$  engendrent un espace linéaire, noté  $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Soit  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$  l'espace quotient de  $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$  dans lequel on a identifié les variables aléatoires égales presque sûrement.  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$  est naturellement muni d'un produit scalaire défini par

$$(X|Y) = \mathbb{E}\{X\bar{Y}\}, \quad (2.8)$$

qui en fait un espace de Hilbert. Etant donné un signal aléatoire du second ordre  $\{X_t, t \in T\}$ , supposé centré (c'est à dire tel que  $\mathbb{E}\{X_t\} = 0$  pour tout  $t$ ), on notera  $\mathcal{M}_X$  le sous espace fermé de  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$  engendré par les variables aléatoires  $X_t, t \in T$ .

## 2.2. Signaux aléatoires numériques

On se limitera ici au cas des processus du second ordre, indexés par  $\mathbb{Z}$ . Soit donc  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  un processus du second ordre sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , de moyenne  $\mu_X(n) = \mathbb{E}\{X_n\}$  et de fonction de corrélation  $R_X$ .

**DÉFINITION 2.4** Soit  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  un signal numérique aléatoire du second ordre de longueur infinie.  $X$  est dit stationnaire en moyenne d'ordre deux si ses statistiques d'ordre un et deux sont invariantes par translation, c'est à dire si

$$\mu_X(n) = \mu_X(0) := \mu_X, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.9)$$

$$R_X(n + \tau, m + \tau) = R_X(n, m) := R_X(n - m), \quad \forall n, m, \tau \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

Il est facile de vérifier que si  $X$  est stationnaire en moyenne d'ordre deux, on a aussi

$$C_X(n + \tau, m + \tau) = C_X(n, m) := C_X(n - m), \quad \forall n, m, \tau \in \mathbb{Z}$$

Notons que dans ce cas, on a

$$|R_X(n)| \leq R_X(0),$$

et de même pour  $C_X$ .

**REMARQUE 2.2** Notons qu'un signal aléatoire du second ordre, stationnaire en m.o.d., est nécessairement uniformément du second ordre.

On utilise parfois la notion de processus stationnaire au sens fort (ou strict) : de tels processus sont tels que leur distribution est invariante par translation. De telles hypothèses sont toutefois souvent trop restrictives, et la stationnarité *faible* (c'est à dire en moyenne d'ordre deux) est généralement suffisante.

### 2.2.1. Filtrage de convolution de signaux stationnaires en m.o.d.

Le filtrage de convolution est une opération naturelle pour les signaux du second ordre.

**LEMME 2.1** Soit  $X$  un signal aléatoire uniformément du second ordre, et soit  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . Alors  $Y = h * X$  défini par

$$Y_n = (K_h X)_n = \sum_k h_k X_{n-k}.$$

est lui aussi uniformément du second ordre.

En effet, calculons

$$\mathbb{E}\{|Y_n|^2\} = \sum_{k,\ell} h_k \bar{h}_\ell C_X(n-k, n-\ell) \leq \sum_{k,\ell} |h_k| |h_\ell| |C_X(n-k, n-\ell)| \leq K \|h\|_1^2,$$

pour une certaine constante  $K$ . ♠

Supposons maintenant que  $X$  soit stationnaire en moyenne d'ordre deux. Alors le lemme ci-dessus s'applique directement. De plus, on a

$$\mu_Y(n) = \sum_k h_k \mu_X(n-k) = (h * \mu_X)(n) = \mu_X \sum_k h_k = \mu_Y(0),$$

et

$$C_Y(n, m) = \sum_{k, \ell} h_k \bar{h}_\ell C_X(n - k, m - \ell) = \sum_{k, \ell} h_k \bar{h}_\ell C_X(n - k - m + \ell) = C_Y(n - m) .$$

Ainsi,  $Y$  est également stationnaire en moyenne d'ordre deux.

**PROPOSITION 2.2** *Soit  $X$  un signal aléatoire du second ordre, stationnaire en moyenne d'ordre deux, et soit  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . Alors  $Y = h * X$  est lui aussi du second ordre et stationnaire en moyenne d'ordre deux.*

### 2.2.2. Mesure spectrale et densité spectrale pour les processus stationnaires en m.o.d.

Soit donc  $X$  un processus stationnaire en m.o.d., que l'on suppose centré pour simplifier. Si tel n'est pas le cas, on peut toujours écrire  $X = Y + \mu_X$  et travailler sur le signal aléatoire centré  $Y$ . En corollaire de ce qui précède, la covariance  $C_X$  est une suite semi-définie positive : pour tous  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ , on a

$$\sum_{k, \ell=1}^N \alpha_k \bar{\alpha}_\ell F(n_k - n_\ell) \geq 0 . \quad (2.11)$$

Un résultat général d'analyse fonctionnelle permet d'introduire la mesure spectrale de  $X$  :

**THÉORÈME 2.1 (HERGLOTZ)** *Soit  $\phi$  une suite semi-définie positive. Alors il existe une unique mesure non-négative sur  $[-\pi, \pi]$  telle que pour tout  $n$ , on ait*

$$\phi(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} d\nu(\omega) . \quad (2.12)$$

Preuve : Commençons par calculer la quantité suivante (qui est toujours positive ou nulle), pour  $\omega \in [-\pi, \pi]$

$$\sum_{j, k=1}^N \phi(j - k) e^{-i\omega(j-k)} = \sum_{n=1-N}^{N-1} \phi(n) e^{-i\omega n} (N - |n|) ,$$

et posons

$$\gamma_N(\omega) = \sum_{n=1-N}^{N-1} \phi(n) e^{-i\omega n} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) .$$

Il est clair que  $\gamma_N(\omega) \geq 0$  pour tout  $\omega$ , et que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \gamma_N(\omega) d\omega = 2\pi \phi(0) .$$

Soient  $d\nu_N$  les mesures définies par

$$d\nu_N(\omega) = \gamma_N(\omega) d\omega .$$

Il s'agit de mesures bornées, définies sur un domaine compact. Par conséquent, il est possible d'extraire une sous-suite  $d\nu_{N_k}$  qui converge faiblement vers une limite  $d\nu$  (c'est le théorème de Helly, ou Helly-Nikodym) : pour toute fonction bornée et continue  $f$  sur  $[-\pi, \pi]$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\nu_{N_k}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\nu(\omega) .$$

De plus, pour tout  $m$  tel que  $|m| \leq N_k$ , on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\omega} d\nu_{N_k}(\omega) = \left(1 - \frac{|m|}{N_k}\right) \phi(m) \longrightarrow \phi(m) \text{ pour } k \rightarrow \infty .$$

Par définition de la convergence faible, on en déduit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\omega} d\nu_{N_k}(\omega) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\omega} d\nu(\omega) \text{ pour } k \rightarrow \infty ,$$

ce qui prouve l'existence de  $\nu$ .

Pour ce qui est de l'unicité : soient  $\nu$  et  $\nu'$  deux limites ; soit  $g \in C([-\pi, \pi])$  ; on sait que toute fonction continue est arbitrairement bien approximée par les polynômes trigonométriques ;  $\nu$  et  $\nu'$  coïncidant sur les polynômes trigonométriques, on a bien

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\omega) d\nu(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\omega) d\nu'(\omega) ,$$

pour tout  $g \in C([-\pi, \pi])$ , ce qui prouve que  $\nu' = \nu$ , et donc l'unicité. ♠

En appliquant ce résultat à la covariance d'un signal aléatoire du second ordre stationnaire en moyenne d'ordre deux, on obtient la représentation spectrale suivante (parfois appelée théorème de Wiener-Khintchin, ou théorème de Wold) :

**COROLLAIRE 2.1 (WIENER-KHINTCHIN)** Soit  $X$  un signal numérique aléatoire du second ordre, centré et stationnaire en moyenne d'ordre deux. Il existe une unique mesure  $\nu_X$ , appelée mesure spectrale de  $X$ , telle que pour tout  $n$  on ait

$$C_X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} d\nu_X(\omega) . \tag{2.13}$$

La mesure spectrale  $\nu_X$  n'est pas nécessairement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Si c'est le cas, on peut alors écrire

$$d\nu_X(\omega) = S_X(\omega) d\omega ,$$

où  $S_X \in L^\infty([-\pi, \pi])$  est appelé *densité spectrale* de  $X$ .

### 2.2.3. Quelques exemples

1. L'exemple le plus simple est celui du bruit blanc Gaussien : les variables aléatoires  $X_n$  sont des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ . On a alors  $\mu_X = 0$  et  $C_X(m, n) = \sigma^2 \delta_{mn}$ , et  $X$  est stationnaire en m.o.d. L'unicité de la mesure spectrale montre facilement que

$$d\nu_X(\omega) = \sigma^2 d\omega ,$$

d'où  $X$  admet une densité spectrale  $S_X$  constante. Ceci explique la terminologie : un bruit blanc est un signal qui "contient" toutes les fréquences en égale quantité (par analogie avec la lumière blanche).

2. Bruit blanc filtré (signal MA, pour moyenne mobile, ou *moving average*) : si  $X$  est le bruit blanc précédent, et si  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , on a déjà vu que  $Y = K_h X$  est toujours un processus du second ordre, stationnaire en m.o.d. Un calcul simple montre que  $Y$  admet une densité spectrale  $S_Y$  de la forme

$$S_Y(\omega) = |\hat{h}(\omega)|^2 .$$

En effet, partant de  $C_Y(n) = \sum_{k, \ell} h_k \bar{h}_\ell C_X(n - k + \ell)$ , on en déduit pour ce cas particulier

$$C_Y(n) = \sum_{k, \ell} h_k \bar{h}_\ell \delta_{n-k+\ell} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k, \ell} h_k \bar{h}_\ell e^{i(n-k+\ell)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{h}(\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega$$

ce qui prouve le résultat.

Plus généralement, si  $X$  est un signal aléatoire du second ordre centré, stationnaire en moyenne d'ordre deux, de densité spectrale  $S_X$ , alors le même calcul montre que  $Y$  est lui aussi du second ordre, centré et stationnaire en m.o.d., et tel que

$$S_Y(\omega) = |\hat{h}(\omega)|^2 S_X(\omega) .$$

Ainsi, comme dans le cas des signaux déterministes, un filtrage de convolution revient à "modérer" le contenu en fréquences d'un signal.

3. Signal AR (auto-régressif) : Soit  $X$  un bruit blanc Gaussien comme ci-dessus, et soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_N$  des nombres complexes. Si il existe un processus  $Y$  solution de

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k Y_{n-k} = X_n,$$

alors  $Y$  est stationnaire en moyenne d'ordre deux, et admet une densité spectrale de la forme

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{|\sum_k \alpha_k e^{-ik\omega}|^2}.$$

On verra plus loin une condition suffisante pour l'existence d'un tel  $Y$ . On peut d'ores et déjà deviner que la position des racines complexes du polynôme trigonométrique présent au dénominateur de  $S_Y$  jouera un rôle important.

4. Signal ARMA (auto-régressif à moyenne mobile) : Soit  $X$  un bruit blanc Gaussien comme ci-dessus, et soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_N$  des nombres complexes. Si il existe un processus  $Y$  solution de

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k Y_{n-k} = \sum_{\ell=0}^M \beta_\ell X_{n-\ell},$$

alors  $Y$  est stationnaire en moyenne d'ordre deux, et admet une densité spectrale de la forme

$$S_Y(\omega) = \frac{|\sum_\ell \beta_\ell e^{-i\ell\omega}|^2}{|\sum_k \alpha_k e^{-ik\omega}|^2}.$$

5. Signal harmonique : On considère une variable aléatoire uniforme  $\phi$  sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  (donc, de densité de probabilités  $\rho_\phi(\alpha) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\alpha)/2\pi$ ), et on lui associe le signal aléatoire  $X$  défini par

$$X_n = A e^{i(n\omega_0 + \phi)},$$

où  $A \in \mathbb{C}$  et  $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$  sont deux constantes. Il est facile de vérifier que  $X$  est du second ordre ( $\mathbb{E}\{|X_n|^2\} = |A|^2$  pour tout  $n$ ) et centré. De plus,

$$\mathbb{E}\{X_n \overline{X_m}\} = |A|^2 e^{i\omega_0(n-m)},$$

de sorte que  $X$  est stationnaire en moyenne d'ordre deux. Finalement, on a

$$C_X(n) = |A|^2 e^{in\omega_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} d\nu_X(\omega),$$

d'où on déduit que la mesure spectrale de  $X$  n'est autre que la mesure de Dirac  $\delta_{\omega_0}$  en  $\omega_0$ , à un facteur  $2\pi|A|^2$  près. Les signaux harmoniques fournissent l'exemple le plus simple de signaux aléatoires stationnaires en moyenne d'ordre deux ne possédant pas de densité spectrale.

6. Des exemples de spectres de signaux réels se trouvent en Figure 2.3. On y voit notamment deux spectres de signaux d'une note isolée (un la) jouée au saxophone et à la clarinette, et un spectre d'un enregistrement d'une chanson indienne. On voit que les spectres de notes isolées présentent une structure particulière (les ingénieurs parlent de *spectre de raies*), faisant penser que le signal correspondant pourra être bien modélisé comme un signal stationnaire en moyenne d'ordre deux, avec une mesure spectrale singulière. Le troisième exemple quant à lui (le spectre estimé à partir d'un enregistrement d'une chanson indienne interprétée par Susheela Raman) plus proche d'une mesure spectrale absolument continue.

### 2.2.4. Le cas fini ; application à la simulation de processus stationnaires en m.o.d.

La théorème de Wiener-Khinchin fournit une *représentation spectrale* pour la fonction d'autocovariance des signaux aléatoires stationnaires en moyenne d'ordre deux. La question suivante est : pouvons nous obtenir une représentation similaire (de type "Fourier") pour les signaux aléatoires eux mêmes ?

Nous allons voir dans la section suivante un tel théorème de représentation spectrale pour les signaux numériques infinis. Il est utile, pour motiver cette discussion, de faire une parenthèse avec le cas des signaux numériques aléatoires de longueur finie. Il est tout d'abord nécessaire d'adapter la définition de stationnarité à cette situation. Il faut pour cela tenir compte des conditions aux bords, que l'on suppose ici périodiques.

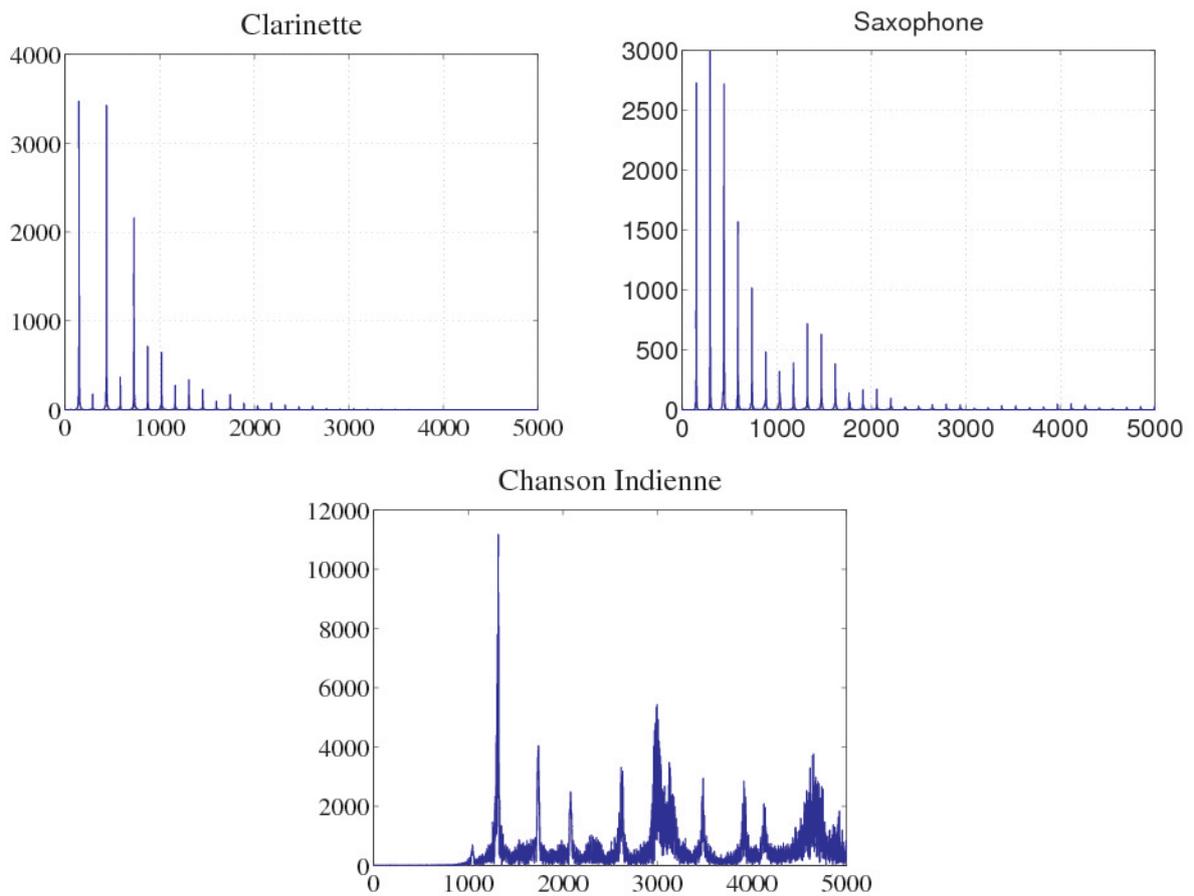


FIGURE 2.3.: Spectres de signaux audio : notes isolées d'instruments à vent : clarinette (gauche) et saxophone (haut, droite), et extrait d'une chanson indienne (bas).

**DÉFINITION 2.5** Soit  $X = \{X_n, n = 0, \dots, N-1\}$  un signal numérique aléatoire du second ordre de longueur  $N$ .  $X$  est stationnaire en moyenne d'ordre deux si

$$\mu_X(n) = \mu_X(0) := \mu_X, \quad \forall n = 0, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

et

$$R_X((n+\tau) \bmod N, (m+\tau) \bmod N) = R_X(n, m) := R_X((n-m) \bmod N), \quad \forall n, m, \tau \quad (2.15)$$

Dans ce cas, on a aussi

$$C_X((n+\tau) \bmod N, (m+\tau) \bmod N) = C_X(n, m) := C_X((n-m) \bmod N), \quad \forall n, m, \tau.$$

Soit  $X$  un tel signal aléatoire, que l'on suppose de plus centré. Soit  $C_X$  son autocovariance, et soit  $\mathcal{S}_X$  le vecteur défini par

$$\mathcal{S}_X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} C_X(n) e^{-2i\pi kn/N}. \quad (2.16)$$

On considère la transformée de Fourier finie de  $X$  : le vecteur aléatoire  $\{\hat{X}_0, \dots, \hat{X}_{N-1}\}$ , défini par

$$\hat{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-2i\pi kn/N}. \quad (2.17)$$

Soit  $C_X$  son autocovariance. Un calcul simple montre que

$$\mathbb{E} \{ \hat{X}_k \} = 0, \quad \forall k = 0, \dots, N-1,$$

et que

$$\mathbb{E} \{ \hat{X}_k \bar{\hat{X}}_\ell \} = N \mathcal{S}_X(k) \delta_{k\ell}.$$

Les composantes de  $\hat{X}$  sont donc décorréelées. Utilisant la transformée de Fourier finie inverse, on peut alors écrire

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi kn/N} Y_k, \quad (2.18)$$

où les variables aléatoires

$$Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{X}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-2i\pi kn/N} \quad (2.19)$$

sont décorréelées :

$$\mathbb{E} \{ Y_k \bar{Y}_\ell \} = \mathcal{S}_X(k) \delta_{k\ell}. \quad (2.20)$$

La représentation (2.18) porte parfois le nom de *représentation de Cramèr* en dimension finie.

**Application à la simulation numérique de signaux aléatoires stationnaires :** Lorsque l'on souhaite simuler numériquement un signal aléatoire, on se place *de facto* dans une situation de dimension finie. Les ordinateurs proposent généralement des générateurs de nombres pseudo-aléatoires (par exemple, les fonctions de type `rand` sous UNIX), capables de fournir des séquences de nombres aléatoires aussi proches que possible de vecteurs identiquement distribués et décorrélés. Dans ces conditions, si on souhaite générer une réalisation d'un signal stationnaire en moyenne d'ordre deux, de spectre  $\mathcal{S}_X$  donné, on peut procéder comme suit : on génère tout d'abord une séquence de nombres pseudo-aléatoires  $\{W_0, W_1, \dots, W_{N-1}\}$ , qui sont tels que

$$\mathbb{E} \{ X_k \} = 0, \quad \mathbb{E} \{ W_k \bar{W}_\ell \} = \delta_{k\ell},$$

puis on exploite la représentation de Cramèr en formant

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi kn/N} \sqrt{\mathcal{S}_X(k)} W_k;$$

il est alors facile de vérifier que  $\mathbb{E}\{X_n\} = 0$  pour tout  $n$ , et que

$$C_X(n-m) = \mathbb{E}\{X_n \overline{X_m}\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k) e^{2i\pi k(n-m)/N},$$

ce qui est bien le résultat recherché.

### 2.2.5. Représentation spectrale pour les processus stationnaires en moyenne d'ordre deux

Les sections précédentes nous ont donné une représentation spectrale (i.e. de type "Fourier") pour la covariance d'un signal numérique aléatoire stationnaire. La covariance est un objet déterministe. Nous allons maintenant obtenir une représentation spectrale pour le processus lui-même.

On note  $\mathcal{M}_X \subset L^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$  le sous-espace de  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$  engendré par les variables aléatoires  $X_k$ . Soit  $\psi$  l'application linéaire de  $\mathcal{M}_X$  dans  $L^2([-\pi, \pi], d\nu_X)$  définie par

$$\psi(X_k) = \epsilon_k : \omega \rightarrow e^{ik\omega}.$$

Il est clair que  $\epsilon_k \in L^2([-\pi, \pi], d\nu_X)$ . De plus, on a

$$\langle \epsilon_k, \epsilon_\ell \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-\ell)} d\nu_X(\omega) = 2\pi C_X(k-\ell) = 2\pi \langle X_k | X_\ell \rangle.$$

Ainsi,  $\psi/\sqrt{2\pi}$  s'étend à une isométrie de  $\mathcal{M}_X$  sur  $L^2([-\pi, \pi], d\nu_X)$ . Une remarque importante est que  $L^2([-\pi, \pi], d\nu_X)$  est quant à lui engendré par les fonctions  $\epsilon_k$ . Ainsi, l'application  $\psi/\sqrt{2\pi}$  établit une isométrie bijective

$$\mathcal{M}_X \leftrightarrow L^2([-\pi, \pi], d\nu_X).$$

Soit maintenant  $A \subset [-\pi, \pi]$  un Borélien, et soit  $\chi_A$  l'indicatrice de  $A$ . A  $\chi_A$  correspond une variable aléatoire  $Z_A \in \mathcal{M}_X$ , telle que

$$\mathbb{E}\{Z_A \overline{Z_B}\} = \langle Z_A | Z_B \rangle = \frac{1}{2\pi} \nu_X(A \cap B).$$

Ceci s'étend par linéarité aux fonctions simples de la forme  $\sum_{k=1}^K \alpha_k^K \chi_{A_k^K}$  où les  $A_k$  sont des Boréliens de  $[-\pi, \pi]$ . On a  $\psi^{-1}(\sum_{k=1}^K \alpha_k^K \chi_{A_k^K}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k^K Z_{A_k^K}$ . Finalement, on sait que toute fonction  $\varphi \in L^2(d\nu_X)$  s'écrit comme limite de telles fonctions simples. Le résultat suivant montre que cette limite a également un sens dans  $\mathcal{M}_X$ .

**THÉORÈME 2.2 (CRAMÈR)** Soit  $\varphi \in L^2(d\nu_X)$ , et considérons une suite de fonctions simples de la forme  $\sum_{k=1}^K \alpha_k^K \chi_{A_k^K}$ , telle que  $\lim_{K \rightarrow \infty} \|\varphi - \sum_{k=1}^K \alpha_k^K \chi_{A_k^K}\| = 0$ . La suite de variables aléatoires  $\sum_{k=1}^K \alpha_k^K Z_{A_k^K}$  converge presque sûrement vers une limite notée

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \alpha_k^K Z_{A_k^K} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) dZ(\omega), \quad (2.21)$$

et la limite est indépendante de la suite approximante.

En appliquant ce résultat au cas particulier  $\varphi = \epsilon_k$ , on obtient la représentation spectrale suivante :

**COROLLAIRE 2.2** On a pour tout  $k$

$$X_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} dZ(\omega). \quad (2.22)$$

Ce résultat est précisément le résultat auquel on pouvait s'attendre sur la base de la représentation de Cramèr en dimension finie : le passage d'un vecteur à une suite infinie oblige à passer d'un espace de fréquences fini à un espace infini continu (l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ ).

**Remarque :** L'objet que l'on a noté  $dZ(\omega)$  peut être étudié de façon rigoureuse. Il est utile de noter l'utilisation "formelle" qu'en font les ingénieurs :  $dZ(\omega)$  est traité comme une "mesure aléatoire", telle que

$$\mathbb{E} \{dZ(\omega)\} = 0 ,$$

et

$$\mathbb{E} \left\{ dZ(\omega) \overline{dZ(\omega')} \right\} = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \omega') d\nu_X(\omega) .$$

Cette convention de notation permet notamment de retrouver facilement les propriétés d'isométrie, par exemple, pour toutes  $\varphi, \varphi' \in L^2([-\pi, \pi], d\nu_X)$ , on écrira formellement

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ Z(\varphi) \overline{Z(\varphi')} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) dZ(\omega) \overline{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\omega') dZ(\omega')} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) \overline{\varphi'(\omega)} d\nu_X(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \varphi, \varphi' \rangle . \end{aligned}$$

### 2.2.6. Filtrage numérique

On a vu plus haut l'exemple des filtres de convolution, définis par une réponse impulsionnelle  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . On voit ici le cas plus général de filtres définis par leur fonction de transfert.

Soit  $m$  une fonction  $2\pi$ -périodique bornée, que l'on appellera fonction de transfert. Pour tout un signal numérique aléatoire du second ordre  $X$ , centré et stationnaire en moyenne d'ordre deux, auquel on a associé la mesure  $dZ$ , on considère l'application  $Z'$ , qui à toute fonction  $\varphi \in L^2([-\pi, \pi], d\nu_X)$  associe

$$Z'(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) dZ'(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} m(\omega) \varphi(\omega) dZ(\omega) .$$

$Z'$  définit un nouveau signal aléatoire  $Y$ , par

$$Y_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} m(\omega) dZ(\omega) .$$

On vérifie facilement que  $Y$  est lui aussi un signal numérique aléatoire du second ordre, centré, stationnaire en moyenne d'ordre deux, et de mesure spectrale

$$d\nu_Y(\omega) = |m(\omega)|^2 d\nu_X(\omega) .$$

L'opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$  ainsi défini est un filtre numérique.

### 2.2.7. Retour sur les signaux AR

L'existence de la représentation spectrale permet de montrer, sous certaines conditions, l'existence de solutions aux équations de récursion comme

$$\sum_{k=0}^N a_k Y_{n-k} = X_n , \tag{2.23}$$

où  $X$  est un bruit blanc, et les  $a_k$  sont des nombres complexes, sujets à certaines conditions.

**PROPOSITION 2.3** Soit  $A$  la transformée en  $z$  de la suite  $\{a_k, k = 0, \dots, N\}$ . Si les racines de  $A$  se trouvent à l'intérieur du disque unité dans le plan complexe, alors l'équation (2.23) admet une solution, qui est causale dans le sens suivant :

$$\mathbb{E} \{ Y_k \overline{X_\ell} \} = 0 , \quad \forall \ell > k . \tag{2.24}$$

*Preuve :* Sous les hypothèses ci-dessus, on note  $dZ_X$  la mesure spectrale de  $X$ . Pour cela, on considère donc  $A$ , la transformée en  $z$  de la suite  $\{a_k\}$ .  $A$  est donc un polynôme de degré  $N$  en  $z^{-1}$ .

Si on suppose que les racines de  $A$  se trouvent à l'intérieur du disque unité ouvert, la transformée de Fourier discrète  $\hat{a}$  de  $a$  ne s'annule jamais, de sorte que la fonction

$$\hat{b} : \omega \rightarrow \hat{b}(\omega) = \frac{1}{\hat{a}(\omega)}$$

est bornée et donc de carré intégrable ; elle admet une série de Fourier

$$\frac{1}{\hat{a}(\omega)} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega} ,$$

où la suite  $b = \{b_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Le fait que les racines de  $A$  se trouvent toutes à l'intérieur du disque unité implique que la suite  $b$  est causale :

$$b_k = 0 \quad \forall k < 0 .$$

On considère maintenant le signal aléatoire  $Y$  défini par

$$Y_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\omega}}{\hat{a}(\omega)} dZ_X(\omega) .$$

On peut alors écrire

$$Y_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k X_{n-k} ,$$

de sorte que l'on a bien la propriété requise

$$\mathbb{E} \{Y_n \overline{X_m}\} = b_{n-m} = 0 \quad \forall m > n .$$

REMARQUE 2.3 Ceci exprime donc un signal AR sous la forme d'un bruit blanc, filtré à l'aide d'un filtre (IIR, causal) dont la fonction de transfert ne possède pas de zéro, mais est caractérisée par ses  $N$  pôles (on parle alors de **filtre tout-pôles**).

## 2.3. Quelques exemples d'application

On s'intéresse ici à quelques problèmes classiques de traitement du signal, faisant intervenir des modèles de signaux aléatoires stationnaires en moyenne d'ordre deux.

### 2.3.1. Filtrage optimal et détection

Le problème posé est le suivant : soit  $s \in \ell^2(\mathbb{Z})$  un signal déterministe, supposé connu, et soit  $X$  un signal aléatoire du second ordre, centré et stationnaire en m.o.d., admettant une densité spectrale  $S_X$  supposée connue elle aussi. On dispose d'observations de la forme

$$Y_n = s_n + X_n ,$$

et on cherche à construire un filtre numérique  $T$ , de fonction de transfert  $m$ , tel que pour un certain  $n = n_0$  fixé, le rapport

$$\rho = \frac{(Ts)_{n_0}}{\sqrt{\mathbb{E} \{|(TX)_{n_0}|^2\}}}$$

soit maximal. Cette dernière quantité est appelée *rapport signal à bruit*, et mesure effectivement l'importance relative du signal et du bruit en sortie du filtre. Le résultat est donné par

PROPOSITION 2.4 *Sous les hypothèses ci-dessus, supposant que  $\hat{s}/\sqrt{S_X} \in L^2([-\pi, \pi])$  et que  $\hat{s}/S_X \in L^\infty([-\pi, \pi])$ , la fonction de transfert du filtre optimal est donnée par*

$$m(\omega) = C \frac{\overline{\hat{s}}(\omega)}{S_X(\omega)} e^{-in_0\omega} , \tag{2.25}$$

où  $C \in \mathbb{C}$  est une constante non nulle arbitraire.

Preuve : partant de

$$(Ts)_{n_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_0\omega} m(\omega) \hat{s}(\omega) d\omega$$

et

$$\mathbb{E} \{ |(TX)_n|^2 \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |m(\omega)|^2 \mathcal{S}_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \|m\sqrt{\mathcal{S}_X}\|^2,$$

on écrit, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |(Ts)_{n_0}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_0\omega} \frac{\bar{\hat{s}}(\omega)}{\sqrt{\mathcal{S}_X(\omega)}} \sqrt{\mathcal{S}_X(\omega)} m(\omega) d\omega \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\hat{s}}{\sqrt{\mathcal{S}_X}} \right\| \|m\sqrt{\mathcal{S}_X}\|, \end{aligned}$$

d'où on déduit la valeur optimale pour le rapport signal à bruit

$$\rho \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \frac{\hat{s}}{\sqrt{\mathcal{S}_X}} \right\|.$$

Finalement, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si il existe une constante  $C$  telle que

$$m(\omega) \sqrt{\mathcal{S}_X(\omega)} = C e^{-in_0\omega} \frac{\bar{\hat{s}}(\omega)}{\sqrt{\mathcal{S}_X(\omega)}},$$

qui donne (2.25). ♠

On doit en particulier remarquer que

$$|(Ts)_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n_0)\omega} \frac{|\hat{s}(\omega)|^2}{\mathcal{S}_X(\omega)} d\omega \right| \leq (Ts)_{n_0}. \quad (2.26)$$

**Application** : Le problème de détection se présente généralement de la façon suivante. On dispose d'observations de la forme

$$Y_n = u_{n-\tau} + X_n, \quad (2.27)$$

où  $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$  est un signal déterministe connu,  $X$  est un signal aléatoire du second ordre, centré et stationnaire en m.o.d., admettant une densité spectrale  $\mathcal{S}_X$  connue elle aussi, et  $\tau$  est un décalage temporel inconnu, que l'on cherche à déterminer. En appliquant le résultat précédent, dans le cas  $s_n = u_{n-\tau}$ , et  $n_0 = \tau$ , on obtient un filtre  $T$  de fonction de transfert

$$m(\omega) = C \frac{\bar{\hat{s}}(\omega)}{\mathcal{S}_X(\omega)}, \quad (2.28)$$

(donc indépendante du paramètre inconnu  $\tau$ ), tel que pour tout  $n$

$$|(Ts)_n| \leq (Ts)_\tau, \quad (2.29)$$

et que la valeur maximale  $(Ts)_\tau$  soit la plus grande possible. L'algorithme de détection consistera à appliquer le filtre  $T$  sur le signal observé  $Y$ , et à rechercher la valeur  $n$  telle que  $|(TY)_n|$  soit la plus grande possible. Ce  $n$  sera alors un candidat pour le paramètre recherché  $\tau$ .

### 2.3.2. Débruitage d'un signal aléatoire : filtre de Wiener

Pour ce problème, on suppose que l'on dispose d'observations de la forme

$$Y_n = X_n + B_n, \quad (2.30)$$

où  $X$  et  $B$  sont deux signaux aléatoires du second ordre, centrés, stationnaires en m.o.d, possédant des densités spectrales  $\mathcal{S}_X$  et  $\mathcal{S}_B$  connues :  $X$  est le signal auquel on s'intéresse, et  $B$  est une perturbation (un bruit) dont on cherche à se débarrasser. On suppose en outre que  $X$  et  $B$  sont décorrélés :

$$\mathbb{E} \{ X_n \bar{B}_m \} = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit facilement que  $Y$  est centré, stationnaire en moyenne d'ordre deux.

On formule le problème de débruitage de la façon suivante : trouver un filtre  $T = K_h$ , de réponse impulsionnelle  $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , tel que  $K_h Y$  soit aussi proche que possible de  $X$  dans le sens suivant : on souhaite minimiser l'erreur

$$e_n = \mathbb{E} \left\{ |(K_h Y)_n - X_n|^2 \right\}, \quad (2.31)$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Il résulte de la stationnarité de  $X, B$  et  $Y$  que

$$e_n = e_0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Le problème peut se formuler dans un cadre Hilbertien. En considérant l'espace  $\mathcal{M}_Y \subset L^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$  engendré par les variables aléatoires  $Y_n$ , le problème d'optimisation revient à rechercher l'élément de  $\mathcal{M}_Y$  le plus proche de  $X_n$ , au sens de la norme de  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{P})$ . C'est un problème de projection orthogonale, dont la solution est caractérisée par les équations

$$((K_h Y)_n - X_n | Y_m) = 0, \quad \text{pour tous } n, m \in \mathbb{Z},$$

ou encore

$$\sum_k h_k C_Y(n - m - k) = \mathbb{E} \{ X_n \bar{Y}_m \}.$$

En utilisant la décorrélation de  $X$  et  $B$  et la stationnarité, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\sum_k h_k (C_X(n - k) + C_B(n - k)) = C_X(n).$$

Finalement, en utilisant l'expression des fonctions d'autocovariance à partir des densités spectrales, on aboutit au système d'équations

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[ \hat{h}(\omega) (\mathcal{S}_X(\omega) + \mathcal{S}_B(\omega)) - \mathcal{S}_X(\omega) \right] e^{ik\omega} d\omega = 0, \quad \forall k.$$

On obtient ainsi

**PROPOSITION 2.5** *Sous les hypothèses ci-dessus, et en supposant que la fonction  $m$  définie par*

$$m(\omega) = \frac{\mathcal{S}_X(\omega)}{\mathcal{S}_X(\omega) + \mathcal{S}_B(\omega)} \quad (2.32)$$

*soit bornée, le filtre optimal pour le problème de débruitage est défini par la fonction de transfert  $m$ .*

### 2.3.3. Codage du signal de parole par prédiction linéaire

Les développements récents de la téléphonie mobile et de la téléphonie sur internet ont conduit à remettre en question les systèmes de codage du signal de parole, pour en améliorer les performances en termes de compression. Le but est de coder une quantité maximale d'information dans un volume minimal de données.

Il s'avère que le signal de parole a une structure assez spécifique, et qu'il peut (dans une certaine mesure) être assez bien modélisé par un signal aléatoire stationnaire en moyenne d'ordre deux. De plus, les caractéristiques spectrales de ce signal peuvent être mises en relation avec des caractéristiques du locuteur, ce qui a également conduit à des avancées dans le domaine de la reconnaissance du locuteur.

#### Prédiction linéaire

Avant de revenir à ces applications, commençons par nous pencher sur le problème de la prédiction linéaire pour les signaux du second ordre stationnaires en moyenne d'ordre deux. Soit  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  un tel signal. Le problème posé est le suivant : trouver le meilleur prédicteur linéaire d'une valeur  $X_n$  connaissant le passé  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_{n-N}$ .

On appellera prédicteur linéaire de  $X_n$  une variable aléatoire  $Z_n$  de la forme

$$Z_n = \sum_{k=1}^N h_k X_{n-k}, \quad (2.33)$$

où  $h_1, \dots, h_N \in \mathbb{R}$ , et prédicteur linéaire optimal (en moyenne d'ordre deux) la variable aléatoire correspondant aux coefficients  $h_1, \dots, h_N$  qui minimise l'erreur quadratique moyenne de prédiction

$$\mathcal{E}_n = \mathbb{E} \{ |Z_n - X_n|^2 \} = \|Z_n - X_n\|_{L^2(\mathcal{A})}^2 .$$

Notons que  $Z_n$  appartient au sous-espace vectoriel (de dimension  $N$ )  $\mathcal{M}_N$  de  $L^2(\mathcal{A})$  engendré par les variables aléatoires  $X_{n-1}, \dots, X_{n-N}$ . Par conséquent, la meilleure approximation de  $X_n \in L^2(\mathcal{A})$  dans  $\mathcal{M}_N$  n'est autre que sa projection orthogonale sur  $\mathcal{M}_N$ , c'est à dire la variable aléatoire  $Z_n$  de l'équation (2.33) telle que

$$(Z_n - X_n | X_{n-k}) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N ,$$

ce qui équivaut à

$$\mathbb{E} \{ Z_n \bar{X}_{n-k} \} = \mathbb{E} \{ X_n \bar{X}_{n-k} \} \quad \forall k = 1, \dots, N ,$$

et finalement au système matriciel

$$\sum_{\ell=1}^N h_\ell C_X(n-k, n-\ell) = C_X(n, n-k) \quad \forall k = 1, \dots, N . \quad (2.34)$$

Les coefficients  $h$  qui fournissent le prédicteur linéaire optimal sont donc obtenus en résolvant cette équation matricielle.

Notons que nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse de stationnarité du signal  $X$ , et que les coefficients optimaux  $h_k$  dépendent apparemment de  $n$ . Ceci n'est plus vrai si nous utilisons l'hypothèse de stationnarité, qui transforme (2.34) en une équation de convolution, appelée **équation de Yulle-Walker**

$$\sum_{\ell=1}^N h_\ell C_X(\ell-k) = C_X(k) \quad \forall k = 1, \dots, N . \quad (2.35)$$

**PROPOSITION 2.6** Soit  $X$  un signal aléatoire du second ordre, stationnaire en moyenne d'ordre deux, centré, d'autocovariance  $C_X$ . Le prédicteur linéaire optimal (au sens de la moyenne quadratique) d'ordre  $N$  est donné par (2.33), où les coefficients  $h_k$  sont obtenus comme solution de l'équation de Yulle-Walker (2.35).

**REMARQUE 2.4** En pratique, les caractéristiques statistiques telles que la matrice d'autocovariance  $C_X$  ne sont généralement pas connues, et doivent être estimées à partir des données. On forme pour cela une matrice d'autocovariance empirique notée  $\tilde{C}_X$  construite de la façon suivante. Supposons donné une suite  $X_0, \dots, X_{N-1}$  d'échantillons du signal, on définit donc

$$\tilde{C}_X = \begin{pmatrix} \tilde{c}(0) & \tilde{c}(1) & \tilde{c}(2) & \dots & \tilde{c}(N-1) \\ \tilde{c}(1) & \tilde{c}(0) & \tilde{c}(1) & \dots & \tilde{c}(N-2) \\ \tilde{c}(2) & \tilde{c}(1) & \tilde{c}(0) & \dots & \tilde{c}(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{c}(N-1) & \tilde{c}(N-2) & \tilde{c}(N-3) & \dots & \tilde{c}(0) \end{pmatrix} ,$$

où on a noté

$$\tilde{c}(n) = \sum_{k=0}^{N-k-1} X_k \bar{X}_{k+n} .$$

Les coefficients sont alors estimés en résolvant une variante de l'équation de Yulle-Walker (2.35), dans laquelle  $C_X$  est remplacée par  $\tilde{C}_X$ .

### Application au traitement de la parole

Le signal de parole est souvent considéré stationnaire en première approximation. Plus précisément, lorsqu'on l'étudie dans des fenêtres temporelles suffisamment courtes, certaines composantes (comme certaines voyelles par exemple) peuvent être bien modélisées comme signaux aléatoires stationnaire en m.o.d., et même décrits par prédiction linéaire. Evidemment, la densité spectrale (et donc le prédicteur optimal) n'est pas la même d'une voyelle à l'autre, et on associe un vecteur de prédiction  $h$  à chacune d'entre elles.

Sur un intervalle de temps suffisamment court, on modélise donc le signal sous la forme d'un signal autorégressif

$$X_n = \sum_{k=1}^N a_k X_{n-k} + \epsilon_n ,$$

avec un certain jeu de coefficients  $a_1, \dots, a_N$ , et où  $\epsilon$  représente un résidu. Comme on l'a déjà vu, ceci revient à modéliser le spectre de ce signal sous forme d'un spectre ne présentant que des pôles et pas de zéros. Les coefficients de ce filtre peuvent être estimés via l'algorithme décrit ci dessus (voir la Remarque 2.4). De façon assez remarquable, ces vecteurs de prédiction fournissent d'intéressantes caractéristiques des signaux, au sens où on peut montrer qu'ils fournissent un modèle du conduit vocal dans lequel le son s'est propagé lors de la création du "bout" de signal considéré.

Les codeurs de parole par prédiction linéaire effectuent donc les opérations suivantes, sur des segments contigus de signal :

- Estimation des coefficients de prédiction linéaire
- Calcul de l'erreur de prédiction  $X_n - \sum_{k=1}^N a_k X_{n-k}$ .
- codage (approximation) des coefficients et de l'erreur de prédiction.
- transmission des coefficients et de l'erreur codés.

En bout de chaîne (par exemple dans le téléphone de la personne qui écoute), le décodeur effectue les opérations suivantes :

- Réception, puis décodage des coefficients et de l'erreur de prédiction
- Reconstitution du signal à partir des coefficients et de l'erreur.

Il est assez remarquable de noter que les coefficients estimés permettent non seulement de coder et transmettre des signaux, mais aussi de traiter un certain nombre d'applications comme l'identification du locuteur, la reconnaissance vocale,...

### 2.3.4. Estimation spectrale

Le problème d'estimation spectrale est un problème classique de traitement du signal. La problématique est la suivante : étant donné une (ou plusieurs) observation(s) d'un signal aléatoire, supposé stationnaire en moyenne d'ordre deux, comment *estimer* sa mesure spectrale à partir d'observations ? Le problème se pose dans de nombreux domaines de la science et l'ingénierie. On peut notamment donner l'exemple du *contrôle non-destructif*

Considérons le problème suivant : on suppose données  $R$  observations de longueur  $2N + 1$

$$X_n^{(r)}, \quad n = -N, \dots, N, r = 1, \dots, R$$

d'un signal numérique aléatoire stationnaire en moyenne d'ordre deux, dont la mesure spectrale est inconnue, et on cherche à estimer cette dernière. L'estimateur « classique » est donné par le périodogramme :

DÉFINITION 2.6 *Le périodogramme associé à ce problème est constitué des variables aléatoires  $\mathcal{P}_N(\omega)$  définies par*

$$\mathcal{P}_N(\omega) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N X_n^{(r)} e^{-in\omega} \right|^2$$

REMARQUE 2.5 Pratiquement, le périodogramme peut être calculé par transformation de Fourier finie et FFT en se limitant aux valeurs

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{2N+1} .$$

Les moments d'ordre 1 et 2 du périodogramme peuvent être calculés explicitement. Par exemple,

$$\mathbb{E} \{ \mathcal{P}_N(\omega) \} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \sum_{m,n=-N}^N C_X(n-m) e^{-i(n-m)\omega} = \frac{1}{2\pi R} \sum_{r=1}^R \sum_{m,n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)(\omega-\omega')} d\nu_X(\omega')$$

donc

$$\mathbb{E} \{ \mathcal{P}_N(\omega) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(\omega - \omega') d\nu_X(\omega') \tag{2.36}$$

où  $K_N$  est le noyau de Fejèr, défini par

$$K_N(\omega) = \frac{1}{2N+1} \left( \frac{\sin((N+1/2)\omega)}{\sin(\omega/2)} \right)^2 \quad (2.37)$$

Il s'agit donc d'un produit de convolution de la mesure spectrale par le noyau  $K_N$ .

Supposons maintenant que le spectre soit un spectre continu, c'est à dire que la mesure spectrale soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :  $d\nu_X(\omega) = \mathcal{S}_X(\omega)d\omega$ . Il est alors possible de montrer (voir TD, dans un cadre légèrement différent)

PROPOSITION 2.7 Soit  $X$  un signal aléatoire du second ordre, stationnaire en moyenne d'ordre deux, et de mesure spectrale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Le périodogramme défini en Définition 2.6 est un estimateur asymptotiquement non-biaisé de la densité spectrale de  $X$  :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_N(\omega) = \mathcal{S}_X(\omega) .$$

Le noyau de Fejèr dépend clairement de  $N$  (et est d'autant plus étroit que  $N$  est grand), et a la propriété d'être tel que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi\eta}^{\pi\eta} K_N(\omega - \lambda) f(\omega) d\omega = f(\lambda)$ , pour peu que  $f$  soit assez régulière (le périodogramme est alors asymptotiquement non-biaisé). Ainsi, en appliquant cette propriété à la densité spectrale  $\mathcal{S}_X$ , et en supposant que celle-ci soit continue et varie suffisamment lentement, nous voyons que pour  $N$  assez grand, l'estimation fournie par le périodogramme pourra être considérée suffisamment précise. Ceci étant, pour  $N$  fixé (même grand), l'estimation pourra être de qualité médiocre pour des domaines fréquentiels où la densité spectrale  $\mathcal{S}_X$  varie rapidement.

Il est également possible de montrer qu'à la limite des grandes valeurs de  $N$ , les valeurs estimées du spectre sont décorréliées :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathcal{S}}_X \left[ \frac{2\pi k\eta}{N} \right] \tilde{\mathcal{S}}_X \left[ \frac{2\pi \ell\eta}{N} \right] \right\} = 0, \quad \forall k \neq \ell,$$

et que de plus la variance du périodogramme ne tend pas vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$  (le périodogramme est un estimateur inconsistant). En conséquence, le périodogramme fournit des estimations de la densité spectrale de piètre qualité, car très irrégulières.

Le biais du périodogramme peut être réduit par l'introduction d'une fenêtre de lissage, à savoir un vecteur  $w = \{w[0], \dots, w[N-1]\}$  à coefficients positifs, tel que  $\sum_n w[n] = N$ , et en remplaçant le périodogramme (??) par un périodogramme lissé

$$\tilde{\mathcal{S}}_X \left[ \frac{2\pi k}{N} \right] = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] X[n] e^{-2i\pi kn/N} \right|^2 .$$

L'estimateur est toujours biaisé, et (sous des hypothèses peu restrictives sur la fenêtre) asymptotiquement non-biaisé, mais le biais est maintenant contrôlé par la TFD de la fenêtre  $w$ , car la moyenne est toujours donnée par (2.36), où  $K_N$  est maintenant le module au carré de la TFD du vecteur  $w$ . Ainsi, plus  $K_N$  décroît rapidement, plus le biais sera réduit (sans jamais être supprimé toutefois).

Pour réduire l'inconsistance du périodogramme, l'estimateur de Welch-Bartlett effectue une moyenne de périodogrammes lissés, calculés à partir de segments  $\{X[m(L-L_0)], \dots, x[m(L-L_0)+L-1]\}$ ,  $L$  étant la longueur des segments et  $L_0$  un paramètre de chevauchement des segments. En notant  $w = \{w[0], \dots, w[L-1]\}$  la fenêtre de lissage (telle que  $\sum w[\ell] = L$ ), on forme ainsi l'expression (en supposant  $N = ML$ )

$$\tilde{\mathcal{S}}_X \left[ \frac{2\pi k\eta}{L} \right] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi L} \left| \sum_{\ell=0}^{L-1} w[\ell] X[m(L-L_0) + \ell] e^{-2i\pi k\ell/L} \right|^2 .$$

L'estimateur ainsi obtenu est plus régulier.

Comme on l'a vu plus haut, la capacité de l'estimateur à estimer correctement des spectres rapidement variables est conditionnée par le choix de la fenêtre de lissage, et donc de la longueur  $L$  des segments. Plus  $L$  est grand plus le biais est faible, mais plus la variance est élevée. Des

développements récents dans le domaine de l'estimation spectrale non-paramétrique cherchent à contourner ce compromis par l'introduction d'estimateurs à fenêtres multiples.

Il existe des choix « classiques » de fenêtres de lissage. Les plus utilisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Triangulaire :} & \quad w[n] = \frac{2}{N} \cdot \left( \frac{N}{2} - \left| n - \frac{N-1}{2} \right| \right) \\
 \text{Hamming :} & \quad w[n] = 0.54 - 0.46 \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \\
 \text{Hann :} & \quad w[n] = 0.5 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \right) \\
 \text{Bartlett :} & \quad w[n] = \frac{2}{N-1} \cdot \left( \frac{N-1}{2} - \left| n - \frac{N-1}{2} \right| \right) \\
 \text{Bartlett - Hann :} & \quad w[n] = 0,62 - 0,48 \left| \frac{n}{N-1} - \frac{1}{2} \right| - 0,38 \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \\
 \text{Cosinus :} & \quad w[n] = \cos \left( \frac{\pi n}{N-1} - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Le périodogramme est le plus simple des estimateurs spectraux.

## 2.4. Représentations Hilbertiennes

Nous nous sommes jusqu'à présent focalisés sur le cas des signaux stationnaires en moyenne d'ordre deux, pour lesquels nous avons obtenu une représentation de type "Fourier". Or, ce type de représentation n'est généralement pas la meilleure possible dès que l'on sort de la classe des signaux stationnaires en moyenne d'ordre deux.

### 2.4.1. Représentation sur une base pour les signaux aléatoires de longueur finie

Pour simplifier, plaçons nous tout d'abord dans le cadre des signaux aléatoires de taille finie  $X = \{X_0, \dots, X_{N-1}\}$ , centrés, et soit  $\{\varphi^0, \dots, \varphi^{N-1}\}$  une base orthonormée de  $\mathbb{C}^N$ .

Introduisons la famille de variables aléatoires

$$Z_n = \langle X, \varphi^n \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \bar{\varphi}_k^n. \quad (2.38)$$

Clairement, les  $Z_n$  sont les coefficients du développement du signal  $X$  sur la base considérée :

$$X = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n \varphi^n. \quad (2.39)$$

Il est immédiat que les  $Z_n$  sont des variables aléatoires centrées, du second ordre :

$$\mathbb{E} \{ |Z_n|^2 \} = \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \mathbb{E} \{ X_k \bar{X}_\ell \} \bar{\varphi}_k^n \varphi_\ell^n < \infty. \quad (2.40)$$

De plus, la matrice de covariance  $C_Z$  du vecteur aléatoire  $Z$  est donnée par

$$C_Z(m, n) = \mathbb{E} \{ Z_m \bar{Z}_n \} = \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \mathbb{E} \{ X_k \bar{X}_\ell \} \bar{\varphi}_k^m \varphi_\ell^n = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{\ell=0}^{N-1} C_X(k, \ell) \varphi_\ell^n \right) \bar{\varphi}_k^m = \langle C_X \varphi^n, \varphi^m \rangle \quad (2.41)$$

où  $C_X$  est l'opérateur linéaire défini dans la base canonique par la matrice  $C_X$ .

**DÉFINITION 2.7** L'opérateur  $C_X$  défini par la matrice d'autocovariance  $C_X$  est appelé opérateur de covariance (ou opérateur d'autocovariance) du signal  $X$ .

### 2.4.2. Base de Karhunen-Loève pour les signaux de longueur finie

Parmi toutes les bases orthonormées de  $\mathbb{C}^N$ , il est possible d'en distinguer une qui est canoniquement associée à un signal aléatoire du second ordre donné. En effet, il est facile de vérifier le résultat suivant

**LEMME 2.2** *L'opérateur d'autocovariance  $\mathcal{C}_X$  d'un signal aléatoire du second ordre  $X$  est auto-adjoint.*

Par conséquent,  $\mathcal{C}_X$  est diagonalisable : il existe  $N$  réels  $\lambda_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , que l'on peut ordonner par ordre décroissant

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N ,$$

et une base orthonormée correspondante  $\{\psi_n, n = 1, \dots, N\}$  de  $\mathbb{C}^N$ , telles que

$$\mathcal{C}_X \psi_n = \lambda_n \psi_n . \quad (2.42)$$

**DÉFINITION 2.8** *La base orthonormée qui diagonalise l'opérateur de covariance d'un signal aléatoire du second ordre  $X$  est appelée base de Karhunen-Loève de  $X$ .*

La base de Karhunen-Loève fournit donc une décomposition spectrale de  $\mathcal{C}_X$  :

$$\mathcal{C}_X f = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle f, \psi_n \rangle \psi_n , \quad f \in \mathbb{C}^N .$$

La décomposition d'un signal aléatoire du second ordre  $X$  sur sa base de Karhunen-Loève

$$X = \sum_{n=1}^N Z_n \psi_n \quad (2.43)$$

est remarquable pour la raison suivante : elle est bi-orthogonale, au sens où l'on a à la fois

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn} , \quad \text{et} \quad (Z_n | Z_m) = \lambda_n \delta_{mn} . \quad (2.44)$$

**REMARQUE 2.6** Revenons sur le cas particulier des signaux stationnaires en moyenne d'ordre deux. Comme on l'a vu, la matrice d'autocovariance est une matrice circulante

$$C_X(m, n) = C_X([m - n][\text{mod } N]) ,$$

de sorte que l'opérateur d'autocovariance est un opérateur de convolution. Or, on sait que la base qui diagonalise les convolutions est la base de Fourier : en définissant  $\epsilon^n \in \mathbb{C}^N$  par

$$\epsilon_k^n = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi kn/N} ,$$

on voit facilement que

$$\mathcal{C}_X \epsilon_k = \mathcal{S}_X(k) \epsilon_k ,$$

où le spectre  $\mathcal{S}_X$  a été défini en (2.16). Ainsi, la base de Karhunen-Loève associée aux signaux stationnaires n'est autre que la base trigonométrique, et la représentation spectrale de  $X$  donnée en (2.43) coïncide avec la représentation de Cramér (2.18).

## 2.5. Quantification, PCM et codage

PCM est le sigle désignant le *Pulse Code Modulation*, un standard (ou plutôt une famille de standards) adopté de façon assez universelle. Le système PCM est connu pour offrir des performances assez moyennes en termes de compression, mais aussi pour sa grande robustesse (notamment par rapport aux erreurs de transmission) et sa faible complexité (algorithme peu gourmand en mémoire et CPU). On décrit ici le PCM de façon assez sommaire, dans le but d'introduire quelques idées simples, notamment en ce qui concerne la quantification scalaire.

Le PCM consiste essentiellement en un échantillonneur, suivi d'un quantificateur (uniforme) appliqué aux échantillons, et enfin d'un système simple de codage. La phase d'échantillonnage sera décrite dans le chapitre qui suit. Le codage est basé sur le principe d'une attribution "démocratique" des bits : chaque valeur quantifiée sera codée sur un nombre de bits constant. On parle de code de longueur constante. On se concentre maintenant sur la quantification.

### 2.5.1. Quantification scalaire

Considérons donc des échantillons  $f_n$  d'un signal  $f$ . La base du PCM est de modéliser chacun de ces échantillons comme une variable aléatoire, sans se préoccuper des corrélations entre échantillons. Supposons que la variable aléatoire  $X$  soit une variable aléatoire continue du second ordre, de densité de probabilités  $\rho_X$ .

On considère donc un quantificateur

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow E_M = \{y_-, y_0, \dots, y_{M-1}, y_+\},$$

et la variable aléatoire discrète  $Y = Q(X)$ , à valeurs dans l'ensemble fini  $E_M$ .  $Q$  est défini à partir d'intervalles de la forme  $[x_k, x_{k+1}[$  par

$$Q(x) = \begin{cases} y_- & \text{si } x \leq x_0 \\ y_k & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[ , \quad k = 0, \dots, M-1 \\ y_+ & \text{si } x > x_M \end{cases} \quad (2.45)$$

On s'intéresse particulièrement à l'erreur de quantification, c'est à dire à la variable aléatoire

$$Z = X - Y = X - Q(X), \quad (2.46)$$

que l'on va chercher à évaluer. On doit donc se donner une façon de mesurer cette quantité. La quantité d'intérêt la plus simple est ici la variance de l'erreur de quantification

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{E}\{Z^2\} = \int (x - Q(x))^2 \rho_X(x) dx \quad (2.47)$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^2 \rho_X(x) dx \right) + \int_{-\infty}^{x_0} (x - y_-)^2 \rho_X(x) dx + \int_{x_M}^{\infty} (x - y_+)^2 \rho_X(x) dx, \quad (2.48)$$

et c'est celle-ci que nous allons évaluer dans certaines situations simples. Les deux derniers termes forment le *bruit de saturation*, alors que les autres forment le *bruit granulaire*. Dans le cas d'un signal borné (c'est à dire quand  $\rho_X$  a un support borné), le bruit de saturation est généralement évité<sup>1</sup>.

**DÉFINITION 2.9** On considère un quantificateur comme décrit ci-dessus. Le facteur de performance du quantificateur est le quotient

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Z^2}, \quad (2.49)$$

où  $\sigma_X^2$  et  $\sigma_Z^2$  sont les variances respectives du signal  $X$  et du bruit de quantification  $Z$ . Le Rapport Signal à Bruit de Quantification est quant à lui défini par

$$SNR_Q = 10 \log_{10}(\epsilon^2) = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Z^2} \right). \quad (2.50)$$

Il est bien évident que l'objectif que l'on se fixe en développant un quantificateur est de maximiser le rapport signal à bruit, pour un débit  $R$  fixé. Ou, plus ambitieusement, on cherche à construire une *théorie Débit-Distorsion*, qui décrit l'évolution de la distorsion en fonction de  $R$ . On va voir que ceci est possible au prix d'approximations simplificatrices. On commencera par étudier le cas le plus simple, à savoir le cas de la quantification uniforme.

### 2.5.2. Quantification uniforme

On s'intéresse maintenant au cas le plus simple, à savoir le cas de la quantification uniforme. L'effet de la quantification uniforme sur un signal est décrit en FIG. 2.4.

1. Encore que ceci ne soit pas obligatoire ; on peut parfois se permettre une certaine quantité de bruit de saturation.

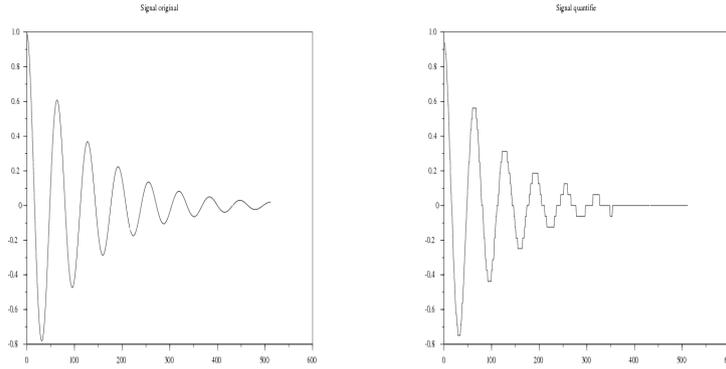


FIGURE 2.4.: Exemple de quantification : un signal simple (à gauche) et le même signal après quantification de chaque échantillon sur 5 bits (32 niveaux de quantification).

Pour simplifier (en évitant d'avoir à considérer le bruit de saturation), on suppose pour cela que la variable aléatoire  $X$  est bornée, et prend ses valeurs dans un intervalle  $I$ . Une quantification uniforme consiste à découper  $I$  en  $M = 2^R$  sous-intervalles de taille constante, notée  $\Delta$ . Plus précisément :

**DÉFINITION 2.10** Soit  $X$  une variable aléatoire dont la densité  $\rho_X$  est à support borné dans un intervalle  $I = [x_{min}, x_{max}]$ . Soit  $R$  un entier positif, et soit  $M = 2^R$ . Le quantificateur uniforme de débit  $R$  est donné par le choix

$$x_0 = x_{min} , \quad x_m = x_0 + m\Delta , \quad (2.51)$$

avec

$$\Delta = |I|/M = |I|2^{-R} , \quad (2.52)$$

et

$$y_m = \frac{x_m + x_{m+1}}{2} . \quad (2.53)$$

Supposons que le quantificateur soit un quantificateur "haute résolution", c'est à dire qu'à l'intérieur d'un intervalle  $[x_k, x_{k+1}]$ , la densité de probabilités  $x \rightarrow \rho_X(x)$  soit lentement variable, et puisse être approximée par la valeur  $\rho_k = \rho(y_k)$ . Sous ces conditions, on montre facilement que

$$\mathbb{E} \{X - Q(X)\} \approx 0 , \quad (2.54)$$

et on écrit alors

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^2 \rho_X(x) dx \approx \frac{\rho_k}{3} ((x_{k+1} - y_k)^3 - (x_k - y_k)^3) . \quad (2.55)$$

Notons que pour un  $\rho_k$  donné, cette dernière quantité atteint son minimum (par rapport à  $y_k$  en  $y_k = (x_k + x_{k+1})/2$ , c'est à dire la valeur donnée en hypothèse, de sorte que  $x_{k+1} - y_k = y_k - x_k = \Delta/2$ . Par conséquent, on obtient

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^2 \rho_X(x) dx \approx \rho_k \frac{\Delta^3}{12} . \quad (2.56)$$

Par ailleurs, on écrit également  $1 = \int \rho_X(x) dx \approx \Delta \sum_k \rho_k$ , d'où

$$\sum_k \rho_k \approx \frac{1}{\Delta} . \quad (2.57)$$

Finalement, en faisant le bilan, on aboutit à

$$\sigma_Z^2 \approx \frac{\Delta^3}{12} \sum_0^{M-1} \rho_k \approx \frac{\Delta^2}{12} \quad (2.58)$$

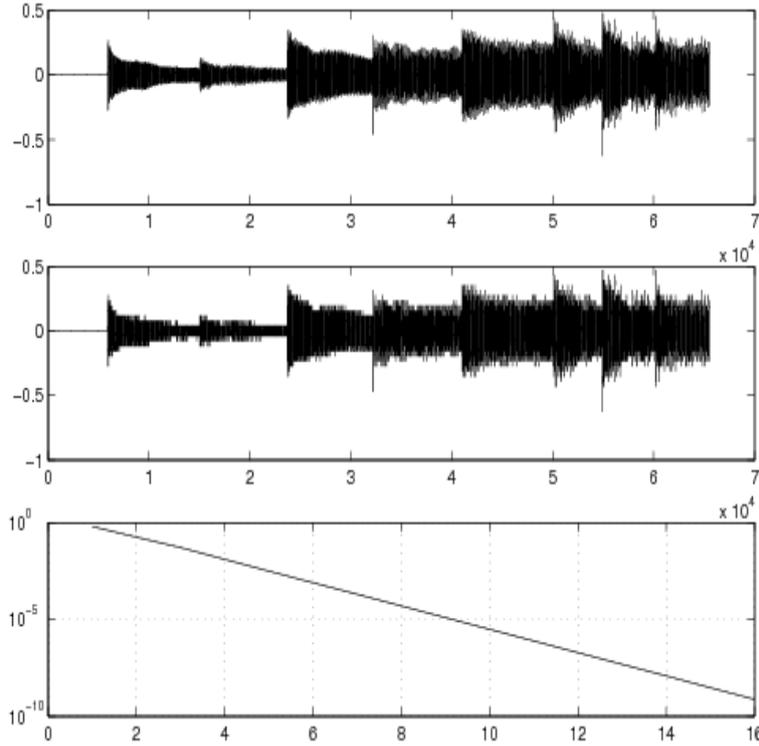


FIGURE 2.5.: Quantification d'un signal audio : un signal "test" (le "carillon" test des codeurs MPEG audio, en haut), une version quantifiée sur 4 bits (milieu), et le logarithme de la distorsion en fonction du débit (en bas).

REMARQUE 2.7 Notons que d'après ces estimations, on obtient une estimation de la courbe débit-distorsion fournie par la quantification uniforme :

$$D = \sigma_Z^2 = C^{ste} 2^{-2R} .$$

Plus précisément, on montre que

LEMME 2.3 Soit  $X$  une variable aléatoire bornée dans  $I$ . Supposons en outre que  $\rho_X \in C^1(\mathbb{R})$ . Soit  $Q$  un quantificateur uniforme sur  $R$  bits par échantillon. Alors, on a

$$\sigma_Z^2 = \frac{\Delta^2}{12} + r , \tag{2.59}$$

avec

$$|r| \leq C^{ste} 2^{-3R} \sup_x |\rho'_X(x)| . \tag{2.60}$$

Preuve : Il suffit de donner un sens plus précis à l'approximation (2.58). Par accroissements finis, on obtient

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^2 \rho_X(x) dx = \rho_k \frac{\Delta^3}{12} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^3 \rho'_X(y) dx = \rho_k \frac{\Delta^3}{12} + r_k ,$$

pour un certain  $y = y(x) \in [x_k, x_{k+1}]$ . On a donc

$$|r_k| \leq \sup_{y \in [x_k, x_{k+1}]} |\rho'_X(y)| \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x - y_k|^3 dx .$$

Cette dernière intégrale vaut

$$2 \int_0^{\Delta/2} u^3 du = \frac{\Delta^4}{32} .$$

Donc,

$$|r| \leq \sum_1^M |r_k| \leq M \sup |\rho'_X| \frac{\Delta^4}{32} = \frac{|I|^4}{32} 2^{-3R} \sup |\rho'_X| .$$

L'estimation (2.57) se fait de façon similaire. Ceci conclut la démonstration ♠  
 Ces approximations permettent d'obtenir une première estimation pour l'évolution du  $SNR_Q$  en fonction du taux  $R$ . En effet, nous avons

$$SNR_Q = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Z^2} \right) = 20R \log_{10}(2) - 10 \log_{10} \left( \frac{|I|^2}{12\sigma_X^2} \right) \approx 6,02 R + C^{ste}$$

où la constante dépend de la loi de  $X$ . Ainsi, on aboutit à la règle empirique suivante :

*Ajouter un bit de quantification revient à  
 augmenter le rapport signal à bruit de quantification de 6dB environ.*

Ceci est très bien illustré par la FIG. 2.5, qui représente un signal audio (un son de carillon, utilisé comme signal test par le consortium MPEG). La figure du haut représente le signal original, et la figure du milieu représente une version quantifiée sur 4 bits. Les distorsions sont assez visibles. La figure du bas représente quant à elle le rapport signal à bruit  $SNR_Q$  en fonction du débit  $R$ , pour un  $R$  variant de 1 à 16. On voit que comme attendu, le comportement est remarquablement proche d'un comportement linéaire.

EXEMPLE 2.6 Prenons par exemple une variable aléatoire  $X$ , avec une loi uniforme sur un intervalle  $I = [-x_0/2, x_0/2]$ . On a alors

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{x_0} \int_{-x_0/2}^{x_0/2} x^2 dx = \frac{x_0^2}{12}$$

de sorte que l'on obtient pour le rapport signal à bruit de quantification, exprimé en décibels (dB) :

$$SNR_Q \approx 6,02 R .$$

C'est le résultat standard que l'on obtient pour le codage des images par PCM.

### 2.5.3. Compensation logarithmique

Une limitation de la quantification uniforme que nous avons vue plus haut est que, tant que l'on reste dans le cadre de validité des approximations que nous avons faites, la variance  $\sigma_Z^2$  du bruit de quantification (qui vaut  $\Delta^2/12$ ) ne dépend pas de la variance du signal. Donc, le rapport signal à bruit de quantification décroît quand la variance du signal décroît. Or, celle-ci est souvent inconnue à l'avance, et peut aussi avoir tendance à varier (lentement) au cours du temps. Il peut donc être avantageux de "renforcer" les faibles valeurs du signal de façon "autoritaire". Pour ce faire, une technique classique consiste à effectuer sur les coefficients une transformation, généralement non-linéaire, afin de rendre la densité de probabilités plus "plate", plus proche d'une densité de variable aléatoire uniforme. Il s'agit généralement d'une transformation logarithmique, modifiée à l'origine pour éviter la singularité.

Deux exemples de telles transformations sont couramment utilisées, en téléphonie notamment : la loi  $A$ , qui correspond au standard européen, et la loi  $\mu$  (standard nord-américain).

#### La loi $A$

Le premier exemple est la loi  $A$ , qui consiste en une modification linéaire pour les faibles valeurs du signal, et d'une compensation logarithmique pour les plus grandes valeurs. Plus précisément, la fonction de compensation est donnée par

$$c(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\log A} \operatorname{sgn}(x) & \text{si } |x| \leq \frac{x_{max}}{A} \\ x_{max} \frac{1+\log(A|x|/x_{max})}{1+\log A} \operatorname{sgn}(x) & \text{si } |x| > \frac{x_{max}}{A} \end{cases} \quad (2.61)$$

On peut alors montrer que le rapport signal à bruit de quantification devient

$$SNR \approx \begin{cases} 6,02 R + 4,77 - 20 \log_{10} (1 + \log A) & \text{pour les grandes valeurs du signal} \\ SNR_Q + 20 \log_{10} \left( \frac{A}{1+\log A} \right) & \text{pour les faibles valeurs du signal} . \end{cases} \quad (2.62)$$

EXEMPLE 2.7 Valeur typique du paramètre, pour le codage du signal de parole :  $A = 87.56$  (standard PCM européen). Le SNR correspondant, exprimé en décibels (dB), vaut

$$SNR_A \approx 6,02 R - 9,99 .$$

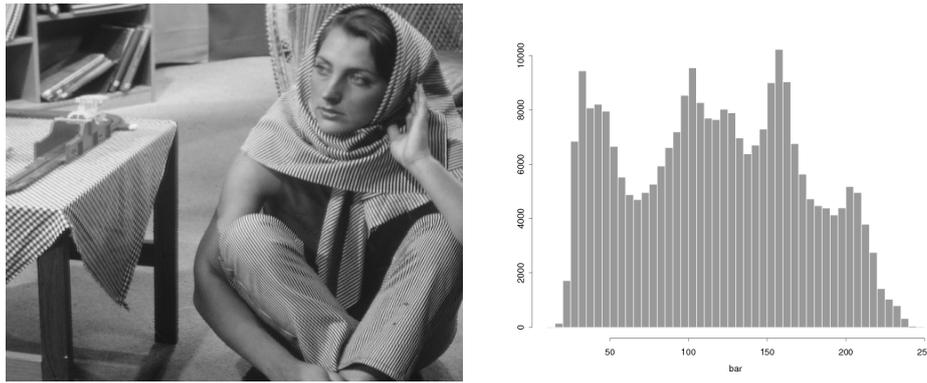


FIGURE 2.6.: Image, et densité de probabilités empirique des valeurs de pixel.

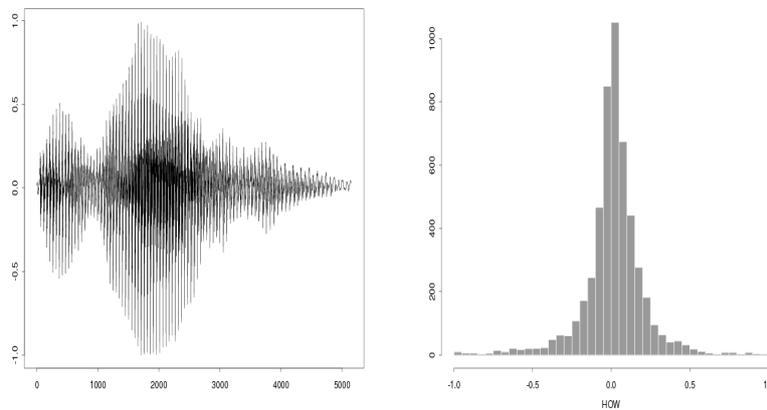


FIGURE 2.7.: Signal de parole, et densité de probabilités empirique des valeurs du signal.

**La loi  $\mu$**

La fonction de compensation est dans ce cas donnée par

$$c(x) = x_{max} \frac{\log(\mu|x|/x_{max})}{\log(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(x) . \tag{2.63}$$

On montre alors que le rapport signal à bruit de parole est approximativement donné par

$$SNR \approx \begin{cases} 6,02 R + 4,77 - 20 \log_{10} (\log(1 + \mu)) & \text{pour les grandes valeurs du signal} \\ SNR_Q + 20 \log_{10} \left( \frac{\mu}{\log(1+\mu)} \right) & \text{pour les faibles valeurs du signal .} \end{cases} \tag{2.64}$$

EXEMPLE 2.8 Valeur typique du paramètre : pour le signal de parole :  $\mu = 255$  (standard PCM US). Le  $SNR$  correspondant, exprimé en décibels (dB), est de la forme

$$SNR_{\mu} \approx 6,02 R - 10,1 .$$

La figure 2.8 représente le signal de parole de la figure 2.7 après compensation logarithmique, et la densité de probabilités correspondante, qui est beaucoup plus régulière que celle de la figure 2.7. La figure 2.9 reprend l'exemple de la figure 2.5, et montre l'effet de la compensation logarithmique sur la courbe débit-distorsion : la nouvelle courbe est toujours essentiellement linéaire, mais se situe en dessous de la précédente. La compensation logarithmique a donc bien amélioré les performances du quantificateur.

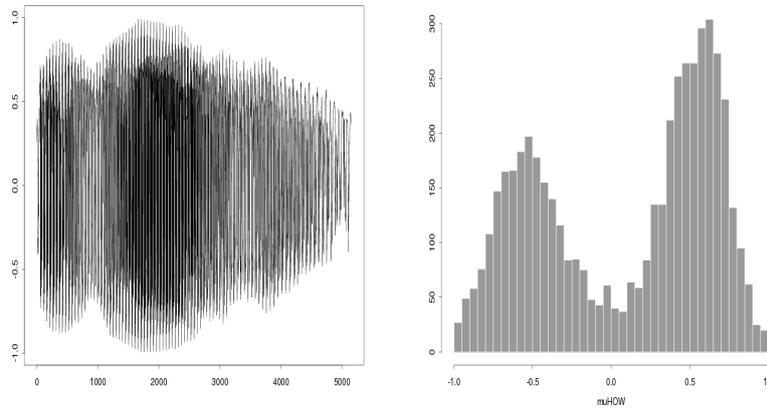


FIGURE 2.8.: Signal de parole, et densité de probabilités empirique des valeurs du signal, après compensation logarithmique par loi  $\mu$ .

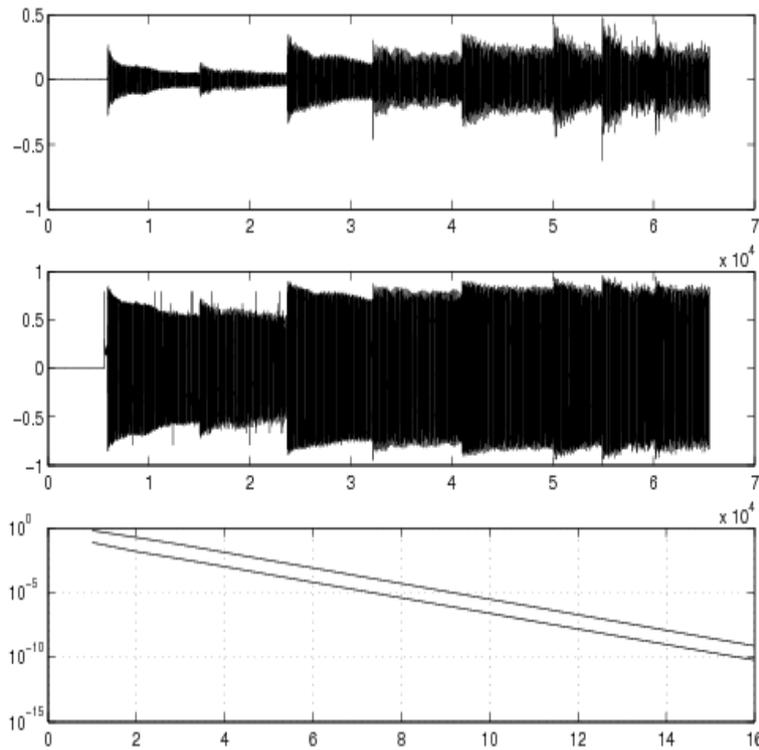


FIGURE 2.9.: Quantification logarithmique d'un signal audio : le signal test "carillon" (en haut), une version corrigée par loi  $\mu$  (milieu), et le logarithme de la distortion en fonction du débit (en bas) pour le signal original et le signal compensé logarithmiquement (en bas).

### 2.5.4. Quantification scalaire optimale

Par définition, un quantificateur scalaire optimal est un quantificateur qui, pour un nombre de niveaux de quantification  $N$  fixé, minimise la distorsion. Il existe un algorithme, appelé *algorithme de Lloyd-Max*, qui permet d'atteindre l'optimum connaissant la densité de probabilités  $\rho_X$  de la variable aléatoire  $X$  à quantifier.

Supposons par exemple que nous ayons à quantifier une variable aléatoire  $X$  de densité  $\rho_X$  à support non borné. Pour obtenir le résultat, on commence par calculer

$$\sigma_Z^2 = \sum_{k=0}^{M-1} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^2 \rho_X(x) dx \right) + \int_{-\infty}^{x_0} (x - y_-)^2 \rho_X(x) dx + \int_{x_M}^{\infty} (x - y_+)^2 \rho_X(x) dx, \quad (2.65)$$

qu'il s'agit de minimiser par rapport aux variables  $x_k$ ,  $y_k$  et  $y_+$ ,  $y_-$ . Il s'agit d'un problème classique de minimisation de forme quadratique, dont la solution est fournie par les équations d'Euler. En égalant à zéro la dérivée par rapport à  $x_k$ , on obtient facilement les expressions suivantes

$$x_k = \frac{1}{2}(y_k + y_{k-1}), \quad k = 1, \dots, M-1, \quad (2.66)$$

$$x_0 = \frac{1}{2}(y_0 + y_-) \quad (2.67)$$

$$x_M = \frac{1}{2}(y_{M-1} + y_+) \quad (2.68)$$

De même, en égalant à zéro les dérivées par rapport aux  $y_k$ , à  $y_-$  et  $y_+$ , on obtient

$$y_k = \frac{\int_{x_k}^{x_{k+1}} x \rho_X(x) dx}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \rho_X(x) dx}, \quad (2.69)$$

$$y_- = \frac{\int_{-\infty}^{x_0} x \rho_X(x) dx}{\int_{-\infty}^{x_0} \rho_X(x) dx}, \quad (2.70)$$

$$y_+ = \frac{\int_{x_M}^{\infty} x \rho_X(x) dx}{\int_{x_M}^{\infty} \rho_X(x) dx}. \quad (2.71)$$

On obtient facilement des expressions similaires dans des situations où  $\rho_X$  est bornée. Ceci conduit naturellement à un algorithme itératif, dans lequel les variables  $x$  et  $y$  sont mises à jour récursivement. Naturellement, comme il s'agit d'un algorithme de type "algorithme de descente", rien ne garantit qu'il converge obligatoirement vers le minimum *global* de la distorsion. Lorsque tel n'est pas le cas (ce qui est en fait la situation la plus générale), on doit recourir à des méthodes plus sophistiquées.

### 2.5.5. Quantification vectorielle

Le défaut essentiel du codeur PCM est son incapacité à prendre en compte les corrélations existant dans le signal codé. La quantification utilisée dans le PCM traite en effet chaque échantillon individuellement, et ne tient aucun compte de la "cohérence" du signal. Pour tenir compte de celle-ci, il faudrait a priori effectuer une quantification non plus sur des échantillons individuels, mais sur des familles, ou vecteurs, d'échantillons. C'est le principe de la quantification vectorielle. Cependant, alors que l'idée de la quantification vectorielle est somme toute assez simple, sa mise en œuvre effective peut être extrêmement complexe.

Considérons un signal  $\{x_0, x_1, \dots\}$ , et commençons par le "découper" en segments de longueur fixée  $N$ . Chaque segment représente donc un vecteur  $X \in \mathbb{R}^N$ , et on se pose donc le problème de construire un quantificateur :

$$Q : \mathbb{R}^N \rightarrow E_M = \{y_0, \dots, y_{M-1}\},$$

en essayant de minimiser l'erreur de quantification

$$D = \mathbb{E} \{|X - Q(X)|^2\},$$

où on a noté  $|X|$  la norme Euclidienne de  $X \in \mathbb{R}^N$ .

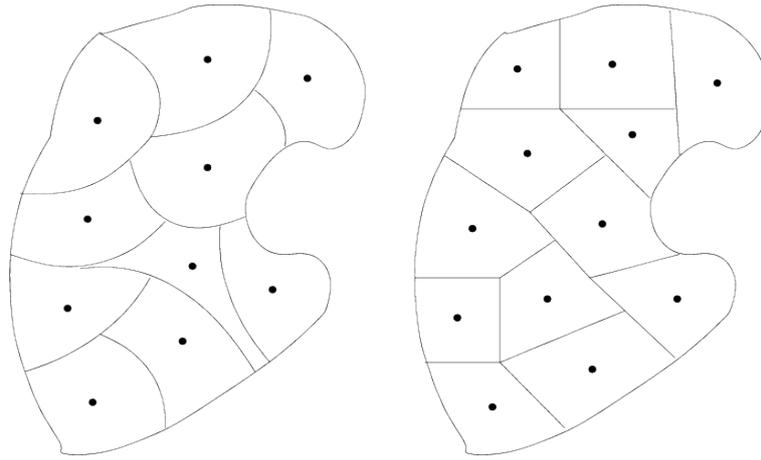


FIGURE 2.10.: Quantification vectorielle : deux partitions d'un domaine de  $\mathbb{R}^2$  : quantifications régulière (à droite) et irrégulière (à gauche) : boîtes de quantification et leurs centroïdes.

**DÉFINITION 2.11** L'ensemble des "vecteurs quantifiés" est appelé le dictionnaire du quantificateur (codebook en anglais).

Le problème est le même que celui que nous avons vu dans le cas de la recherche du quantificateur scalaire optimal, mais la situation est cette fois bien plus complexe, à cause de la dimension supérieure dans laquelle on se place. En effet, dans le cas d'un quantificateur scalaire, le problème est essentiellement de "découper" un sous-domaine de l'axe réel, ou l'axe réel lui-même, en un nombre fini de boîtes de quantification (c'est à dire d'intervalles). En dimension supérieure, il s'agit maintenant d'effectuer une partition d'une partie de  $\mathbb{R}^N$  en sous-domaines. On doit pour ce faire effectuer de multiples choix, notamment en ce qui concerne la forme des frontières : dans le cas de frontières planes, on parlera de quantificateur régulier, dans le cas contraire de quantificateur irrégulier (voir la FIG. 2.10. La problématique de la quantification vectorielle présente des similarités certaines avec la problématique du "clustering".

Il existe de multiples façons différentes de construire un quantificateur vectoriel. On peut par exemple se référer à [6] pour une description relativement complète de l'état de l'art. Le problème de la recherche du quantificateur vectoriel optimal peut se formuler suivant les lignes ébauchées dans la section 2.5.4 : à partir du moment où on s'est donné le nombre de sous-domaines recherchés pour la partition, il reste à optimiser la distorsion globale

$$D = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{\Omega_k} (x - y_k)^2 \rho_X(x) dx ,$$

où on a noté  $\Omega_0, \dots, \Omega_{M-1}$  les sous-domaines considérés, et  $y_0, \dots, y_{M-1}$  les valeurs de quantification correspondantes. L'optimisation par rapport à  $y_k$  reste assez simple, et fournit la *condition de centroïde*

$$y_k = \frac{\int_{S_k} x \rho_X(x) dx}{\int_{S_k} \rho_X(x) dx} ,$$

mais l'optimisation par rapport aux sous-domaines  $S_k$ , généralement effectuée numériquement, peut s'avérer extrêmement complexe suivant les hypothèses que l'on fait sur la forme des sous-domaines.

# SIGNAUX ANALOGIQUES ; FILTRAGE ET ECHANTILLONNAGE

Après avoir analysé les signaux numériques, on passe maintenant au cas des signaux analogiques. Comme on le verra, toutes les manipulations que l'on peut effectuer sur les signaux numériques ont leur contrepartie dans le cas des signaux analogiques, ce dernier cas présentant quelques difficultés supplémentaires. On se posera également le problème de l'échantillonnage, c'est à dire le problème du passage d'un signal analogique à un signal numérique.

## 3.1. Préliminaires

Un signal analogique est par définition une fonction d'une (ou plusieurs) variable(s) continue(s), résultant par exemple d'une mesure physique. Deux concepts importants sont les concepts d'énergie et de puissance d'un signal. Pour cela, il est utile de considérer un exemple.

**EXEMPLE 3.1** Considérons un circuit électrique, dont on mesure la tension aux bornes d'une résistance  $R$ . Si on note  $i(t)$  l'intensité du courant dans la résistance, et  $v(t)$  la tension aux bornes de cette dernière, l'énergie est donnée par

$$E = R \int_{-\infty}^{\infty} |i(t)|^2 dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt .$$

Par conséquent, on appellera par convention *énergie d'un signal* le carré de sa norme  $L^2$

$$E = \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (3.1)$$

quand celle-ci est définie.

Une autre quantité utile est la *puissance d'un signal*. On définit usuellement trois quantités :

- La puissance instantanée :

$$P(t) = |f(t)|^2 .$$

- La puissance instantanée moyenne

$$P(t, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt .$$

- La puissance moyenne

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt . \quad (3.2)$$

Cette dernière quantité trouve son utilité pour l'étude des signaux dont l'énergie n'est pas définie. Un autre ingrédient important de l'analyse du signal est la *théorie spectrale*, dont le but est de simplifier certaines transformations des signaux. La représentation spectrale des signaux est une représentation qui fait intervenir des notions fréquentielles plutôt que des notions temporelles. Pour cela, on doit utiliser l'analyse de Fourier, ou l'une de ses variantes.

## 3.2. Signaux d'énergie finie

Un cas particulier est fourni par les signaux dits *signaux d'énergie finie*, qui ne sont autres que des fonctions de carré intégrable. La transformation de Fourier fournit donc un cadre naturel pour construire une théorie spectrale.

### 3.2.1. Transformation de Fourier et propriétés simples

**DÉFINITION 3.1** *Etant donnée une fonction  $f$ , sa transformée de Fourier est la fonction d'une variable réelle  $\omega \rightarrow \hat{f}(\omega)$ , définie par*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (3.3)$$

*pour tout  $\omega$  tel que l'intégrale soit convergente. On note  $\mathcal{F}$  l'opérateur linéaire défini par  $\hat{f} = \mathcal{F}f$ . La variable  $\omega$  porte le nom de fréquence.*

On vérifie immédiatement que si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}$  est bornée. Plus généralement, on a

**THÉORÈME 3.1 (RIEMANN-LEBESGUE)** *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $\hat{f}$  est bornée, uniformément continue : pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\omega$ ,*

$$|\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| \leq \epsilon \quad (3.4)$$

*De plus,*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

*Preuve :* Nous savons déjà que si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}$  est bornée. Passons à la continuité. La preuve est relativement simple. Commençons par calculer

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( e^{-i(\omega+\delta)t} - e^{-i\omega t} \right) dt \\ &= -2i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\left(\frac{t\delta}{2}\right) e^{-it\delta/2} e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Le fait que  $f$  soit intégrable implique qu'il existe  $T$  tel que  $\int_{-\infty}^{-T} |f(t)|dt + \int_T^{\infty} |f(t)|dt \leq \epsilon/4$ . Nous n'avons donc plus qu'à nous préoccuper de l'intégrale entre  $-T$  et  $T$ . Mais dans cet intervalle, nous savons que  $|\sin(t\delta/2)| \leq |t\delta/2| \leq T\delta/2$ . Donc, nous avons

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{T\delta}{2} \int_{-T}^T |f(t)|dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{T\delta}{2} \|f\|_1 \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de choisir  $\delta$  de sorte que  $T\delta\|f\|_1 \leq \epsilon$ , et on obtient bien l'estimation souhaitée (3.4). La première partie du théorème est donc montrée.

Le fait que  $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow \pm\infty$  résulte de la densité des fonctions constantes par morceaux dans l'espace  $L^1(\mathbb{R})$  : pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , il existe une suite de fonctions  $g_n$ , constantes par morceaux, telle que pour tout  $\epsilon$  fixé, on ait  $\|f - g_n\|_1 \leq \epsilon$  pour un  $n$  assez grand. Il suffit donc d'étudier le comportement de la fonction caractéristique d'un intervalle ; prenons  $g = \chi_{[a,b]}$ . Alors, on a  $\hat{g}(\omega) = (e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a})/i\omega\sqrt{2\pi}$ , qui tend bien vers 0 quand  $|\omega| \rightarrow \infty$ . De même, la transformée de Fourier de toute fonction intégrable constante par morceaux tend vers 0 à l'infini. Pour conclure, il suffit de remarquer que pour tout  $\omega$ , on a par hypothèse  $|\hat{f}(\omega) - \hat{g}_n(\omega)| \leq \|f - g_n\|_1$ . Comme pour tout  $n$ ,  $\hat{g}_n(\omega) \rightarrow 0$  quand  $|\omega| \rightarrow \infty$ , et comme  $\|f - g_n\|_1$  peut être rendu aussi proche de 0 que ce que l'on veut, on en déduit que  $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$  quand  $|\omega| \rightarrow \infty$ . ♠

La transformation de Fourier possède des propriétés simples, faciles à vérifier. En supposant que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  pour simplifier (ce qui assure l'existence de  $\hat{f}(\omega)$  pour tout  $\omega$ , on vérifie facilement les propriétés suivantes :

1. *Comportement vis à vis des translations et des modulations.* Considérons maintenant une fonction intégrable  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On définit la *translatée* de  $f$  par la quantité  $b \in \mathbb{R}$  comme la fonction  $g : t \rightarrow g(t) = f(t - b)$ . On a alors, par un simple changement de variables

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - b)e^{-i\omega t} dt = e^{i\omega b} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - b)e^{-i\omega(t-b)} dt = e^{i\omega b} \hat{f}(\omega) . \quad (3.5)$$

On dit que  $\hat{g}$  est une version *modulée* de  $\hat{f}$ . Similairement, si  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , définie par  $h(t) = e^{i\eta t} f(t)$  (où  $\eta \in \mathbb{R}^*$ ) est une version modulée de la fonction intégrable  $f$ , alors on a

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\eta)t} dt = \hat{f}(\omega - \eta) , \quad (3.6)$$

de sorte que la transformée de Fourier de  $h$  est une version translatée de  $\hat{f}$ .

2. *Comportement vis à vis des dilatations.* Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , et soit  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier. Si  $a$  est une constante réelle, on considère une fonction  $f_a$ , dilatée de  $f$  du facteur  $a$ , définie par

$$f_a(t) = f\left(\frac{t}{a}\right) .$$

Alors, on a, par un changement de variable  $u = t/a$ ,

$$\hat{f}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-i\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ia\omega u} du = a\hat{f}(a\omega) . \quad (3.7)$$

Ainsi, la transformée de Fourier de la copie dilatée d'une fonction n'est autre qu'une copie dilatée (d'un rapport inverse) de la transformée de Fourier de la fonction originale.

### 3.2.2. Inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Le problème de l'inversion de la transformation de Fourier est un délicat problème. La transformation de Fourier inverse est définie par :

$$\check{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega .$$

et on note  $\overline{\mathcal{F}}$  l'opérateur linéaire défini par  $\check{f} = \overline{\mathcal{F}}f$ . Le problème qui se pose est de donner un sens à  $\check{f}$ , mais aussi de définir dans quelles conditions et en quel sens  $\overline{\mathcal{F}}$  est effectivement la transformation inverse de la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$ .

Le résultat suivant, appelé *formule d'échange*, joue un rôle essentiel dans ce qui suit.

**LEMME 3.1 (FORMULE D'ÉCHANGE)** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors on a

$$\int f(t)\hat{g}(t)dt = \int \hat{f}(s)g(s)ds . \quad (3.8)$$

*Preuve* : la preuve est une conséquence immédiate du théorème de Fubini. ♠  
Ce résultat permet d'obtenir la première version de la formule d'inversion :

**THÉORÈME 3.2** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , telle que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Si  $f$  est continue en  $t = t_0$ , alors on a

$$f(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t_0} d\omega . \quad (3.9)$$

*Preuve* : Considérons la famille de fonctions intégrables

$$g_n(t) = e^{-|t|/n} . \quad (3.10)$$

Leur transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{g}_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/n} e^{-i\omega t} dt = \frac{2n}{1 + n^2\omega^2} \quad (3.11)$$

La formule d'échange donne alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \hat{g}_n(s-t) ds \quad (3.12)$$

Intéressons nous tout d'abord au terme de gauche de cette égalité. Nous savons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = 1$  pour tout  $t$ , et que par ailleurs,  $|\hat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega t}| \leq |\hat{f}(\omega)|$ , qui est borné. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous assure donc que pour tout  $t$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{quand } n \rightarrow \infty .$$

Passons maintenant au membre de droite, et notons tout d'abord que  $\int \hat{g}_n(u) du = 2\pi$ . Calculons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s+t) \hat{g}_n(s) ds - 2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(s+t) - f(t)] \hat{g}_n(s) ds . \quad (3.13)$$

Supposons que  $f$  soit continue en  $t = t_0$ . Donc, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\rho > 0$  tel que  $s \leq \rho$  entraîne  $|f(t_0 + s) - f(t_0)| \leq \epsilon$ . En traitant de façon différente les valeurs  $s \leq \rho$  et  $s > \rho$  dans le membre de droite de (3.13), nous sommes amenés à considérer

$$\left| \int_{|s| \leq \rho} [f(s+t_0) - f(t_0)] \hat{g}_n(s) ds \right| \leq \epsilon \int_{|s| \leq \rho} \hat{g}_n(s) ds \leq 2\pi\epsilon ,$$

que nous pouvons rendre aussi petit que nous voulons. Quant à l'autre terme, nous avons à considérer

$$\left| f(t_0) \int_{|s| > \rho} |\hat{g}_n(s)| ds \right| = |f(t_0)| 4n \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{1+n^2 s^2} = 4 \left( \frac{\pi}{2} - \arctan(\rho n) \right) |f(t_0)|$$

qui tend vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ , et

$$\left| \int_{|s| > \rho} f(t_0 + s) \hat{g}_n(s) ds \right| \leq \hat{g}_n(\rho) \|f\|_1$$

qui tend lui aussi vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi, la limite du membre de droite de (3.13), au point de continuité  $t = t_0$ , n'est autre que  $f(t_0)$ . Ceci achève la preuve du théorème. ♠

Il est possible de montrer des résultats plus généraux. On citera par exemple le résultat suivant, donné sans démonstration.

**THÉORÈME 3.3** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , telle que  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , et que  $f$  soit continûment dérivable, sauf éventuellement en un nombre fini de points  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a la formule d'inversion en valeur principale

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2} (f(t_+) + f(t_-)) . \quad (3.14)$$

### 3.2.3. Transformation de Fourier et régularité

Nous allons maintenant nous focaliser quelque peu sur les propriétés de régularité des transformées de Fourier des fonctions intégrables. La continuité est réglée par le théorème de Riemann-Lebesgue. Le cas de la dérivabilité de la transformée de Fourier se traite de façon similaire, et fait apparaître la relation entre dérivation de  $\hat{f}$  et multiplication par  $t$  de  $f(t)$ . Supposons que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , et que de plus la fonction  $t \rightarrow t f(t)$  appartienne elle aussi à  $L^1(\mathbb{R})$ . Comme dans la preuve du théorème de Riemann-Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( e^{-i(\omega+\delta)t} - e^{-i\omega t} \right) dt \\ &= \delta \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t) \frac{\sin(t\delta/2)}{t\delta/2} e^{-it\delta/2} e^{-i\omega t} dt . \end{aligned}$$

On peut alors diviser les deux membres de cette équation par  $\delta$ , et utiliser des estimations similaires à celles utilisées dans la preuve du théorème de Riemann-Lebesgue, pour montrer que la limite quand  $\delta \rightarrow 0$  existe, et est précisément égale à la transformée de Fourier de  $t \rightarrow -itf(t)$ . On a donc, sous les hypothèses faites,

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)f(t)e^{-i\omega t} dt \tag{3.15}$$

ce qui revient à dériver sous le signe somme.

En utilisant ce résultat de façon récursive, on obtient

**PROPOSITION 3.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , telle que les fonction  $t \rightarrow tf(t), \dots, t \rightarrow t^m f(t)$  soient elles aussi intégrables. Alors sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  admet en tout point  $m$  dérivées continues, et on a pour tout  $k = 0, \dots, m$

$$\frac{d^k \hat{f}}{d\omega^k}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^k f(t)e^{-i\omega t} dt \tag{3.16}$$

On se pose maintenant la question “duale”, à savoir, “quelle est la transformée de la dérivée d'une fonction ?” Nous allons montrer le résultat suivant :

**PROPOSITION 3.2** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , et supposons que les dérivées  $f^{(k)}, k = 1, \dots, m$  de  $f$  existent presque partout et sont intégrables. Alors pour tout  $k \leq m$ , la fonction  $f^{(k)}$  a pour transformée de Fourier la fonction  $(i\omega)^k \hat{f}(\omega)$  :

$$[\mathcal{F}f^{(k)}](\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega) . \tag{3.17}$$

*Preuve :* Pour démontrer ce résultat, considérons une fonction  $f$  satisfaisant aux hypothèses du théorème, et remarquons tout d'abord que comme  $f'$  est supposée intégrable, on a

$$\int_t^{\infty} f'(s)ds \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

et dont  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe.  $f$  étant intégrable, cette limite est nécessairement nulle. De même, on a  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ . On peut donc intégrer par parties dans l'intégrale qui définit la transformée de Fourier de  $f'$ , et on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt = [-i\omega f(t)]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

et donc

$$(\mathcal{F}f')(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega) \tag{3.18}$$

De façon plus générale, en intégrant par parties autant de fois qu'il le faut, on obtient de même, pour  $k \leq n$ ,

$$(\mathcal{F}f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega) , \tag{3.19}$$

ce qui est le résultat souhaité. ♠

**REMARQUE 3.1** Ce dernier résultat nous donne un critère simple pour vérifier si la transformée de Fourier  $\hat{f}$  d'une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est elle même intégrable, et donc de lui appliquer la version ponctuelle de la formule d'inversion. En effet, si on suppose  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , et  $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ , alors il en résulte que  $\hat{f}$  est bornée, et décroît au moins aussi bien que  $|\omega|^{-2}$  à l'infini. Dans ce cas, on a donc bien  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .

**REMARQUE 3.2** La PROPOSITION 3.2 fournit un exemple d'un comportement général de la transformation de Fourier : *plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier est rapidement décroissante*. Dans le cas particulier, si toutes les dérivées de  $f$  jusqu'à l'ordre  $m$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  (ce qui est une forme de régularité), alors comme  $\widehat{f^{(m)}}$  est bornée (par Riemann-Lebesgue), ceci implique que

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{C}{|\omega|^m}$$

pour une certaine constante positive  $C$  (rappelons que  $\hat{f}$  est également bornée). Il est possible de démontrer des résultats similaires en supposant d'autres formes de régularité.

### 3.2.4. La théorie $L^2(\mathbb{R})$

L'espace  $L^1(\mathbb{R})$  ne donne pas un cadre suffisant pour la théorie de Fourier, et le cadre le plus naturel est  $L^2(\mathbb{R})$ <sup>1</sup>. Cependant, la définition de la transformation de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$  n'est pas facile (pour une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}(\omega)$  n'est pas nécessairement défini pour tout  $\omega$ ).

Il est nécessaire, pour construire la théorie de Fourier sur  $L^2(\mathbb{R})$ , d'employer des moyens détournés, à savoir des arguments de densité. Commençons par considérer l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support borné

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{supp}(f) \text{ est borné} \}, \quad (3.20)$$

Il est aussi utile d'introduire la notion de fonction à décroissance rapide.

**DÉFINITION 3.2 (FONCTION À DÉCROISSANCE RAPIDE)** Soit  $f$  une fonction continue. On dit que  $f$  est à décroissance rapide si pour tout entier positif  $k$ , il existe une constante  $C_k$  telle que l'on ait

$$|f(t)| \leq \frac{C_k}{|t|^k} \quad (3.21)$$

Il s'agit donc de fonctions qui décroissent à l'infini plus vite que toutes les puissances. Ceci nous permet d'introduire l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (parfois appelé aussi classe de Schwartz) :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(k)} \text{ est à décroissance rapide } \forall k \in \mathbb{Z}_+\}. \quad (3.22)$$

On a des relations d'inclusion simples

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \quad (3.23)$$

Deux remarques sont importantes à faire. Tout d'abord, il est facile de voir que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \quad (3.24)$$

En effet, si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , nous savons qu'il existe une constante  $A$  telle que

$$|f(t)| \leq A/(1+t^2).$$

Par conséquent,

$$\|f\|^2 \leq A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} < \infty,$$

ce qui montre que  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

Le second point important est contenu dans la proposition suivante :

**PROPOSITION 3.3**  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  : pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et pour tout nombre  $\epsilon > 0$ , il existe une fonction  $f_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que

$$\|f - f_\epsilon\| \leq \epsilon$$

Un corollaire immédiat est que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est lui aussi dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ . C'est sur cette propriété que nous allons nous appuyer pour étendre la transformation de Fourier à  $L^2(\mathbb{R})$ .

#### La transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  possède une propriété remarquable : la transformée de Fourier d'une fonction appartenant à  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est elle aussi une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Pour nous en convaincre, commençons par faire les remarques suivantes :

1. Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors pour tout polynôme  $t \rightarrow P(t)$ , la fonction  $Pf : t \rightarrow P(t)f(t)$  est elle aussi une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
2. Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et plus généralement, toutes les dérivées  $f^{(k)}$  de  $f$  sont des fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
3.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ .

---

1. L'espace  $L^2(\mathbb{R})$  est également le plus agréable car c'est un espace de Hilbert.

On déduit de ces remarques que la transformation de Fourier est bien définie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  : toute fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  possède une transformée de Fourier bornée. De plus, si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $k$ ,  $t^k f(t)$  est aussi dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et est ainsi intégrable ; donc  $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R})$ , et ce pour tout  $k$ . Donc  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Le même raisonnement s'applique à toutes les dérivées de  $f$  :  $f^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  implique que la fonction  $\omega \rightarrow \omega^k \hat{f}(\omega)$  est bornée, et ce quel que soit  $k$ . Donc nous avons montré que la transformée de Fourier  $\omega \rightarrow \hat{f}(\omega)$  de toute fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  est elle-même une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Inversement,  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ , et la discussion précédente s'applique tout aussi bien à  $\hat{f}$ . Par conséquent, nous avons montré

**THÉORÈME 3.4** *La transformation de Fourier est une bijection entre  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*

Soient  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et posons  $h(\omega) = \overline{\hat{g}(\omega)}$ . Alors un calcul simple montre que  $\hat{h}(t) = 2\pi \overline{g(t)}$ . Appliquons la formule d'échange à  $f$  et  $h$ . Ceci nous donne la *formule de Plancherel* :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega, \quad (3.25)$$

et en particulier dans le cas  $g = f$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.26)$$

(il découle de la discussion ci-dessus que toutes ces intégrales sont convergentes. Par conséquent, dans ce cas, nous avons aussi  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ .) Nous avons donc montré :

**PROPOSITION 3.4** *La transformation de Fourier, correctement renormalisée,  $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi}$  est une isométrie de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*

### Le passage à $L^2(\mathbb{R})$

Le passage au cadre  $L^2(\mathbb{R})$  se fait en utilisant la densité de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et le théorème général d'analyse fonctionnelle suivant :

**THÉORÈME 3.5** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces métriques, et soit  $E' \subset E$  un sous-espace dense de  $E$ . Soit  $\Phi' : E' \rightarrow \Phi'(E') \subset F$  une application isométrique bijective. Alors, il existe une application  $\Phi : E \rightarrow F$ , isométrique et bijective de  $E$  sur  $F$ , qui prolonge  $\Phi'$  (c'est à dire telle que sa restriction à  $E'$  coïncide avec  $\Phi'$ ).*

En considérant le cas  $E = F = L^2(\mathbb{R})$  et  $E' = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\Phi' = \mathcal{F}$  (la transformation de Fourier sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ), et en utilisant les résultats obtenus dans la sous-section précédente, on obtient directement le résultat important suivant :

**THÉORÈME 3.6 (TRANSFORMATION DE FOURIER SUR  $L^2(\mathbb{R})$ )** *La transformation de Fourier sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  se prolonge en une isométrie bijective de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ . De plus, on a la formule de Plancherel :  $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega. \quad (3.27)$$

**REMARQUE 3.3** Il est facile de vérifier que la formule d'échange reste valable dans le cadre  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ce dernier résultat, pour important qu'il soit, n'est pas constructif, au sens où la transformation de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$  n'y est construite que par un argument de passage à la limite abstrait. Il est complété par la proposition suivante, qui prouve que la transformée de Fourier d'une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  s'obtient (aux points où elle est bien définie) via le calcul usuel.

**PROPOSITION 3.5** 1. Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , les deux définitions de la transformée de Fourier  $\hat{f}$  coïncident.

2. Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}(\omega)$  peut s'obtenir comme

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.28)$$

Preuve : 1) Notons temporairement  $\tilde{f}$  la transformée de Fourier de  $f$  au sens  $L^2(\mathbb{R})$ . Etant donnée  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on a d'après la formule d'échange (voir Remarque 3.3)  $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{f}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\tilde{f}(t)dt$ . Par conséquent,  $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)(\tilde{f}(t) - \hat{f}(t))dt = 0$  pour tout  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et donc  $\tilde{f} = \hat{f}$  presque partout.

2) Il suffit de remarquer que pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on peut écrire

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|f - f\chi_{[-T,T]}\| = 0,$$

c'est à dire que  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est arbitrairement bien approximée par des fonctions  $f\chi_{[-T,T]}$ , pour  $T$  assez grand. Or ces dernières appartiennent à  $L^1(\mathbb{R})$ , donc leur transformée de Fourier est bien définie. D'après la formule de Plancherel, on a ainsi  $\lim_{T \rightarrow \infty} \|\hat{f} - \widehat{f\chi_{[-T,T]}}\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \|f - f\chi_{[-T,T]}\| = 0$ , ce qui conclut la preuve de la proposition. ♠

EXEMPLE 3.2 Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(t) = \frac{1}{t+i}.$$

Cette fonction n'est pas intégrable, mais elle appartient à  $L^2(\mathbb{R})$ . Sa transformée de Fourier est facilement obtenue grâce à la méthode des résidus, et on obtient

$$\hat{f}(\omega) = 2i\pi e^{-\omega} \Theta(\omega),$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside.  $\hat{f}$  est bien de carré intégrable, mais est discontinue.

### 3.2.5. Inégalités de Heisenberg

Un ingrédient crucial de la théorie  $L^2(\mathbb{R})$  tient à l'impossibilité de localiser parfaitement une fonction simultanément dans l'espace  $t$  et dans l'espace de Fourier. Ceci est exprimé par les *Inégalités de Heisenberg* formulées pour la première fois par W. Heisenberg, et prouvées en 1927 par N. Wiener :

**THÉORÈME 3.7 (HEISENBERG-WIENER)** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $f \neq 0$ . On pose

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|f(t)|^2 dt, \quad \mu_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

et

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_f)^2 |f(t)|^2 dt, \quad \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \mu_{\hat{f}})^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Alors

$$\sigma_f \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{2}, \tag{3.29}$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si  $f$  est de la forme

$$f(t) = ae^{ibt} e^{-(t-c)^2/d}.$$

Preuve : On peut sans perte de généralité supposer que les quantités considérées sont finies (sinon l'inégalité est trivialement satisfaite). Dans ces conditions, le fait que  $\int \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty$  implique que  $f$  est continue et  $f' \in L^2(\mathbb{R})$ . Supposons tout d'abord que  $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$ . Par intégration par parties, on a

$$\int_u^v t \frac{d}{dt} |f(t)|^2 dt = [t|f(t)|^2]_u^v - \int_u^v |f(t)|^2 dt.$$

Comme  $f, f' \in L^2(\mathbb{R})$ , de même que la fonction  $t \rightarrow tf(t)$ , les intégrales ci-dessus ont une limite lorsque  $u \rightarrow -\infty, v \rightarrow \infty$ , de même que  $u|f(u)|^2$  et  $v|f(v)|^2$ . De plus, ces dernières limites sont nécessairement nulles, sinon on aurait  $f(t) \sim 1/t$  quand  $t \rightarrow \pm\infty$ , ce qui est incompatible avec  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

Donc, en prenant la valeur absolue et en développant la dérivée, on a

$$\|f\|^2 \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\overline{f'(t)} dt \right| + \left| \int_{-\infty}^{\infty} t f'(t)\overline{f(t)} dt \right|$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à ces deux termes, on aboutit à

$$\|f\|^2 \leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt .$$

Or, nous savons que la transformée de Fourier de  $f'$  n'est autre que la fonction  $\omega \rightarrow i\omega \hat{f}(\omega)$ . En utilisant la formule de Plancherel, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|f\|^2 \sigma_f^2 .$$

On a bien le résultat désiré, dans le cas particulier  $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$

Pour le cas général, considérons la fonction  $g$  définie par

$$g(t) = e^{-i\mu_{\hat{f}} t} f(t + \mu_f) .$$

Un calcul immédiat montre que  $\mu_g = \mu_{\hat{g}} = 0$ , de sorte que l'on peut appliquer à  $g$  le résultat que nous venons de montrer. Or, on a  $\|g\| = \|f\|$ ,

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t + \mu_f)|^2 dt = \sigma_f^2 ,$$

et

$$\sigma_{\hat{g}}^2 = \frac{1}{\|\hat{g}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(t + \mu_{\hat{f}})|^2 d\omega = \sigma_{\hat{f}}^2 .$$

Ceci conclut la démonstration. ♠

Ces inégalités nous montrent que l'on ne peut pas espérer trouver de fonction qui soit parfaitement localisée simultanément en temps et en fréquence. Une autre question que l'on peut se poser est une version un peu plus faible : peut-on trouver des fonctions à support compact, dont la transformée de Fourier soit elle aussi à support compact ? Le résultat suivant apporte une réponse négative à cette question.

**PROPOSITION 3.6 (PALEY-WIENER)** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction non nulle à support compact. Alors sa transformée de Fourier ne peut être nulle sur un intervalle. Inversement, si  $\hat{f}$  est à support compact, alors  $f$  ne peut s'annuler sur un intervalle.

*Preuve* : Il suffit de démontrer la seconde assertion, la première s'en déduit immédiatement. Supposons donc que le support de  $\hat{f}$  soit inclus dans  $[-b, b]$ , et que pour tout  $t \in [c, d]$ , on ait  $f(t) = 0$ . Soit  $a = (c + d)/2$ . On sait que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega ,$$

(où l'égalité est ponctuelle : puisque  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  ; de plus, comme le support de  $\hat{f}$  est borné, alors  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , ce qui donne une fonction  $f$  continue). Compte tenu des hypothèses faites sur  $f$  dans  $[c, d]$ , on sait que pour tout entier positif ou nul  $p$ , on a

$$f^{(p)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b (i\omega)^p \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 0 .$$

En développant  $\exp\{i\omega(t - a)\}$  en série entière, on a aussi pour tout  $t$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega a} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(t - a)^p}{p!} \int_{-b}^b (i\omega)^p \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 0 ,$$

ce qui contredit l'hypothèse  $f \neq 0$ . ♠

### 3.2.6. Produit de convolution et produit simple

Etant données deux fonctions  $f$  et  $g$ , leur produit de convolution est la fonction définie par

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds, \quad (3.30)$$

pour tout  $t$  tel que l'intégrale ait un sens. On vérifie immédiatement que si  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $f * g$  est une fonction bornée. De plus, elle est continue.

Plus généralement, on a les inégalités de Young :

LEMME 3.2 Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$ . Alors,  $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ , où

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (3.31)$$

Ce sont les inégalités d'Young. Si de plus  $p$  et  $q$  sont conjugués, c'est à dire si  $1/p + 1/q = 1$ , alors  $f * g$  est bornée et continue.

REMARQUE 3.4 On voit en particulier que tous les espaces  $L^p(\mathbb{R})$  sont stables par convolution avec les fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$  : si  $q = 1$ ,  $r = p$ . Un cas qui nous intéressera plus particulièrement est le cas  $p = 1$ ,  $q = r = 2$ .

La transformation de Fourier associe de façon étroite le produit de convolution au produit simple. Formellement, on a

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}, \quad (3.32)$$

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}. \quad (3.33)$$

Le problème est de donner un sens à ces égalités. On peut en particulier considérer les situations suivantes :

- Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , alors on sait d'après les inégalités d'Young que  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ , et donc que la transformée de Fourier de  $f * g$  est bornée et continue. De même,  $\widehat{f}$  et  $\widehat{g}$  sont bornées et continues. L'égalité (3.33) est donc valable point par point.
- Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^2(\mathbb{R})$  : alors,  $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ , de même que  $\widehat{f} \widehat{g}$ . L'égalité, valable au sens de  $L^2(\mathbb{R})$ , se montre en utilisant un argument de densité. Soit  $g_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  une suite telle que  $g_n \rightarrow g$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . D'après ce qui précède, on sait que  $\widehat{f * g_n} = \widehat{f} \widehat{g_n}$  point par point. De plus, la continuité de la transformation de Fourier implique que  $\widehat{g_n} \rightarrow \widehat{g}$ , et  $\widehat{f} \widehat{g_n} \rightarrow \widehat{f} \widehat{g}$ , ce qui permet de conclure.
- Passons à (3.32), et considérons le cas simple  $f, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ . On peut alors définir  $g$  par transformation de Fourier inverse, et  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ . On a alors  $fg \in L^1(\mathbb{R})$ , et  $\widehat{fg}$  est bornée et continue. De même,  $\widehat{f} * \widehat{g}$  est continue et bornée. Le théorème de Fubini s'applique, et l'égalité est valable point par point.
- Si on suppose maintenant  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors,  $fg \in L^1(\mathbb{R})$ , et on a de nouveau égalité point par point.
- Il est encore possible de donner un sens à ces égalités dans des cas plus généraux, mais il faut travailler plus.

### 3.2.7. Autocorrélation

Etant donnée  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on définit sa fonction d'autocorrélation

$$C_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t-\tau)} dt. \quad (3.34)$$

On vérifie immédiatement que

$$C_f(\tau) \leq \|f\|^2 = C_f(0).$$

De plus,  $C_f$  est une fonction continue.

Etant donnée  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , considérons la fonction définie par

$$\mathcal{S}_f(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2 . \quad (3.35)$$

Cette fonction est appelée *spectre*, ou *densité spectrale* de  $f$ .

Comme  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ , et  $\mathcal{S}_f$  est intégrable. Donc, sa transformée de Fourier inverse a un sens, et définit une fonction bornée continue. Ainsi, on a

$$C_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega . \quad (3.36)$$

C'est le théorème de Wiener-Khintchin (ou théorème de Wold). On a en particulier, pour  $\tau = 0$

$$C_f(0) = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_f(\omega) d\omega .$$

Le spectre  $\mathcal{S}_f$  possède une interprétation physique importante. La valeur  $\mathcal{S}_f(\omega)$  caractérise le "contenu" du signal  $f$  à la fréquence  $\omega$ . L'énergie  $\|f\|^2$  de  $f$  est la somme des valeurs de la densité spectrale à toutes les fréquences. C'est pourquoi on parle également de *spectre d'énergie*, ou de *densité spectrale d'énergie*.

### 3.3. La théorie spectrale de Wiener

La théorie de Wiener a pour but d'étendre la théorie précédente au cas des signaux d'énergie non bornée. Dans ce cas, l'énergie n'étant pas définie, il est nécessaire de raisonner en termes de puissance. La théorie spectrale de Wiener permet d'obtenir une version adaptée à ce nouveau contexte du théorème de Wiener-Khintchin (3.36).

Soit  $f : t \rightarrow f(t)$  une fonction, telle que

$$C_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \bar{f}(t - \tau) dt \quad (3.37)$$

existe et est fini  $\forall \tau \in \mathbb{R}$ .  $C_f$  est appelée *autocovariance* de  $f$ , et

$$C_f(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (3.38)$$

est la *puissance totale* de  $f$ .

On considère l'espace de Besicovitch (ou espace des fonctions quasi périodiques)

$$\mathcal{B}_0 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, C_f(\tau) \text{ existe et est fini pour tout } \tau \in \mathbb{R}\} . \quad (3.39)$$

L'application  $(\cdot, \cdot) : \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$(f, g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \bar{g}(t) dt \quad (3.40)$$

munit  $\mathcal{B}_0$  d'un *produit scalaire indéfini*, c'est à dire vérifie les quatre premières propriétés de la définition A.1.

REMARQUE 3.5 En particulier, toutes les fonctions de carré intégrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sont telles que  $(f, f) = 0$ .

Cependant, les propriétés essentielles sont préservées. En particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est préservée : si  $f, g \in \mathcal{B}_0$ , on a

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \bar{g}(t) dt \leq \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt \right]^{1/2} ,$$

d'où on déduit, par passage à la limite

$$(f, g) \leq \|f\|_{\mathcal{B}_0} \|g\|_{\mathcal{B}_0} , \quad (3.41)$$

**3. SIGNAUX ANALOGIQUES ;  
FILTRAGE ET ECHANTILLONNAGE**

où on a posé, pour  $f \in \mathcal{B}_0$ ,

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} = \sqrt{(f, f)}. \quad (3.42)$$

On en déduit en particulier

$$C_f(\tau) \leq C_f(0) = \|f\|_{\mathcal{B}_0}^2. \quad (3.43)$$

**REMARQUE 3.6** Les fonctions  $t \rightarrow e^{i\lambda t}$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ , appartiennent à  $\mathcal{B}_0$ . Elles forment même un système orthonormé dans  $\mathcal{B}_0$ .

La fonction d'autocovariance possède la propriété fondamentale suivante

**LEMME 3.3** Soit  $f \in \mathcal{B}_0$ . Sa fonction d'autocovariance  $C_f$  est définie non-négative : pour tous  $t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ ,

$$\sum_{m,n=1}^N \alpha_m \bar{\alpha}_n C_f(t_m - t_n) \geq 0.$$

*Preuve* : il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^N \alpha_m \bar{\alpha}_n C_f(t_m - t_n) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{m,n=1}^N \alpha_m \bar{\alpha}_n f(s) \bar{f}(s - t_m + t_n) ds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n f(s - t_n) \right|^2 ds, \end{aligned}$$

et le résultat en découle. ♠

On est alors en position d'utiliser le résultat classique suivant

**THÉORÈME 3.8 (BOCHNER)** Soit  $F$  une fonction définie non-négative, continue en  $t = 0$ . Alors il existe une mesure non-négative  $\nu$ , telle que pour tout  $t$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\nu(\omega). \quad (3.44)$$

Considérons une décomposition de Lebesgue de la mesure  $\nu$  :

$$\nu = \nu_c + \nu_s, \quad (3.45)$$

où  $\nu_c$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et  $\nu_s$  est singulière. Considérons tout d'abord des cas séparés :

- Si  $\nu = \nu_c$ , alors il existe une fonction  $\omega \rightarrow \mathcal{E}_f(\omega)$  intégrable, telle que pour tout Borélien  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $\nu(E) = \int_E \mathcal{E}_f(\omega) d\omega$ . La fonction  $\mathcal{E}_f$  est appelée *spectre de puissance*, ou *densité spectrale de puissance*.
- Si  $\nu = \nu_s$ , on peut de nouveau distinguer deux cas :

$$\nu = \nu_p + \nu_{sc}.$$

On se limitera au cas  $\nu = \nu_p$ . Alors, il existe une suite croissante de fréquences  $\omega_1, \omega_2, \dots$  telle que

$$\nu_p(E) = \sum_{\omega_j \in E} p(\omega_j)$$

où  $p$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{N}$ .

- dans le cas mixte, i.e. si  $\nu = \nu_c + \nu_p$ , on aboutit à la relation de Wiener-Khintchin, à mettre en parallèle avec (3.36).

$$C_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega + \sum_j p(\omega_j) e^{i\omega_j\tau} \quad (3.46)$$

Ainsi, dans le cas des signaux de puissance finie (et non plus d'énergie finie), on peut encore obtenir une représentation spectrale, et introduire une notion de densité spectrale adaptée. Cette théorie est à la base de la théorie spectrale de Wiener pour les signaux aléatoires.

### 3.4. Filtrage linéaire (signaux d'énergie finie)

Le filtrage est généralement considéré comme l'opération de base du traitement du signal. Le filtrage (linéaire) est utilisé pour résoudre de nombreux problèmes, allant de la modification de signaux (pour le codage par modulation d'amplitude ou de fréquence) à l'identification de paramètres en passant par le débruitage.

On se limitera ici au problème du filtrage linéaire. Comme on va le voir, un filtre linéaire est souvent un opérateur de convolution. C'est en particulier le cas des filtres analogiques qui peuvent être implémentés par des circuits électriques. Cependant ça n'est pas le cas le plus général, et on verra des contre-exemples simples. On se posera alors le problème classique de *synthèse de filtres* : étant donné un filtre  $T$ , comment l'approximer par un filtre réalisable par un circuit électronique.

#### 3.4.1. Terminologie

Les traiteurs de signaux utilisent volontiers une terminologie quelque peu différente de la terminologie mathématique classique. En particulier :

- *Système* : Un système est une transformation qui associe à un signal d'énergie finie un autre signal d'énergie finie. C'est l'analogie d'un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R})$ .
- *Système linéaire* : opérateur linéaire borné sur  $L^2(\mathbb{R})$ .
- *Filtre linéaire* : opérateur linéaire qui commute avec les translations.

Cette dernière contrainte signifie que le filtre  $K : f \rightarrow Kf$  est tel que si on définit  $g$  par  $g(t) = f(t - \tau)$ , on a  $Kg(t) = Kf(t - \tau)$ .

#### 3.4.2. Filtres linéaires

**DÉFINITION 3.3** *Un filtre linéaire est un opérateur  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  qui commute avec les translations : pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ , en définissant  $g \in L^2(\mathbb{R})$  par  $g(t) = f(t - \tau)$ , on a*

$$Tg(t) = Tf(t - \tau) .$$

Les exemples les plus simples de filtres linéaires sont les opérateurs de convolution. Soit  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , et soit  $K_g$  l'opérateur défini par

$$K_g f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) f(t - s) ds . \quad (3.47)$$

Il est immédiat que  $K_g$  est borné, et que c'est un filtre linéaire. On a aussi

$$\widehat{K_g f}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) ,$$

de sorte qu'un filtrage de convolution se ramène à un produit simple dans l'espace de Fourier. Plus généralement, on a le résultat suivant, que nous donnons sans démonstration :

**THÉORÈME 3.9** *Soit  $T$  un filtre linéaire. Alors il existe une fonction  $m \in L^\infty(\mathbb{R})$  telle que*

$$\widehat{Tf}(\omega) = m(\omega) \hat{f}(\omega) . \quad (3.48)$$

*$m$  est appelée fonction de transfert du filtre.*

**REMARQUE 3.7** Il est immédiat que l'on a  $\widehat{Tf} = m\hat{f}$ , et donc, en introduisant le *spectre d'énergie*,

$$\mathcal{S}_T f(\omega) = |m(\omega)|^2 \mathcal{S}_f(\omega) . \quad (3.49)$$

On dit que le filtrage modifie le contenu fréquentiel du signal. Par exemple, si  $m(\omega) \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow \infty$ , la décroissance à l'infini de  $\widehat{Tf}$  est plus rapide que celle de  $\hat{f}$ , et l'on s'attend donc à ce que  $Tf$  soit une fonction plus "régulière" que  $f$ . Nous verrons des conséquences importantes de cette remarque plus loin.

On considère souvent des filtres linéaires de la forme  $K_h$ , où  $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ .

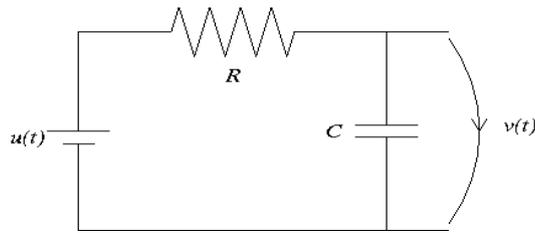


FIGURE 3.1.: Le filtre RC

**DÉFINITION 3.4** 1. Le filtre  $K_h$  est dit stable si il est continu de  $L^\infty(\mathbb{R})$  sur  $L^\infty(\mathbb{R})$ .  
 2. Le filtre  $K_h$  est dit réalisable (ou causal) si  $h(t) = 0$  pour tout  $t \leq 0$ .  
 3. Le filtre  $K_h$  est dit dynamique si il est stable et réalisable.  
 La fonction  $h$  est appelée réponse impulsionnelle du filtre. Sa transformée de Fourier (quand elle est définie) coïncide avec la fonction de transfert  $m$ .

La contrainte de causalité est importante quand il s'agit de donner une implémentation "physique" du filtre (par un circuit électrique par exemple). En effet, si  $h(t) \neq 0$  sur un ensemble de mesure non-nulle de  $\mathbb{R}^-$ , le calcul de  $K_h f(t)$  pour un temps  $t$  donné

$$K_h f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) f(t-s) ds$$

utilise des valeurs  $f(t-s)$  antérieures à  $t$ , ce qui est irréalisable.

### 3.4.3. Exemples

#### Filtres idéaux

1. Le *filtre passe-bas idéal* : étant donnée une fréquence  $\omega_0$  (appelée *fréquence de coupure*), le filtre passe-bas idéal est défini par

$$m(\omega) = \chi_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega) .$$

Il est immédiat de montrer que la réponse impulsionnelle  $t \rightarrow h(t)$  du filtre est de la forme

$$h(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} .$$

Donc,  $h \notin L^1(\mathbb{R})$ , et le filtre n'est pas stable. Il n'est pas réalisable non plus de façon évidente.

2. Le *filtre passe-haut idéal* : étant donnée une *fréquence de coupure*  $\omega_0$ , le filtre passe-haut idéal est défini par

$$m(\omega) = 1 - \chi_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega) .$$

On vérifie immédiatement qu'il n'est ni stable ni réalisable.

3. On définit également des filtres *passe-bande* (définis par  $m(\omega) = \chi_{[a,b]}(\omega)$ ) et des filtres *coupe-bande* (définis par  $m(\omega) = 1 - \chi_{[a,b]}(\omega)$ ), qui ne sont eux aussi ni stables ni réalisables.

#### Circuits analogiques

Une façon simple de construire des filtres réalisables est d'utiliser des circuits électriques. Par exemple, un circuit du type de celui de la Fig. 3.1.

En notant  $v(t) = Q(t)/C$  la tension aux bornes du condensateur, la loi d'Ohm s'écrit

$$Ri(t) + v(t) = u(t) , \tag{3.50}$$

ce qui entraîne, puisque  $i(t) = Q'(t) = C v'(t)$ , que la tension  $v(t)$  satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$RC v'(t) + v(t) = u(t) . \tag{3.51}$$

Pour résoudre cette dernière, il est utile d'introduire la fonction  $w(t) = v(t)e^{t/RC}$ . On a donc

$$w'(t) = \frac{1}{RC} e^{t/RC} u(t) \quad (3.52)$$

et la solution est

$$w(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{s/RC} u(s) ds, \quad (3.53)$$

soit

$$v(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/RC} u(s) ds \quad (3.54)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) u(s) ds. \quad (3.55)$$

où nous avons posé

$$h(t) = \Theta(t) \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

$\Theta(t)$  étant la fonction d'Heaviside, qui vaut 1 pour  $t \geq 0$  et 0 pour  $t < 0$ . Nous sommes bien en présence d'un filtre réalisable et stable.

Plus généralement, on peut à partir de circuits analogiques obtenir des systèmes linéaires dont l'entrée  $u(t)$  et la sortie  $v(t)$  sont liés par une équation différentielle du type

$$a_N v^{(N)} + a_{N-1} v^{(N-1)} + \dots + a_0 v = b_M u^{(M)} + b_{M-1} u^{(M-1)} + \dots + b_0 u, \quad (3.56)$$

complétée par des conditions initiales adéquates. Un calcul immédiat montre que la fonction de transfert correspondante  $m(\omega)$  est donnée par

$$m(\omega) = \frac{a_N (i\omega)^N + \dots + a_0}{b_M (i\omega)^M + \dots + b_0} = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} \quad (3.57)$$

Pour que la fonction de transfert soit bornée, on a nécessairement  $M \geq N$ . Il faut également que le dénominateur soit borné inférieurement (en module) par une constante *strictement* positive. Comme on le voit, la variable  $z = i\omega$  s'introduit naturellement<sup>2</sup>.

Le résultat suivant donne une première caractérisation de la structure des filtres réalisables que l'on peut espérer obtenir à base de circuits analogiques.

**PROPOSITION 3.7** *Le filtre défini par la fonction de transfert (3.57) est réalisable si et seulement si les racines de  $D(z)$  ont une partie réelle négative.*

Preuve : Notons  $\alpha_k$  les racines (complexes) de  $D(z)$ , et soit  $m_k$  leur multiplicité :

$$D(z) = C \prod_k (z - \alpha_k)^{m_k}.$$

En décomposant  $m(\omega)$  en éléments simples, on aboutit à une forme

$$m(\omega) = C' + \sum_k \sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{P_\ell(i\omega)}{(i\omega - \alpha_k)^\ell},$$

où  $P_\ell$  est un polynôme de degré inférieur à  $\ell$ .  $C'$  est une constante, qui correspond à un multiple de l'identité. On supposera dans la suite que  $C' = 0$  (ce qui est le cas dès que  $M > N$ ).

Soit  $\rho(t) = \Theta(t)e^{\alpha t}$ , où  $\Re(\alpha) < 0$ . Un calcul immédiat donne  $\hat{\rho}(\omega) = 1/(i\omega - \alpha)$ . Plus généralement, si

$$\rho_\ell(t) = (-it)^{\ell-1} e^{\alpha t} \Theta(t),$$

on a

$$\hat{\rho}_\ell(\omega) = \frac{(\ell-1)!}{(i\omega - \alpha)^\ell}.$$

2. Tout comme s'était introduite naturellement la variable  $z = e^{i\omega}$  dans le cas des filtres numériques.

Donc, la transformée de Fourier inverse de  $P_\ell(i\omega)/(i\omega - \alpha)^\ell$  est

$$P_\ell \left( \frac{d}{dt} \right) \frac{t^{\ell-1} e^{\alpha t}}{(\ell-1)!} \Theta(t) .$$

Par conséquent, si  $\Re(\alpha_k) > 0$  pour tout  $k$ , la réponse impulsionnelle du filtre est de la forme

$$h(t) = \Theta(t) \sum_k Q_k(t) e^{\alpha_k t} ,$$

où les  $Q_k$  sont des polynômes. Il s'agit bien de filtres stables et réalisables.

Inversement, supposons que pour une certaine racine  $\alpha$  de  $D(z)$ , on ait  $\Re(\alpha) > 0$ . Un calcul similaire au précédent montre que la transformée de Fourier inverse de  $P_\ell(i\omega)/(i\omega - \alpha)^\ell$  est proportionnelle à  $\Theta(-t)$ , ce qui est incompatible avec la causalité. Ceci achève la preuve de la proposition. ♠

### Synthèse de filtres

On s'intéresse souvent au problème de construire des filtres à partir d'une réponse attendue sur le spectre du signal. Plus précisément, on recherche à construire un filtre de fonction de transfert  $m(\omega)$  telle que  $|m(\omega)|^2 = M(\omega)$ , où  $M$  est une fonction donnée, paire à valeurs réelles positives.

**LEMME 3.4** Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels, pair et non négatif. Alors, il existe un polynôme  $\omega \rightarrow Q(i\omega)$  tel que  $P(\omega) = |Q(i\omega)|^2$ .

*Preuve* : Soit  $\gamma \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ . D'après la parité de  $P$ ,  $-\gamma$  est également racine de  $P$ . Si  $\gamma$  est complexe,  $\bar{\gamma}$  et  $-\bar{\gamma}$  sont également racines. Si  $\gamma \notin \mathbb{R}$  et  $\gamma \notin i\mathbb{R}$ ,  $P(\omega)$  contient nécessairement un terme de la forme

$$\begin{aligned} (\omega - \gamma)(\omega - \bar{\gamma})(\omega + \gamma)(\omega + \bar{\gamma}) &= (i\omega - \alpha)(i\omega - \bar{\alpha})(i\omega + \alpha)(i\omega + \bar{\alpha}) \\ &= |(i\omega - \alpha)(i\omega - \bar{\alpha})|^2 \\ &= |(i\omega + \alpha)(i\omega + \bar{\alpha})|^2 , \end{aligned}$$

avec  $\alpha = i\gamma$ . Ce terme a bien la forme annoncée.

Si  $\gamma \in \mathbb{R}$ , alors  $\gamma$  est nécessairement de multiplicité paire : en effet,  $P(\omega)$  contient obligatoirement un terme en  $(\omega^2 - \gamma^2)^\mu$ ,  $\mu$  étant la multiplicité de  $\gamma$ , et pour que  $P$  soit positif  $\mu$  doit nécessairement être pair. Donc

$$(\omega^2 - \gamma^2)^\mu = \left| (\omega^2 - \gamma^2)^{\mu'} \right|^2 = \left| (i\omega - \alpha)^{\mu'} (i\omega + \alpha)^{\mu'} \right|^2 ,$$

avec  $\mu' = \mu/2 \in \mathbb{Z}^+$  et toujours  $\alpha = i\gamma$ , est lui aussi de la forme annoncée.

Si  $\gamma \in i\mathbb{R}$ ,  $P(\omega)$  contient nécessairement un terme en  $(\omega^2 - \gamma^2)^\mu$ , qui est toujours positif, et de la forme

$$(\omega^2 - \gamma^2)^\mu = |(i\omega - \alpha)^\mu|^2 .$$

Il suffit alors d'utiliser la factorisation de  $P$  pour obtenir le résultat. ♠

**REMARQUE 3.8** Si nécessaire, il est possible de construire le polynôme  $\omega \rightarrow Q(i\omega)$  en n'utilisant que les racines  $\alpha$  de partie réelle négative, et les racines imaginaires pures avec la moitié de leur multiplicité.

On peut maintenant passer au cas des filtres rationnels. Soit donc  $M$  une fonction rationnelle de  $\omega$ , de la forme

$$M(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} .$$

On peut alors appliquer le traitement précédent à  $N(\omega)$  et  $D(\omega)$ , et on obtient :

**PROPOSITION 3.8** Soit  $M : \omega \rightarrow M(\omega) = N(\omega)/D(\omega)$  une fraction rationnelle, bornée, où  $N$  et  $D$  sont deux polynômes réels pairs et strictement positifs. Alors il existe deux polynômes  $n(i\omega)$  et  $d(i\omega)$  tels que

$$M(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \left| \frac{n(i\omega)}{d(i\omega)} \right|^2 . \quad (3.58)$$

De plus,  $n$  et  $d$  peuvent être choisis de sorte que le filtre dont la fonction de transfert est  $\omega \rightarrow n(i\omega)/d(i\omega)$  soit réalisable.

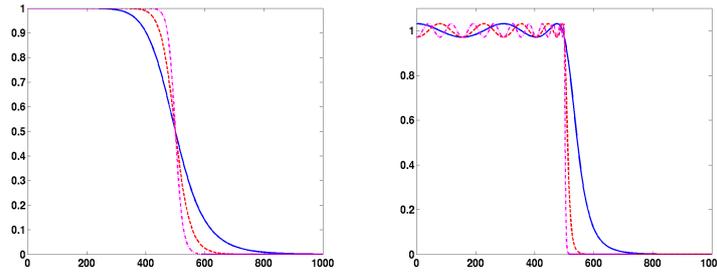


FIGURE 3.2.: Fonctions de transfert des filtres de Butterworth (à gauche) et Chebyshev (à droite) d'ordres 5 (trait plein), 10 (tirets) et 20 (tirets et pointillés).

*Preuve :* Il suffit d'utiliser le lemme précédent. Le dénominateur nécessite un traitement particulier, afin d'assurer la causalité du filtre. Cependant, la REMARQUE 3.8 montre qu'il est possible de se limiter dans ce cas à des racines de partie réelle négative (le fait que la fraction rationnelle considérée soit bornée implique que le dénominateur n'a aucune racine imaginaire pure). ♠

EXEMPLE 3.3 Les deux familles classiques d'exemples de filtres rationnels approchant des filtres idéaux sont fournies par les filtres de Butterworth et les filtres de Chebyshev. On se limite ici au cas des filtres passe-bas.

Les filtres de Butterworth sont les plus simples, et sont donnés par une fonction de transfert de la forme

$$M_n^B(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \quad (3.59)$$

$M_n^B(\omega)$  approche la fonction de transfert (en module carré) d'un filtre passe-bas idéal, de fréquence de coupure  $\omega_c$ . Les pôles correspondants sont égaux aux racines  $2n$ -ièmes de  $-1$ , multipliées par  $\omega_c$ . L'avantage des filtres de Butterworth est que la fonction  $M_n^B(\omega)$  est "plate" en  $\omega \approx 0$ . Plus précisément, elle se comporte comme  $M_n^B(\omega) \sim 1 + \omega^{2n}$  pour  $\omega \approx 0$ .

Une alternative est fournie par les filtres de Chebyshev, définis à partir des polynômes de Chebyshev

$$T_n(\omega) = \cos(n \arccos \omega),$$

par

$$M_n^C(\omega) = \frac{1}{1 + \epsilon T_{2n}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}. \quad (3.60)$$

Le paramètre  $\omega_c$  contrôle la largeur du filtre. Les filtres de Chebyshev présentent quant à eux l'avantage d'être mieux localisés (plus "étroits"), mais ceci se fait au prix d'oscillations apparaissant pour  $\omega \approx 0$ . L'amplitude des oscillations est gouvernée par le paramètre  $\epsilon$ .

## 3.5. Filtrage adapté

On se pose maintenant le problème "pratique" suivant. Comment construire un système linéaire  $T$  (plus précisément, un filtre linéaire) dont la réponse  $Tf(t_0)$  en  $t = t_0$  soit maximale quand une entrée donnée  $f$  lui est présentée? Le cadre naturel pour ce problème est le cadre des signaux aléatoires. Cependant, on peut développer une première approche dans le cadre déterministe (l'aléatoire étant généralement invoqué pour traiter les bruits de mesure).

### 3.5.1. Le filtre adapté, version déterministe

Plus précisément, soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , et soit  $T$  un filtre linéaire. On sait donc que

$$Tf(t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) m(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

---

3. SIGNAUX ANALOGIQUES;  
FILTRAGE ET ECHANTILLONNAGE

---

pour une certaine fonction  $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Pour s'affranchir de la normalisation de  $m$ , il faut introduire une contrainte. On cherche à résoudre le problème

$$\sup_{m \in L^2(\mathbb{R})} |Tf(t_0)| \quad \text{avec la contrainte} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |m(\omega)|^2 d\omega = 2\pi. \quad (3.61)$$

Plus généralement, soit  $R$  une fonction réelle telle que  $\hat{f}/\sqrt{R} \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\hat{f}/R \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Ces conditions sont vérifiées dès que  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et qu'il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que pour tout  $\omega$ ,  $0 < C_1 \leq R(\omega) \leq C_2 < \infty$ , mais ceci n'est pas une condition nécessaire. On s'intéresse alors au problème

$$\sup_{m \in L^2(\mathbb{R})} |Tf(t_0)| \quad \text{avec la contrainte} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)|m(\omega)|^2 d\omega = 2\pi. \quad (3.62)$$

REMARQUE 3.9 On suppose implicitement que  $m \in L^2(\mathbb{R})$ , ce qui permet d'assurer que  $Tu$  est bornée pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R})$ .

Dans un cas comme dans l'autre, la réponse est contenue dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} |Tf(t_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\omega)}{\sqrt{R(\omega)}} \sqrt{R(\omega)} m(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{R(\omega)} d\omega} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) |m(\omega)|^2 d\omega} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{R(\omega)} d\omega}. \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité est atteinte si et seulement si

$$\sqrt{R(\omega)} m(\omega) = C e^{-i\omega t_0} \frac{\overline{\hat{f}(\omega)}}{\sqrt{R(\omega)}},$$

pour une certaine constante  $C$ . En tenant compte de la normalisation, on aboutit ainsi à la solution suivante

$$m(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\|\hat{f}/\sqrt{R}\|} \frac{\overline{\hat{f}(\omega)} e^{-i\omega t_0}}{R(\omega)}. \quad (3.63)$$

Les hypothèses faites assurent que  $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ , et on a ainsi

$$Tf(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \|\hat{f}/\sqrt{R}\|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{R(\omega)} e^{i\omega(t-t_0)} dt. \quad (3.64)$$

l'opérateur  $T$  ainsi défini est un filtre, et on a pour tout  $t$ ,

$$|Tf(t)| \leq Tf(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}/\sqrt{R}\|. \quad (3.65)$$

Notons que dans le cas particulier  $R = 1$ , on a  $m(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)} e^{-i\omega t_0} / \|f\| = \hat{h}(\omega)$ , avec  $h(t) = \overline{\hat{f}(t-t_0)} / \|f\|$ . On a donc montré

PROPOSITION 3.9 Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , et soit  $R$  une fonction réelle telle que  $\hat{f}/\sqrt{R} \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\hat{f}/R \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

1. La solution du problème (3.61) est donnée par le filtre  $T = K_h$ , de réponse impulsionnelle  $h$ , telle que

$$h(t) = \frac{1}{\|f\|} \bar{f}(t_0 - t) . \quad (3.66)$$

2. La solution du problème (3.62) est donnée par le filtre  $T$  défini par

$$Tg(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\omega)\bar{\hat{g}}(\omega)}{R(\omega)} e^{i\omega(t-t_0)} dt . \quad (3.67)$$

3. On a toujours, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|Tf(t)| \leq Tf(t_0) . \quad (3.68)$$

REMARQUE 3.10 Notons que si  $m \in L^2(\mathbb{R})$ , c'est à dire si  $\hat{f}/R \in L^2(\mathbb{R})$ , le filtre adapté  $T$  est continu de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^\infty(\mathbb{R})$ , ce qui est une propriété importante d'un point de vue pratique.

### 3.5.2. Application à la détection

Ce résultat a des conséquences pratiques importantes. Considérons le problème de détection suivant : supposons connu un signal de référence  $f_0$ , et supposons que l'on dispose d'observations de la forme

$$f(t) = Af_0(t - \tau) + b(t) ,$$

où  $A$  et  $\tau$  sont deux paramètres inconnus,  $b \in L^2(\mathbb{R})$  représente un bruit de mesure dont seul le spectre d'énergie  $S_b(\omega) = |\hat{b}(\omega)|^2$  est connu. Le problème de détection optimale consiste à déterminer les valeurs des paramètres  $A$  et  $\tau$  à partir de l'observation.

Considérons tout d'abord le cas  $b = 0$ . On commence alors par construire un système linéaire  $T$  tel que  $Tf_0(0)$  soit le plus grand possible. La solution nous est donnée par la théorie ci-dessus :  $T = K_h$ , où  $h$  est définie par  $h(t) = C\bar{f}(-t)$ . On sait de plus que pour tout  $t$ ,  $|Tf_0(t)| \leq Tf_0(0)$ . Alors, compte tenu du fait que le filtre  $T$  est linéaire et commute avec les translations, on sait que

$$Tf(t) = ATf_0(t - \tau)$$

et  $Tf$  sera donc maximal en  $t - \tau = 0$ , donc en  $t = \tau$ . Ceci permet la mesure du temps inconnu  $\tau$  :

$$\tau = \arg \sup_t |Tf(t)| . \quad (3.69)$$

Quant à la mesure de la constante  $A$ , elle s'effectue, une fois  $\tau$  déterminé, via

$$A = \frac{Tf(\tau)}{\|f_0\|^2} . \quad (3.70)$$

Un exemple de détection utilisant le filtre adapté est montré en FIG. 3.3.

REMARQUE 3.11 Notons que dans ce cas, la recherche de  $\tau$  peut aussi se comprendre de la façon suivante :

$$Tf(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\bar{\hat{f}_0}(\omega)e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\bar{f}_0(s - t) ds ,$$

c'est à dire par une série de "comparaisons" (via le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R})$ ) du signal  $f$  avec des copies translattées  $f_0(\cdot - t)$  du signal de référence.

Considérons maintenant le cas  $b \neq 0$ . On cherche toujours à construire un système qui fournisse une réponse maximale en  $t = \tau$ , mais il faut maintenant tenir compte de la perturbation apportée par le bruit. En effet, rien ne sert de construire un système qui "amplifierait" le signal en  $t = \tau$  si celui-ci amplifie également le bruit. Ceci conduit à normaliser la réponse du système au bruit, de la façon suivante : étant donné un filtre quelconque  $T$ , on a alors

$$\begin{aligned} Tf(t) &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\omega)m(\omega)e^{i\omega(t-\tau)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}(\omega)m(\omega)e^{i\omega t} d\omega \\ &= S(t) + B(t) . \end{aligned}$$

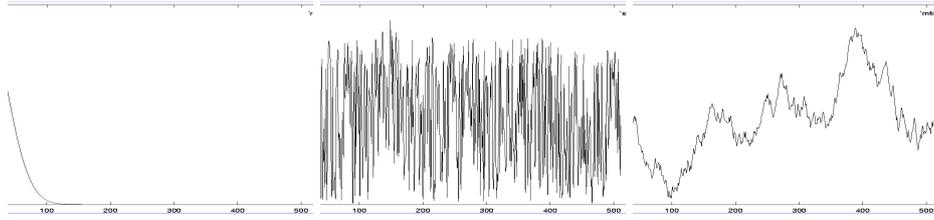


FIGURE 3.3.: Exemple de filtrage adapté : Le signal de référence  $f_0$  (à gauche) a été décalé, et plongé dans un bruit blanc (signal bruité au centre) ; la sortie du filtre adapté (à droite) montre un maximum clairement marqué, qui donne une estimation du décalage.

On dit que  $S$  est le signal en sortie du filtre, et  $B$  est le bruit en sortie du filtre. On impose alors  $\|B\| = 1$ , c'est à dire, compte tenu de la formule de Plancherel

$$\|m\hat{b}\|^2 = \|\hat{B}\|^2 = 2\pi .$$

On est alors confronté à un problème de type (3.62), dans le cas  $R = S_b$ . La solution est connue, et le filtre adapté est donné par la formule suivante : pour tout  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$Tg(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|\hat{f}_0/\hat{b}\|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\omega)\overline{\hat{f}_0(\omega)}}{|\hat{b}(\omega)|^2} e^{i\omega t} d\omega . \quad (3.71)$$

De là, on obtient

$$S(t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\|\hat{f}_0/\hat{b}\|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}_0(\omega)|^2}{|\hat{b}(\omega)|^2} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega ,$$

et la valeur maximale de  $S$  est

$$|S_{max}| = S(\tau) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}_0/\hat{b}\| .$$

Ce résultat permet donc *a priori* de déterminer  $\tau$ . Une fois que  $\tau$  a été déterminé, on peut alors en déduire la constante  $A$ .

REMARQUE 3.12 Pour que cette approche ait un sens, c'est à dire pour retomber dans le cadre décrit dans la section précédente, il faut bien entendu faire des hypothèses sur  $f_0$  et  $b$ . Il faut en particulier supposer  $\hat{f}_0/\sqrt{S_b} \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\hat{f}_0/S_b \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

### 3.5.3. Fonction d'ambigüité radar

Le problème de la détection radar est encore plus complexe. En effet, dans le cas du radar, le signal à détecter (généralement un signal émis, qui a été réfléchi par une "cible" en mouvement) est non seulement décalé dans le temps (d'une quantité proportionnelle à la distance de la cible), mais aussi modulé, c'est à dire décalé en fréquence par effet Doppler, d'une quantité proportionnelle à la vitesse relative de la cible (tout au moins lorsque celle-ci est faible) :

$$f(t) = Af_0(t - \tau)e^{i\xi t} .$$

On peut également développer une théorie du filtrage optimal adaptée à cette situation. Sans entrer dans les détails, considérons la fonction (appelée fonction d'ambigüité) de deux variables suivante

$$\mathcal{A}_f(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f_0(t-b)}e^{-i\omega t} dt . \quad (3.72)$$

Il est clair que d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\mathcal{A}_f(b, \omega)| \leq \mathcal{A}_f(\tau, \xi) = A \|f_0\|^2 .$$

Par conséquent, calculer numériquement la fonction d'ambigüité radar d'un signal observé  $f$  et en rechercher les maxima fournit un moyen d'estimer les paramètres inconnus  $\tau$  et  $\xi$ .

## 3.6. Bancs de filtres, et analyse de Fourier locale

### 3.6.1. Bancs de filtres

Une pratique courante en traitement des signaux (sons, images,...) est de décomposer les signaux en composantes correspondant à différentes *bandes de fréquence*. On utilise pour cela une famille de filtres passe-bande, que l'on nomme un *banc de filtres*. Un banc de filtres est donc une famille de filtres<sup>3</sup>  $\mathbf{T} = \{T_k, k \in \mathbb{Z}\}$ , définis par des fonctions de transfert  $m_k = \hat{h}_k$ , les  $h_k$  étant les réponses impulsionnelles des filtres. Bien que rien ne nous y oblige théoriquement, on choisit généralement les réponses impulsionnelles  $h_k \in L^1(\mathbb{R})$ , ce qui implique donc  $m_k \in L^\infty(\mathbb{R})$  pour tout  $k$ . Le banc de filtres  $\mathbf{T}$  associe donc à un signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une famille de signaux  $(\mathbf{T}f)_k, k \in \mathbb{Z}$  :

$$\mathbf{T} : f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbf{T}f \in \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} L^2(\mathbb{R})_k \quad \text{où } (\mathbf{T}f)_k = h_k * f .$$

L'espace

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} L^2(\mathbb{R})_k = \{f_k \in L^2(\mathbb{R}), k \in \mathbb{Z}\}$$

est muni d'une structure d'espace de Hilbert grâce au produit Hermitien

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle u_k, v_k \rangle .$$

Pour inverser  $\mathbf{T}$ , on a recours à l'adjoint  $\mathbf{T}^*$  de  $\mathbf{T}$ , obtenu comme suit :  $\forall u = \{u_k, k \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{H}$  et  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\langle \mathbf{T}^* u, f \rangle = \langle u, \mathbf{T}f \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle u_k, h_k * f \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \tilde{h}_k * u_k, f \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_k * u_k, f \right\rangle$$

où on a introduit la fonction  $\tilde{h}_k$  définie par

$$\tilde{h}_k(t) = \overline{h_k(-t)} .$$

On a donc

$$\mathbf{T}^* u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_k * u_k$$

**DÉFINITION 3.5** *Le banc de filtres défini par les réponses impulsionnelles  $h_k$  est à reconstruction parfaite si  $\mathbf{T}^* \mathbf{T} = 1$ .*

on voit immédiatement que le banc de filtres est à reconstruction parfaite si et seulement si  $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a

$$\sum_k \tilde{h}_k * h_k * f = f$$

ou, dans le domaine de Fourier

$$\sum_k \widehat{\tilde{h}_k * h_k} = 1 .$$

On vérifie facilement que  $\widehat{\tilde{h}_k}(\omega) = \overline{\widehat{h_k}(\omega)}$ , ce qui donne directement

**PROPOSITION 3.10** *Le banc de filtres défini par la famille de réponses impulsionnelles  $\{h_k, k \in \mathbb{Z}\}$  est à reconstruction parfaite si et seulement si*

$$\sum_k |\widehat{h_k}(\omega)|^2 = 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

3. Comme à l'accoutumée, on idéalise la situation en prenant une famille infinie, en pratique la famille est évidemment une famille finie.

Les bancs de filtres sont généralement construits à base de filtres passe-bande, et permettent ainsi de décomposer un signal en somme de signaux dont la transformée de Fourier est localisée à l'intérieur de « bandes » bien définies du domaine fréquentiel.

REMARQUE 3.13 Notons que si les fonctions de transfert  $\hat{h}_k$  des filtres sont à support borné dans des intervalles  $\Omega_k$ , c'est à dire  $\hat{h}_k(\omega) = 0 \forall \omega \notin \Omega_k$ , alors pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $h_k * f$  est à bande limitée à  $\Omega_k$  (car  $\widehat{h_k * f} = \hat{h}_k \hat{f}$ ). Une variante du théorème d'échantillonnage (voir ci-dessous) permet alors de montrer que  $h_k * f$  est complètement caractérisé par les échantillons

$$(h_k * f)_n = (h_k * f) \left( \frac{n}{\eta_k} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t) f \left( \frac{n}{\eta_k} - t \right) dt ,$$

pour peu que les fréquences d'échantillonnage  $\eta_k$  satisfassent

$$\eta_k \geq |\Omega_k| ,$$

$|\Omega_k|$  étant la longueur de l'intervalle  $\Omega_k$ .

### 3.6.2. Transformation de Fourier à fenêtre

La transformation de Fourier à fenêtre peut être vue alternativement comme une variante continue des bancs de filtres décrits ci-dessus, soit comme une version localisée de la transformation de Fourier. La construction est effectuée comme suit. Soit  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , telle que  $g \neq 0$ . La fonction  $g$  est typiquement une fonction localisée et régulière, qui sera appelée *fenêtre*, ou *fenêtre d'analyse*.

DÉFINITION 3.6 La transformée de Fourier à fenêtre de  $f$  associée à la fenêtre  $g$  est la fonction de deux variables réelles  $G_f$  donnée par

$$G_f(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{g}(t-b) e^{-i\omega(t-b)} dt . \quad (3.73)$$

Si on suppose que la fenêtre  $g$  est une « bosse » (par exemple une Gaussienne) centrée sur l'origine, on voit que la fonction  $G_f(b, \cdot)$  est à une constante près la transformée de Fourier d'une fonction obtenue en « localisant »  $f$  dans un voisinage de  $t = b$ .

Remarquons que la transformée de Fourier à fenêtre de  $f$  s'interprète aussi sous la forme

$$G_f(b, \omega) = \langle f, g_{(b, \omega)} \rangle$$

de la famille de produits scalaires du signal  $f$  avec la famille de fonctions  $g_{(b, \omega)}$ , appelés *atomes temps-fréquence*, et définis comme des copies translatées et modulées de la fenêtre  $g$  :

$$g_{(b, \omega)}(t) = g(t-b) e^{i\omega(t-b)} .$$

Notons aussi qu'en vertu de la formule de Plancherel, on peut aussi écrire

$$G_f(b, \omega) = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \widehat{g_{(b, \omega)}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi - \omega) e^{-i\xi b} d\xi .$$

Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 3.10 Soit  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $g \neq 0$ .

1. Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $G_f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  .
2. La transformation de Fourier à fenêtre associée à la fenêtre  $g$  est une isométrie  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ , à un facteur multiplicatif près : pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\frac{1}{2\pi \|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G_f(b, \omega)|^2 db d\omega = \|f\|^2 .$$

*Preuve* : supposons dans un premier temps que  $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Tout d'abord, on peut remarquer que  $G_f$  n'est autre qu'un produit de convolution de  $f$  par une copie modulée de la fonction  $\bar{g}$ , de

sorte que pour tout  $\omega$ ,  $G_f(\cdot, \omega) \in L^2(\mathbb{R})$  (d'après l'inégalité de Young). On peut alors calculer, avec le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |G_f(b, \omega)|^2 db &= \int \int \int \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi - \omega) \bar{\hat{f}}(\zeta) g(\zeta - \omega) e^{i(\xi - \zeta)b} db d\xi d\zeta \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{g}(\xi - \omega)|^2 d\xi \end{aligned}$$

où la dernière égalité est en fait une transformation de Fourier suivie d'une transformation de Fourier inverse. Une intégration par rapport à  $\omega$  donne le résultat. Finalement, on peut conclure grâce à la densité de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . ♠

**COROLLAIRE 3.1** *Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, la transformation de Fourier à fenêtre est inversible : pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a*

$$f = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_f(b, \omega) g_{(b, \omega)} db d\omega$$

au sens de la convergence faible dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Preuve :* Il suffit de remarquer que comme conséquence de la propriété d'isométrie, on a pour tous  $f, h \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle G_f, G_h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, g_{(b, \omega)} \rangle g_{(b, \omega)}(\cdot) db d\omega, h \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi \|g\|^2 \langle f, h \rangle .$$

Ceci étant vrai pour tout  $h \in L^2(\mathbb{R})$ , on en déduit le corollaire. ♠

La transformation de Fourier à fenêtre est souvent utilisée pour visualiser des signaux dont les caractéristiques fréquentielles varient au cours du temps. Le corollaire ci-dessus montre qu'un signal  $f$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire (continue, ce qui pose des difficultés pratiques) d'atomes  $g_{(b, \nu)}$ , les "coefficients" intervenant dans la décomposition formant la transformée de Fourier à fenêtre de  $f$ . On verra plus loin une version discrétisée de cette méthode.

## 3.7. Signaux numériques, Echantillonnage

### 3.7.1. Position du problème

Les signaux numériques sont par définition des suites de nombres, de longueur finie ou infinie. L'échantillonnage est le problème d'associer à un signal analogique un signal numérique, en contrôlant la perte d'information. La solution la plus simple revient à considérer des valeurs ponctuelles  $f(kT)$ , régulièrement espacées, du signal  $f$  étudié. Cependant, ceci ne peut se faire sans précautions ; il faut tout d'abord que les valeurs ponctuelles aient un sens, donc que  $f$  soit continue. Puis pour limiter la perte d'information, il faut que  $f$  varie "suffisamment lentement". Ceci conduit à poser le problème dans un cadre fonctionnel bien adapté. On se limitera ici au cadre de la théorie de l'échantillonnage classique, dans le cas des fonctions à bande limitée.

### 3.7.2. Le théorème d'échantillonnage

Le théorème d'échantillonnage se perd dans la nuit des temps. Il est généralement attribué à Shannon, Nyquist, Whittaker et Kotelnikov, qui en ont proposé des preuves entre 1900 et 1945. En fait, il avait été démontré bien avant par Cauchy, dans un cadre plus restrictif toutefois.

Le cadre naturel du théorème d'échantillonnage est l'espace des signaux à bande limitée, ou espace de Paley-Wiener

$$PW_{\omega_0} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f}(\omega) = 0 \text{ pour tout } \omega \notin [-\omega_0, \omega_0] \right\} \quad (3.74)$$

Il est facile de voir que  $PW_{\omega_0}$  est un espace de fonctions continues, de sorte que les valeurs ponctuelles des fonctions de  $PW_{\omega_0}$  ont un sens. On peut alors introduire l'opérateur d'échantillonnage  $E$ , associé à la fréquence d'échantillonnage  $\eta$  : si  $f \in PW_{\omega_0}$ ,

$$(Ef)_n = f\left(\frac{n}{\eta}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.75)$$

**THÉORÈME 3.11** Soit  $f \in PW_{\omega_0}$ , et soit  $\eta > 0$  la fréquence d'échantillonnage. On considère la suite des échantillons définie en (3.75).

1. Si  $\pi\eta < \omega_0$ , la suite des échantillons  $(Ef)_n$  ne permet pas de déterminer la fonction  $f$  sans hypothèse supplémentaire.
2. Si  $\pi\eta > \omega_0$ , alors il existe une infinité de formules de reconstruction de  $f$  à partir des échantillons. Soit  $\varphi$  telle que  $\hat{\varphi} \in C^\infty$ ,  $\hat{\varphi}(\omega) = 0$  pour tout  $\omega \notin [-\pi\eta, \pi\eta]$  et  $\hat{\varphi}(\omega) = 1$  pour tout  $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$ . Alors on a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} f\left(\frac{n}{\eta}\right) \varphi\left(t - \frac{n}{\eta}\right). \quad (3.76)$$

3. Si  $\pi\eta = \omega_0$ , alors il n'existe plus qu'une seule formule de reconstruction de  $f$  à partir des échantillons :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{\eta}\right) \frac{\sin(\pi\eta(t - n/\eta))}{\pi\eta(t - n/\eta)}. \quad (3.77)$$

*Preuve :* Commençons par considérer la fonction périodique

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + 2\pi k\eta). \quad (3.78)$$

Il est immédiat que  $\Gamma \in L^1_p([-\pi\eta, \pi\eta])$ , et on peut donc s'intéresser à ses coefficients de Fourier. Un calcul simple montre que

$$c_n(\Gamma) = \frac{1}{2\pi\eta} \int_{-\pi\eta}^{\pi\eta} \Gamma(\omega) e^{-i\frac{\omega n}{\eta}} d\omega = \frac{1}{2\pi\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\frac{\omega n}{\eta}} d\omega = \frac{1}{\eta} f\left(\frac{n}{\eta}\right).$$

Donc, la fonction  $\Gamma$  n'est autre que la TFD de la série d'échantillons  $\{f_n\}$ , et le problème de retrouver  $f$  à partir des échantillons est équivalent au problème de retrouver  $\hat{f}$  à partir de  $\Gamma$ . Or,  $\Gamma$  n'est autre (à une constante multiplicative près) qu'une version "périodisée" de  $\hat{f}$ , de période  $2\pi\eta$ . On peut donc considérer les trois cas de figure.

- Supposons que  $\pi\eta > \omega_0$ . Alors, il est clair que l'on peut toujours trouver une fonction  $\varphi$ , dont la transformée de Fourier  $\hat{\varphi}$  est  $C^\infty$ , à support compact dans l'intervalle  $[-\omega_0, \omega_0]$ , et vaut uniformément 1 dans  $[-\pi\eta, \pi\eta]$ . On a donc  $\hat{f}(\omega) = \Gamma(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$ , ce qui se traduit, après transformation de Fourier inverse, par la relation (3.76).
- Dans le cas critique, le raisonnement est similaire, à ceci près que la fonction  $\hat{\varphi}$  ne peut plus être choisie continue, et est nécessairement de la forme  $\varphi(\omega) = \chi_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega)$ . La transformée de Fourier inverse de cette dernière étant le sinus cardinal, on obtient (3.77).
- Si  $\pi\eta < \omega_0$ , le "truc" précédent ne fonctionne plus : la périodisation "mélange des morceaux de  $\hat{f}$  congrus modulo  $2\pi\eta$ , de sorte que l'on ne peut plus inverser le processus. C'est le phénomène de *repliement de spectre*.

Ceci conclut la démonstration. ♠

Le cas critique  $\omega_0 = \pi\eta$  est particulièrement intéressant, et il est utile de reprendre les résultats précédents, sous un angle différent. L'opérateur  $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi}$  est une isométrie bijective entre  $PW_{\omega_0}$  et  $L^2([-\omega_0, \omega_0])$ . Or, nous connaissons une base orthonormée de ce dernier espace : le système trigonométrique. Par conséquent, la famille de fonctions  $\phi_n$  définies par

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{e^{-i\pi n\omega/\omega_0}}{\sqrt{2\omega_0}} e^{i\omega t} d\omega = \sqrt{\eta} \operatorname{sinc}(\pi\eta(t - n/\eta)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.79)$$

où on a introduit le sinus cardinal

$$\operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}, \quad (3.80)$$

est une base orthonormée de  $PW_{\omega_0}$ . On a donc le résultat suivant

**COROLLAIRE 3.2** Pour tout  $f \in PW_{\omega_0}$ , on a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\eta}} f\left(\frac{n}{\eta}\right) \phi_n(t), \quad (3.81)$$

et la formule de Parseval s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{n}{\eta}\right) \right|^2. \quad (3.82)$$

De plus, la transformation de Fourier sur  $PW_{\omega_0}$  se ramène à une transformation de Fourier discrète (TFD) de la suite des échantillons :

**COROLLAIRE 3.3** Pour tout  $f \in PW_{\omega_0}$ , on a

$$\hat{f}(\omega) = \chi_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega) \sum_n f\left(\frac{n}{\eta}\right) e^{-in\omega/\eta}. \quad (3.83)$$

**REMARQUE 3.14** Dans le cas favorable  $\pi\eta > \omega_0$ , la famille de fonctions  $t \rightarrow \varphi(t-n/\eta)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  considérée n'est plus une base orthonormée, car elle est redondante. On peut alors montrer qu'elle forme alors un repère de  $PW_{\omega_0}$ .

**REMARQUE 3.15** En pratique, l'échantillonnage est souvent (toujours) précédé d'un filtrage passe-bas, dont le but est de réduire la largeur de bande pour l'adapter à la fréquence d'échantillonnage prévue. Les filtres passe-bas idéaux n'étant pas réalisables, on se rabat plutôt sur des filtres rationnels, comme par exemple un des filtres de Chebyshev ou de Butterworth que nous avons vus plus haut.

### 3.7.3. Approximation par des séries finies et TFF

Nous avons vu que les espaces de Paley-Wiener sont particulièrement bien adaptés à l'échantillonnage. Soit  $f \in PW_{\omega_0}$ , et soit  $\eta = \omega_0/\pi$ . Reprenant ce que nous avons vu plus haut, nous pouvons donc écrire, pour tout  $t$ ,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\eta) \text{sinc}(\pi\eta(t - n/\eta)),$$

et nous intéresser aux séries tronquées

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N f(n/\eta) \text{sinc}(\pi\eta(t - n/\eta)). \quad (3.84)$$

Nous avons alors le résultat suivant

**PROPOSITION 3.11** Soit  $f \in PW_{\omega_0}$ , et soit  $\eta = \omega_0/\pi$ . On a alors

$$\|f - f_N\|^2 = \frac{1}{\eta} \sum_{|n|>N} \left| f\left(\frac{n}{\eta}\right) \right|^2 \quad (3.85)$$

$$\|f - f_N\|_{\infty} \leq \sqrt{\eta} \|f - f_N\| = \sqrt{\sum_{|n|>N} \left| f\left(\frac{n}{\eta}\right) \right|^2} \quad (3.86)$$

*Preuve :* La première relation est une conséquence immédiate de la formule de Parseval vue dans le Corollaire 3.2. Pour la seconde, écrivons

$$\begin{aligned} |f(t) - f_N(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\eta}^{\pi\eta} |\hat{f}(\omega) - \hat{f}_N(\omega)| d\omega \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi\eta}}{2\pi} \|\hat{f} - \hat{f}_N\| \\ &= \sqrt{\eta} \|f - f_N\|, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ♠

La contrepartie du corollaire 3.3 est que la transformée de Fourier peut maintenant s'approximer par une TFF, très facile à réaliser numériquement.

### 3.7.4. Echantillonnage généralisé

Comme on l'a vu, le théorème d'échantillonnage, dans le cas critique  $\eta = \omega_0/\pi$ , peut être interprété comme la représentation d'une fonction (continue, appartenant à l'espace de Paley-Wiener) par les coefficients de son développement sur la base des sinus cardinaux.

Ceci peut être généralisé, dès lors que l'on se donne un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$  et une base de ce sous-espace. Un choix classique consiste à considérer une fonction  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ , et le sous-espace engendré par les translatées régulières

$$\phi_k(t) = \phi(t - k/\eta), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.87)$$

( $\eta \in \mathbb{R}^+$  étant une fréquence d'échantillonnage fixée), c'est à dire l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), f = \sum_k \alpha_k \phi_k \right\}. \quad (3.88)$$

Si la fonction  $\phi$  et la fréquence d'échantillonnage sont bien choisies, la collection des  $\phi_k$  forme une base de Riesz de  $\mathcal{V}$ , et toute fonction  $f \in \mathcal{V}$  peut être caractérisée par les coefficients  $\langle f, \phi_k \rangle$ . Plus précisément, on peut montrer le résultat suivant :

**THÉORÈME 3.12** Soit  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ , telle qu'il existe deux constantes réelles  $0 < A \leq B < \infty$  vérifiant pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

$$A \leq \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2\pi n\eta)|^2 \leq B. \quad (3.89)$$

Alors la collection des fonctions  $\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\}$  définies en (3.87) est une base de Riesz de l'espace  $\mathcal{V}$  défini en (3.88)

**REMARQUE 3.16** Notons que le calcul des coefficients d'une fonction  $f \in \mathcal{V}$  par rapport à une telle base prend la forme

$$\langle f, \phi_k \rangle = \int f(t) \bar{\phi}(t - k/\eta) dt,$$

ce qui peut s'interpréter comme

$$\langle f, \phi_k \rangle = (f * \tilde{\phi})(k/\eta),$$

où  $\tilde{\phi}(t) = \bar{\phi}(-t)$ , c'est à dire comme filtrage par un filtre de réponse impulsionnelle  $\tilde{\phi}$ , suivi d'un échantillonnage à fréquence  $\eta$ .

**REMARQUE 3.17** Il est possible de traiter de façon similaire des situations où la suite des translatées  $\phi_k$  n'est pas une base, mais un repère de l'espace  $\mathcal{V}$ .

### 3.7.5. Multirésolution et bases d'ondelettes

Comme on vient de le voir, la fréquence d'échantillonnage dans un espace de Paley-Wiener doit être adaptée à la taille du support des transformées de Fourier des fonctions de l'espace considéré. De même, dans le cas de l'échantillonnage généralisé tel que défini ci-dessus, la fréquence d'échantillonnage  $\eta$  dépend des caractéristiques de l'espace  $\mathcal{V}$  correspondant. L'idée de multirésolution, qui s'est développée dans les années 1980, consiste à considérer des espaces  $\mathcal{V}$  à des niveaux de résolutions différentes (tels que la projection orthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$  sur ces espaces donnent des approximations plus ou moins grossières des signaux), et d'échantillonner à des fréquences adaptées à ces espaces d'approximation. On montre alors que ceci conduit à des bases orthonormées de  $L^2(\mathbb{R})$  d'une forme particulière, appelées *bases d'ondelettes*, de la forme

$$\psi_{jk}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_j}} \psi\left(\frac{t - b_{jk}}{a_j}\right) = a_0^{-j/2} \psi\left(a_0^{-j} t - kb_0\right),$$

$a_0$  et  $b_0$  étant des réels, supérieurs respectivement à 1 et 0.

Le résultat fondamental d'existence de bases orthonormées d'ondelettes a été donné dans un premier temps dans le cas  $a_0 = 2, b_0 = 1$ , et est fortement lié à la notion de multirésolution. En quelques mots, effectuer une décomposition multirésolution d'un signal revient à lui associer une suite d'approximations de plus en plus précises, que l'on obtient par filtrages passe-bas successifs combinés à des sous-échantillonnages correspondants. Cette approche, qui trouve ses racines dans des algorithmes de traitement d'images du début des années 1980, se formalise sous un point de vue plus abstrait dans un cadre de sous-espaces d'approximation (comme dans l'équation (3.88)) de l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  des signaux d'énergie finie. Plus précisément :

**DÉFINITION 3.7** Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  consiste en une suite télescopique de sous-espaces fermés  $\mathcal{V}_j$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , appelés espaces d'approximation

$$\dots \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots ,$$

telle que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1. On a

$$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_j = \{0\} .$$

2. - L'espace  $\mathcal{V}_0$  est invariant par translation entière : si  $f(t) \in \mathcal{V}_0$ , alors  $f(t - k) \in \mathcal{V}_0$  pour tout entier  $k$ .  
 - Les espaces d'approximation  $\mathcal{V}_j$  sont obtenus par dilatation ou contraction de  $\mathcal{V}_0$  : pour tout  $j$ ,  $f(t) \in \mathcal{V}_0$  si et seulement si  $f(2^{-j}t) \in \mathcal{V}_j$ .
3. Il existe une fonction  $\phi \in \mathcal{V}_0$  appelée fonction d'échelle, telle que la collection de ses translatées entières  $\phi_{0,k}(t) = \phi(t - k)$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ , forme une base orthonormée de  $\mathcal{V}_0$ .

On peut alors montrer que pour tout  $j$ , la famille de copies dilatées de  $2^j$  et translatées de la fonction d'échelle  $\phi_{jk}(t) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}t - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  constitue une base orthonormée de  $\mathcal{V}_j$ . On peut ainsi associer à tous signal  $x \in L^2(\mathbb{R})$  son approximation  $x^{(j)}$  à l'échelle  $2^j$ , sous la forme de son projeté orthogonal sur l'espace  $\mathcal{V}_j$  :

$$x^{(j)} = \sum_k \langle x, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk} .$$

**REMARQUE 3.18** Une telle définition peut paraître assez contraignante. C'est effectivement le cas, mais ceci n'empêche pas qu'il existe une infinité de façons de construire de telles analyses multirésolution. La plus simple, appelé analyse multirésolution de Haar, prend pour espace  $\mathcal{V}_0$  le sous-espace des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  qui sont constantes sur les intervalles entiers  $[k, k + 1[$ , et pour fonction d'échelle l'indicatrice de  $[0, 1]$ . Un autre exemple simple prend pour espace  $\mathcal{V}_0$  l'espace de Paley-Wiener  $PW_\pi$  (voir (??)), et pour fonction d'échelle le sinus cardinal  $\sin(\pi t)/\pi t$ . Assez remarquablement, on peut montrer qu'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  est complètement caractérisée par une suite  $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , de sorte qu'il n'est pas nécessaire pour l'utilisateur de connaître les détails de la construction. Il lui suffit de disposer d'une implémentation de l'algorithme de calcul des coefficients d'un signal sur une base d'ondelettes et l'algorithme de reconstruction à partir des coefficients (qui sont très simple, voir l'annexe ??), et de choisir le vecteur  $h$ . Quelques uns des vecteurs  $h$  admissibles les plus simples sont tabulés dans [?] par exemple, d'autres peuvent être trouvés dans de multiples sites sur internet.

Dans une analyse multirésolution, la fonction d'échelle doit nécessairement satisfaire une équation à deux échelles : elle s'exprime comme combinaison linéaires de translatées d'une copie dilatée d'un facteur deux d'elle-même :

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h[k] \phi(2t - k) , \tag{3.90}$$

où les coefficients  $h_k = \langle \phi, \phi_{1,k} \rangle$  satisfont la relation  $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2$ . Sous certaines hypothèses, ces coefficients caractérisent en fait la fonction d'échelle, et donc l'analyse multirésolution.

Les ondelettes interviennent lorsque l'on considère les détails d'un signal qui sont visibles à une certaine échelle  $j$ , et ne le sont plus à l'échelle  $j + 1$ . Mathématiquement cela revient à considérer le sous-espace vectoriel de l'espace d'approximation  $\mathcal{V}_j$  qui est orthogonal à l'espace  $\mathcal{V}_{j+1}$ . Ce sous-espace, nommé espace de détails et traditionnellement noté  $\mathcal{W}_{j+1}$  peut lui aussi être pourvu d'une

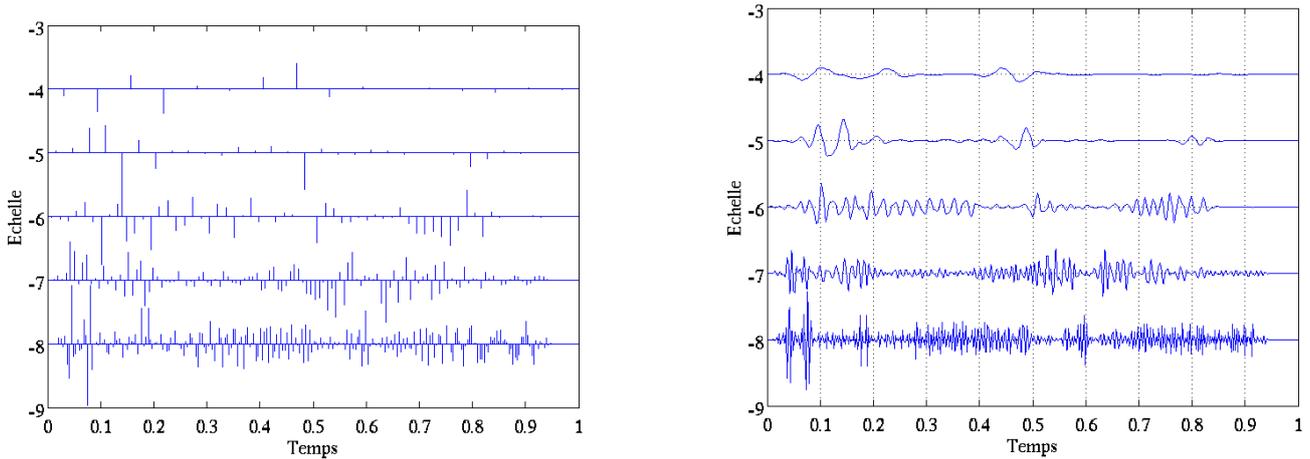


FIGURE 3.4.: Coefficients d'ondelettes d'une décomposition sur quatre échelles du signal transitoire (gauche), et projections sur les sous-espaces de détails aux échelles correspondantes (droite).

base orthonormée constituée de translatées d'une copie dilatée d'une unique fonction  $\psi$ , l'ondelette. Celle-ci satisfait aussi à une équation à deux échelles

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g[k] \phi(2t - k) , \quad (3.91)$$

où les nouveaux coefficients  $g[k]$  doivent nécessairement satisfaire une condition dite de reconstruction parfaite, qui s'exprime dans le domaine DFT sous la forme

$$\begin{aligned} |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega)|^2 &= 2 \\ \hat{h}(\omega + \pi) \bar{\hat{h}}(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi) \bar{\hat{g}}(\omega) &= 0 , \end{aligned}$$

dont on peut voir que  $\hat{g}(\omega) = e^{i\omega} \bar{\hat{h}}(\omega + \pi)$  est une solution possible. Ainsi, tout signal  $x \in L^2(\mathbb{R})$  peut être décomposé sous la forme

$$x = \sum_k \langle x, \phi_{j_0 k} \rangle \phi_{j_0 k} + \sum_{j \leq j_0} \sum_k \langle x, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk} ,$$

c'est à dire comme la somme d'une approximation  $\sum_k \langle x, \phi_{j_0 k} \rangle \phi_{j_0 k}$  à une échelle de référence  $j_0$ , et de détails  $\sum_k \langle x, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$  à des échelles plus précises. Un exemple de telle décomposition en ondelettes se trouve en FIG. 3.4, où est décomposé le signal transitoire déjà utilisé plus tôt pour illustrer le filtrage. On peut notamment y voir que les détails prennent la forme de versions du signal filtrées par filtres passe-bande.

Un point remarquable de la théorie des bases d'ondelettes est l'existence d'une méthode générique de construction de telles bases, associée à des algorithmes rapides de décomposition et reconstruction.

# Rappels d'analyse fonctionnelle

Les outils de base pour l'analyse et le traitement des signaux (déterministes comme aléatoires) sont les outils d'analyse Hilbertienne, en dimension finie et infinie. On rappelle dans ce chapitre les notions élémentaires (espaces de Hilbert, bases orthonormées,...). Ces notions sont utilisées pour la théorie  $L^2$  des séries de Fourier.

## A.1. Préliminaires

Commençons par rappeler quelques résultats élémentaires concernant les espaces de Hilbert. Pour plus de détails, on pourra se référer à tout texte de base, par exemple [13]

**DÉFINITION A.1** *Un espace pré-Hilbertien est un espace  $H$  muni d'une application notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ , appelée produit Hermitien, ou produit scalaire telle que :*

1.  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ , pour tous  $x, y \in H$ .
2.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ , pour tous  $x, y, z \in H$ .
3.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ , pour tous  $x, y \in H$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in H$
5.  $\langle x, x \rangle = 0$  implique  $x = 0$ .

En posant pour tout  $x \in H$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (\text{A.1})$$

on définit une norme sur  $H$ . On a alors les propriétés suivantes :

- *Inégalité de Schwarz* : pour tous  $x, y \in H$  :  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .
- *Inégalité triangulaire* : pour tous  $x, y \in H$  :  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .
- *Identité de polarisation* :

$$4 \langle x, y \rangle = (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + i (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) .$$

La norme munit  $H$  d'une structure d'espace métrique.

**DÉFINITION A.2** *Un espace de Hilbert est un espace pré-Hilbertien  $H$  complet par rapport à la distance induite par la norme,*

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des inégalités données ci-dessus.

**THÉORÈME A.1** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Les applications  $x \rightarrow \langle x, y \rangle$  et  $x \rightarrow \|x\|$  sont continues pour tout  $y \in H$ .*

## A.2. Orthogonalité

Si  $H_0 \subset H$  est un sous-espace de dimension finie de  $H$ , on note  $H_0^\perp$  le sous-espace de  $H$  consistant des  $y \in H$  tels que  $\langle y, x \rangle = 0 \forall x \in H_0$ .

**THÉORÈME A.2** Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $H_0 \subset H$  un sous-espace fermé de dimension finie.

1. Pour tout  $x \in H$ , il existe une unique décomposition  $x = Px + Qx$ , où  $Px \in H_0$  et  $Qx \in H_0^\perp$
2.  $Px$  est l'élément  $y \in H_0$  qui minimise  $\|y - x\|$ . De même,  $Qx$  est l'élément  $z \in H_0^\perp$  qui minimise  $\|z - x\|$ .
3. Les applications  $P : H \rightarrow H_0$  et  $Q : H \rightarrow H_0^\perp$  sont linéaires.
4. Pour tout  $x \in H$ , on a  $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ .

$Px$  et  $Qx$  sont respectivement les projections orthogonales de  $x \in H$  sur  $H_0$  et  $H_0^\perp$ .

**Preuve :** 1) Unicité : supposons  $x = v + w = v' + w'$ , avec  $v, v' \in H_0$  et  $w, w' \in H_0^\perp$ . Alors  $v - v' = w - w'$ . Comme  $H_0 \cap H_0^\perp = \{0\}$ , ceci implique  $v = v'$  et  $w = w'$ . Existence : Soit  $H_x = H_0 + x$ .  $H_x$  est convexe. Il possède donc un élément de norme minimale, noté  $Qx$ . Soit  $Px = x - Qx$ . On vérifie immédiatement que  $Px \in H_0$ . Soit  $y \in H_0$ , avec  $\|y\| = 1$ ; calculons  $\langle Qx, y \rangle$ . Pour cela, soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ , et évaluons

$$\|Qx\|^2 \leq \|Qx - \alpha y\|^2 = \|Qx\|^2 + |\alpha|^2 - 2\Re(\alpha \langle Qx, y \rangle) .$$

Si on prend  $\alpha = \overline{\langle Qx, y \rangle}$ , cette dernière inégalité implique que  $\langle Qx, y \rangle = 0$ .

2) Soit  $y \in H_0$ . Alors  $\|x - y\|^2 = \|Qx + (Px - y)\|^2 = \|Qx\|^2 + \|Px - y\|^2$  est minimal pour  $y = Px$ .

3) et 4) sont immédiats. ♠

Le théorème suivant montre qu'un espace de Hilbert est nécessairement isomorphe à son dual.

**THÉORÈME A.3** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Pour tout  $x \in H$ , l'application  $L_x : y \in H \rightarrow L_x(y) = \langle y, x \rangle$  est une forme linéaire continue sur  $H$ . Inversement, pour toute forme linéaire continue  $L : H \rightarrow \mathbb{C}$ , il existe  $x \in H$  tel que  $L = L_x$ .

**Preuve :** La première partie est une conséquence immédiate du Théorème A.1, et on se focalise sur la seconde partie. Unicité : Supposons que  $L = L_x = L_{x'}$ , pour  $x, x' \in H$ . Alors  $\langle y, x - x' \rangle = 0$  pour tout  $y \in H$ , donc  $x = x'$ . Existence : soit  $H_0 = \{y \in H, Ly = 0\}$ .  $L$  étant linéaire,  $H_0$  est un sous-espace de  $H$ . De plus,  $L$  étant continue,  $H_0$  est fermé. Soit  $z \in H_0^\perp$ , avec  $\|z\| = 1$ . Soit  $v = (Lx)z - (Lz)x$ . Clairement,  $Lv = 0$ , et donc  $v \in H_0$  et  $\langle v, z \rangle = 0$ . Par conséquent,  $Lx = (Lz)\langle x, z \rangle$ , et en posant  $y = \overline{Lz}z$ , on a bien  $L = L_y$ . ♠

### A.3. Systèmes orthonormaux, bases Hilbertiennes

La façon la plus simple de décrire un espace de Hilbert est d'utiliser une base. Plusieurs notions de bases peuvent être introduites. L'une des plus générales est la notion de base de Schauder. Une famille  $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  est une base de Schauder d'un espace de Banach  $B$  si  $\forall x \in B$ , il existe une unique suite  $\{c_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  telle que  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda f_\lambda$  (dans le cas où  $B$  est de dimension infinie, l'égalité est à prendre au sens de la topologie induite par la norme de  $B$ ). Cependant, les bases de Schauder sont souvent difficiles à manipuler, et la convergence du développement d'un élément de l'espace par rapport à une telle base est parfois problématique. C'est pourquoi il est utile de se limiter à des bases plus spécifiques. Le cas le plus simple est le cas des bases orthonormales, ou bases Hilbertiennes. Commençons par préciser la notion d'orthogonalité et de projection orthogonale. Dans cette section,  $H$  est un espace de Hilbert séparable. Un système orthonormal dans  $H$  est une famille  $\{e_\lambda \in H, \lambda \in \Lambda\}$ , telle que

$$\langle e_\lambda, e_\mu \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{A.2}$$

Ici,  $\Lambda$  est un index au plus dénombrable (si  $\Lambda$  est infini, on prendra  $\Lambda = \mathbb{Z}$ ).

**THÉORÈME A.4** Soit  $\{e_\lambda \in H, \lambda \in \Lambda\}$  un système orthonormal dans  $H$ , et soit  $\Lambda' \subset \Lambda$  un sous-ensemble fini de l'index  $\Lambda$ . Soit  $H_{\Lambda'}$ , le sous-espace de  $H$  engendré par les vecteurs  $e_\lambda, \lambda \in \Lambda'$ . Soit  $x \in H$ , et soit  $x' = \sum_{\lambda \in \Lambda'} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$ . Alors  $\|x - x'\| \leq \|x - s\|$  pour tout  $s \in H_{\Lambda'}$ , et l'égalité n'est atteinte que pour  $s = x'$ . De plus,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{A.3}$$

**Preuve :** Pour tout  $\lambda \in \Lambda'$ ,  $\langle x', e_\lambda \rangle = \langle x, e_\lambda \rangle$ . Donc,  $(x - x') \perp e_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \Lambda'$ , et  $(x - x') \perp (x' - s)$  pour tout  $s \in H_{\Lambda'}$ . Donc,  $\|x - s\|^2 = \|x - x'\|^2 + \|x' - s\|^2$ , et  $\|x - x'\| \leq \|x - s\|$  pour tout  $s \in H_{\Lambda'}$ . De plus, cette inégalité prise pour  $s = 0$  montre que  $\|x'\|^2 \leq \|x\|^2$ , ce qui conclut la preuve. ♠

Ceci montre en particulier que  $x'$  est la meilleure approximation de  $x \in H$  dans  $H_0$ .

Le résultat suivant, appelé théorème de Riesz-Fischer, permet de préciser le précédent. Il établit en particulier le fait que l'existence d'une base orthonormée dans un espace de Hilbert permet de le mettre en correspondance avec un espace  $\ell^2$  de suites de carré sommable.

**THÉORÈME A.5 (RIESZ-FISCHER)** Soit  $\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  un système orthonormal dans  $H$ , et soit  $F \subset H$  l'espace des combinaisons linéaires finies des  $e_\lambda, \lambda \in \Lambda$ .

1. Pour tout  $x \in H$ , on a l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (\text{A.4})$$

2. L'application  $x \in H \rightarrow \{\langle x, e_\lambda \rangle, \lambda \in \Lambda\}$  est linéaire, continue de  $H$  dans  $\ell^2(\Lambda)$  et sa restriction à  $\bar{F}$  est une isométrie de  $\bar{F}$  sur  $\ell^2(\Lambda)$ .

Ce résultat est une conséquence du lemme classique suivant

**LEMME A.1** Soient  $E, E'$  deux espaces métriques,  $E$  étant supposé complet. Soit  $f : E \rightarrow E'$  une application continue. Si il existe un sous-ensemble dense  $F \subset E$  tel que  $f(F)$  soit dense dans  $E'$ , et que  $f$  soit une isométrie entre  $F$  et  $f(F)$ , alors  $f$  se prolonge en une isométrie surjective de  $E$  sur  $E'$ .

**Preuve :** Le fait que  $f$  se prolonge en une isométrie est une conséquence immédiate de la densité de  $F$  dans  $E$ . L'élément essentiel du résultat est la surjectivité. Soit  $y \in E'$ . Comme  $f(F)$  est dense dans  $E'$ , il existe une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de  $F$  telle que  $f(x_n) \rightarrow y$ . La suite  $\{f(x_n)\}$  est une suite de Cauchy, et  $f$  étant une isométrie, la suite  $\{x_n\}$  est elle aussi une suite de Cauchy, qui converge vers  $x \in E$  (puisque  $E$  est complet).  $f$  étant continue, on a bien  $f(x) = y$ , ce qui prouve le lemme. ♠

**Preuve du théorème A.5 :** L'inégalité (A.3) est vraie pour tout sous-ensemble fini de  $\Lambda$ , et implique donc l'inégalité de Bessel. On considère l'application "coefficients"  $f$ , qui à  $x \in H$  associe la suite des coefficients  $\{\langle x, e_\lambda \rangle\}$ .  $f$  est bien entendu linéaire; d'après l'inégalité de Bessel, on a pour tous  $x, y \in F$  :

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \sum_{\lambda} |\langle x, e_\lambda \rangle - \langle y, e_\lambda \rangle|^2 \leq \|x - y\|^2,$$

et  $f$  est donc continue de  $F$  dans  $\ell^2(\Lambda)$ . Il suffit alors d'appliquer le Lemme A.1 pour conclure. ♠

**DÉFINITION A.3** Un système orthonormal maximal dans  $H$  est appelé base orthonormée de  $H$ .

Le résultat suivant donne une caractérisation des bases orthonormées. Rappelons qu'une famille  $\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  est complète dans  $H$  si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des  $e_\lambda$  est dense dans  $H$ .

**REMARQUE A.1** On parle parfois de famille totale au lieu de famille complète. Les deux terminologies décrivent la même notion. On montre que dans un espace de Hilbert, une famille  $\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  est complète si  $\langle x, e_\lambda \rangle = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$  implique  $x = 0$ .

**THÉORÈME A.6** Soit  $\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  un système orthonormal dans  $H$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  est une base orthonormée de  $H$ .
2. La famille  $\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  est complète dans  $H$ .
3. Pour tout  $x \in H$ , on a la formule de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2. \quad (\text{A.5})$$

4. Pour tous  $x, y \in H$ , on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle \langle e_\lambda, y \rangle. \quad (\text{A.6})$$

**Preuve** : 1) implique 2) : soit  $F$  l'ensemble des combinaisons linéaires finies des  $e_\lambda$ , et supposons  $\overline{F} \neq E$ . Alors, il existe  $y \in \overline{F}^\perp$ ,  $y \neq 0$ , et la famille n'est pas maximale. Les autres implications sont des conséquences directes des résultats précédents. 2) implique 3) : c'est une conséquence du théorème de Riesz-Fischer ci-dessus. 3) implique 4) : s'obtient grâce à l'identité de polarisation. 4) implique 1) : supposons que 1) soit faux : il existe  $u \in H$ ,  $u \neq 0$ , tel que  $\langle u, e_\lambda \rangle = 0 \forall \lambda$ . Alors, d'après 4),  $\|u\|^2 = 0$ , ce qui est impossible. ♠

**EXEMPLE A.1** En dimension finie, par exemple pour  $H = \mathbb{C}^N$ , toute famille orthonormale de  $N$  vecteurs est une base orthonormée.

**EXEMPLE A.2** Considérons l'espace

$$\mathcal{V} = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ constante sur tout intervalle } [k, k+1[, k \in \mathbb{Z}\} ,$$

muni du produit Hermitien usuel sur  $L^2(\mathbb{R})$ . En posant

$$\phi_n(t) = \chi_{[n, n+1[}(t), \quad n \in \mathbb{Z},$$

on vérifie que la famille des  $\phi_n, n \in \mathbb{Z}$  est une base orthonormée de  $\mathcal{V}$ . L'orthonormalité des fonctions  $\phi_k$  est immédiate. Par ailleurs, si  $f \in \mathcal{V}$  est orthogonale à toutes les fonctions  $\phi_k$ , alors  $f$  est nulle sur tout intervalle  $[k, k+1[$  et est donc nulle.

**EXEMPLE A.3** Soit la fonction  $\omega$  définie par  $\omega(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ . On considère l'espace  $L^2_\omega([-1, 1])$  des fonctions  $f$  telles que  $f\sqrt{\omega} \in L^2([-1, 1])$ .  $L^2_\omega([-1, 1])$  est muni d'une structure d'espace de Hilbert par le produit Hermitien

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Soit  $\mathcal{U}$  l'opérateur défini par  $\mathcal{U}f(\theta) = f(\cos \theta)$ .  $\mathcal{U}$  est une isométrie de  $L^2_\omega([-1, 1])$  sur  $L^2([0, \pi])$  :

$$\|\mathcal{U}f\|^2 = \int_0^\pi |f(\cos \theta)|^2 d\theta = \int_{-1}^1 |f(t)|^2 \omega(t) dt = \|f\|_\omega^2.$$

On sait que la famille des fonctions  $\{e_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$  définies par  $e_n(\theta) = \cos(n\theta)$  est une base orthogonale de  $L^2([0, \pi])$ . Par conséquent, la famille des fonctions  $T_n = \mathcal{U}^{-1}e_n$  :

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t) .$$

est une base orthogonale de  $L^2_\omega([-1, 1])$ . Les fonctions  $T_n$  sont appelées *polynômes de Chebyshev*.

## A.4. Bases de Riesz

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités à utiliser des bases orthonormées, qui ont le grand mérite de simplifier la représentation des signaux (grâce en particulier au théorème de Riesz-Fischer, et à la formule de Parseval). Par malheur, il n'est pas toujours facile de construire directement une base orthonormée de l'espace considéré. Il est alors utile de commencer par une *base de Riesz*, comme définie ci-dessous.

**DÉFINITION A.4** Une base  $\{f_n, n \in \Lambda\}$  de l'espace de Hilbert séparable  $H$  est une base de Riesz si il existe un opérateur linéaire borné  $T : H \rightarrow H$ , inversible et à inverse borné, et une base orthonormée  $\{e_n, n \in \Lambda\}$ , tels que

$$f_n = Te_n, \quad \forall n \in \Lambda. \tag{A.7}$$

Remarquons immédiatement que si  $\{f_n, n \in \Lambda\}$  est une base de Riesz de  $H$ , alors on a  $\|f_n\| = \|Te_n\| \leq \|T\|$ . De même, on déduit de  $1 = \|e_n\| = \|T^{-1}f_n\| \leq \|T^{-1}\| \|f_n\|$  que

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq \|f_n\| \leq \|T\|. \tag{A.8}$$

Le résultat suivant donne une caractérisation des bases de Riesz.

**THÉORÈME A.7** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\{f_n, n \in \Lambda\}$  est une base de Riesz de  $H$ .
2. Il existe dans  $H$  un autre produit scalaire, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ , équivalent à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , (au sens où les normes correspondantes sont équivalentes), et tel que la famille  $\{f_n, n \in \Lambda\}$  soit une base orthonormée par rapport à ce produit scalaire.
3. Il existe deux constantes réelles  $0 < A \leq B < \infty$  telles que pour toute famille  $\{c_1, \dots, c_N\} \in \mathbb{C}^N$ , on ait

$$A \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\|^2 \leq B \sum_{n=1}^N |c_n|^2, \tag{A.9}$$

et la famille  $\{f_n\}$  est complète dans  $H$ .

**Preuve :** 1 implique 2 : supposant que  $\{f_n, n \in \Lambda\}$  soit une base de Riesz de  $H$ , il existe  $S$ , borné, inversible à inverse borné, tel que pour tout  $n$ ,  $e_n = S f_n$ . Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  défini par

$$\langle x, y \rangle_1 = \langle Sx, Sy \rangle, \quad x, y \in H.$$

On vérifie immédiatement que la famille  $\{f_n\}$  est orthonormale par rapport à ce produit scalaire. De plus, on a  $\|x\|_1 = \|Sx\| \leq \|S\| \|x\|$ , et  $\|x\| = \|S^{-1}x\|_1 \leq \|S^{-1}\| \|x\|_1$ . Donc les produits scalaires sont équivalents.

2 implique 3 : soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  le produit scalaire équivalent; soit  $f \in H$  telle que  $\langle f, f_n \rangle = 0$  pour tout  $n$ . Alors, on a  $\langle f, f_n \rangle_1 = 0$  pour tout  $n$ , ce qui implique  $f = 0$ . donc la famille  $\{f_n\}$  est complète. Soit maintenant  $x \in H$ . On sait que  $m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1$ , où  $m, M$  sont deux constantes indépendantes de  $x$ . Si on prend un  $x$  de la forme  $x = \sum_{n=1}^N c_n f_n$ , alors  $\|x\|_1^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2$  et on a immédiatement la propriété annoncée.

3 implique 1 : Soit  $\{e_n\}$  une base orthonormée de  $H$ . Alors, il existe deux opérateurs linéaires  $T, S$ , bornés grâce à (A.9), tels que pour tout  $n$ ,  $e_n = S f_n$  et  $f_n = T e_n$ . Donc  $ST$  est l'opérateur identité sur  $H$ . Mais la famille  $\{f_n\}$  étant complète,  $TS$  est aussi l'identité sur  $H$ . Donc  $T$  est inversible, ce qui conclut la preuve. ♠

**EXEMPLE A.4** 1. Toute base orthonormée est évidemment une base de Riesz.

2. En dimension finie, toute famille libre est une base de Riesz de l'espace qu'elle engendre.
3. On considère la fonction ("la tente") de Schauder

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 2 - t & \text{si } t \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et les fonctions  $\Lambda_n$  définies par

$$\Lambda_n(t) = \Lambda(t - n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Un calcul simple montre que pour tout  $n$ ,  $\|\Lambda_n\|^2 = 2/3$ ,  $\langle \Lambda_n, \Lambda_{n \pm 1} \rangle = 1/6$ , et  $\langle \Lambda_n, \Lambda_m \rangle = 0$  si  $|m - n| > 1$ . On considère l'espace  $V$  engendré par les limites de combinaisons linéaires finies des fonctions  $\Lambda_n$ . Soit  $c = \{c_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , et soit  $f = \sum_n c_n \Lambda_n$ . On vérifie que

$$\|f\|^2 = \frac{2}{3} \sum_n |c_n|^2 + \frac{1}{6} \sum_n c_n \bar{c}_{n-1} + \frac{1}{6} \sum_n c_n \bar{c}_{n+1}.$$

On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\frac{1}{3} \sum_n |c_n|^2 \leq \|f\|^2 \leq \sum_n |c_n|^2,$$

de sorte que la famille  $\{\Lambda_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est bien une base de Riesz de  $V$ .

REMARQUE A.2 Une base de Riesz possède automatiquement une *base biorthogonale* (ou base duale)  $\{\tilde{f}_n\}$ , telle que

$$\langle f_n, \tilde{f}_m \rangle = \delta_{m,n} ,$$

qui est également une base de Riesz du même espace. En effet, avec les notations plus haut, considérons l'adjoint  $S^*$  de  $S = T^{-1}$ , et posons

$$\tilde{f}_n = S^* e_n . \tag{A.10}$$

Alors on a immédiatement  $\langle f_n, \tilde{f}_m \rangle = \langle S T e_n, e_m \rangle = \delta_{m,n}$ . De plus, pour tous  $f \in H$ , on peut écrire

$$f = \sum_n \langle f, \tilde{f}_n \rangle f_n = \sum_n \langle f, f_n \rangle \tilde{f}_n . \tag{A.11}$$

Par exemple, en écrivant  $T^* f = \sum_n \langle T^* f, e_n \rangle e_n = \sum_n \langle f, f_n \rangle e_n$ , on obtient directement la seconde égalité. La première s'obtient similairement en décomposant  $T^{-1} f$  sur la base  $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Le fait que  $\tilde{f}_n, n \in \mathbb{Z}$  est une conséquence directe des propriétés de  $T^*$ .

**B**

# Repères dans un espace de Hilbert

Il existe des situations dans lesquelles on a intérêt, plutôt que d'utiliser des bases orthonormées, à utiliser des familles de fonctions qui sont complètes mais pas libres. On parle alors de familles surcomplètes, ou de repères. La famille sur laquelle l'on décompose le signal n'étant pas libre, les coefficients de la décomposition sont redondants, et la représentation n'est donc pas "économique". Cependant, on verra que cette représentation présente l'avantage d'être plus robuste, c'est à dire moins sensible aux perturbations, qu'une décomposition par rapport à une base.

## B.1. Définitions

**DÉFINITION B.1** Une famille  $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  de vecteurs d'un espace de Hilbert  $H$  est un repère de cet espace si il existe deux constantes réelles  $0 < A < B < \infty$  telles que pour tout  $f \in H$ , on ait

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, f_\lambda \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (\text{B.1})$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont appelées Bornes du repère. Si  $A = B$ , le repère est dit strict.

**EXEMPLE B.1** Considérons le plan  $\mathbb{R}^2$ , muni d'une base orthonormée  $\{e_1, e_2\}$ . Alors, en posant  $f_1 = e_1$ ,  $f_2 = (-e_1 + e_2\sqrt{3})/2$  et  $f_3 = (-e_1 - e_2\sqrt{3})/2$ , il est immédiat que  $\{f_1, f_2, f_3\}$  est un repère strict de  $\mathbb{R}^2$  : pour tout  $f \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\sum_{n=1}^3 |\langle f, f_n \rangle|^2 = 3\|f\|^2/2$ . Plus généralement, toute famille finie de vecteurs est un repère de l'espace qu'elle engendre.

On associe naturellement à un repère les deux opérateurs suivants : l'opérateur d'analyse  $U : H \rightarrow \ell^2(\Lambda)$ , défini par

$$(Uf)_\lambda = \langle f, f_\lambda \rangle, \quad (\text{B.2})$$

et l'opérateur de repère  $\mathcal{R} = U^*U : H \rightarrow H$ , défini par

$$\mathcal{R}f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, f_\lambda \rangle f_\lambda. \quad (\text{B.3})$$

Le résultat suivant est vérifié sans difficulté.

**PROPOSITION B.1**  $\mathcal{R}$  est borné, inversible et à inverse borné. Il est de plus auto adjoint.

*Preuve :*  $\mathcal{R}$  est auto adjoint : en effet, pour tous  $f, g \in H$ , on a

$$\langle \mathcal{R}^*f, g \rangle = \langle f, \mathcal{R}g \rangle = \sum_{\lambda} \langle f, f_\lambda \rangle \langle f_\lambda, g \rangle = \overline{\sum_{\lambda} \langle g, f_\lambda \rangle \langle f_\lambda, f \rangle} = \overline{\langle g, \mathcal{R}f \rangle} = \langle \mathcal{R}f, g \rangle.$$

$\mathcal{R}$  est borné : Calculons, pour  $f \in H$

$$\|\mathcal{R}f\|^2 = \sup_{\|g\|=1} |\langle \mathcal{R}f, g \rangle|^2 = \sup_{\|g\|=1} \left| \sum_n \langle f, f_n \rangle \langle f_n, g \rangle \right|^2 \leq \sup_{\|g\|=1} B^2 \|f\|^2 \|g\|^2 = B^2 \|f\|^2.$$

$\mathcal{R}$  est injectif : soit  $f$  tel que  $\mathcal{R}f = 0$ . Alors  $\langle \mathcal{R}f, f \rangle = 0$ , et donc  $\|f\| = 0$ , qui implique  $f = 0$ .

$\mathcal{R}$  est surjectif : pour tout  $f \in H$ , on a  $A\|f\|^2 \leq \langle \mathcal{R}f, f \rangle$ .  $\mathcal{R}$  est borné inférieurement, donc surjectif.

Par conséquent,  $\mathcal{R}$  est bijectif. Comme on a de plus pour tout  $f \in H$ ,  $\|\mathcal{R}f\| \geq A\|f\|$ , on en déduit que  $\mathcal{R}^{-1}$  est borné également. ♠

$\mathcal{R}$  étant auto adjoint, il résulte de (B.1) que son spectre est inclus dans l'intervalle  $[A, B]$ , ce que l'on écrit aussi

$$A \leq \mathcal{R} \leq B .$$

$\mathcal{R}$  étant inversible, on peut écrire, pour tout  $f \in \mathcal{H}$

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, f_\lambda \rangle \tilde{f}_\lambda , \quad (\text{B.4})$$

où on a posé

$$\tilde{f}_\lambda = \mathcal{R}^{-1} f_\lambda . \quad (\text{B.5})$$

Les  $\tilde{f}_\lambda$  possèdent des propriétés similaires à celles des  $f_\lambda$ . En particulier :

**PROPOSITION B.2** La famille  $\{\tilde{f}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  est un repère de  $\mathcal{H}$ , de bornes  $B^{-1}$  et  $A^{-1}$ , appelé repère dual du repère  $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ .

Preuve : La proposition résulte de l'estimation suivante, qui est facilement vérifiée : pour tout  $f \in H$ ,

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, \tilde{f}_\lambda \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2 . \quad (\text{B.6})$$

On a donc aussi l'égalité, pour tout  $f \in \mathcal{H}$  ♠

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, \tilde{f}_\lambda \rangle f_\lambda , \quad (\text{B.7})$$

**REMARQUE B.1** Dans le cas d'un repère strict, c'est à dire dans le cas  $A = B$ ,  $\mathcal{R}$  est un multiple de l'identité, de sorte que l'on a pour tout  $\lambda$ ,  $\tilde{f}_\lambda = f_\lambda/A$ . On a ainsi, pour  $f \in H$ ,

$$f = \frac{1}{A} \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, f_\lambda \rangle f_\lambda . \quad (\text{B.8})$$

Dans le cas général, il est nécessaire d'utiliser la formule (B.4) pour expliciter un  $f \in H$  à partir des coefficients  $\langle f, f_\lambda \rangle$ , ce qui n'est pas toujours facile car  $\mathcal{R}^{-1}$  ne possède pas de forme explicite en général. On verra un peu plus loin comment résoudre ce problème.

**EXEMPLE B.2** Des exemples utiles de repères sont donnés par les repères trigonométriques. On sait que le système trigonométrique, formé des fonctions

$$e_n(t) = e^{2int} , \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.9})$$

est une base de  $L^2([0, \pi])$ . Considérons le système de fonctions

$$f_n(t) = e^{int} , \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (\text{B.10})$$

Soit  $f \in L^2([0, \pi])$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle f, f_{2n} \rangle &= \langle f, e_n \rangle = \pi c_n(f) , \quad \text{et} \\ \langle f, f_{2n+1} \rangle &= \langle g, e_n \rangle = \pi c_n(g) , \end{aligned}$$

où  $g$  est définie par

$$g(t) = f(t)e^{-it} .$$

L'égalité de Parseval donne alors

$$\sum_n |\langle f, f_n \rangle|^2 = \pi^2 \sum_n (|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2) = \pi \|f\|^2 . \quad (\text{B.11})$$

Donc, la famille  $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est un repère strict de  $L^2([0, \pi])$ , de borne  $A = B = \pi$ .

De tels repères, ou plutôt leurs analogues finis, sont utilisés par exemple en restauration d'images, c'est à dire pour reconstituer des images dont certains pixels sont manquants.

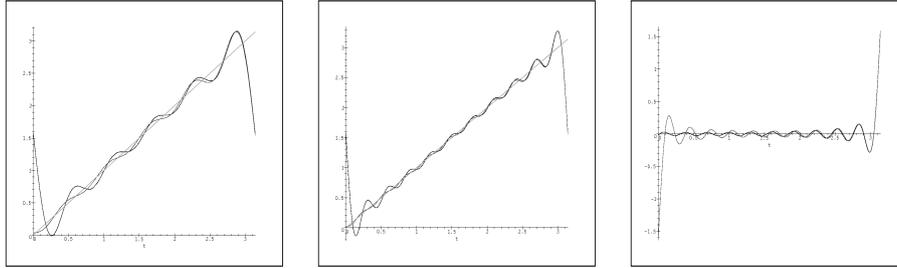


FIGURE B.1.: Comparaison d'une série de Fourier usuelle et d'une décomposition sur un repère : le cas d'une fonction linéaire. A gauche, la fonction, sa reconstruction à partir de 11 modes de Fourier  $e_n$  et 21 fonctions  $f_n$  ; au centre, même chose, avec 21 fonctions  $e_n$  et 41 fonctions  $f_n$  ; à droite, les erreurs de reconstruction.

Considérons maintenant l'opérateur d'analyse  $U$  défini en (B.2). Il est possible de donner une caractérisation de l'image de  $H$  par  $U$ . Dans le cas d'une base orthonormée  $\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  de  $\mathcal{H}$ , le théorème de Riesz-Fisher établit une correspondance bijective entre  $\mathcal{H}$  et  $\ell^2(\Lambda)$ . Dans le cas d'un repère, la suite  $Uf$  des coefficients  $\langle f, f_\lambda \rangle$  de  $f \in \mathcal{H}$  est bien dans  $\ell^2(\Lambda)$ . Il résulte de la définition que  $U$  est injectif, et que

$$A\|f\|^2 \leq \|Uf\|^2 = \langle \mathcal{R}f, f \rangle \leq B\|f\|^2. \quad (\text{B.12})$$

$U$  n'est pas nécessairement surjectif. En fait, si les éléments du repère  $\{f_\lambda\}$  sont linéairement dépendants,  $Im(U)$  est strictement inclus dans  $\ell^2(\Lambda)$ . En effet supposons que la suite  $\alpha = \{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  soit telle que  $\sum_\lambda \alpha_\lambda f_\lambda = 0$ . Alors on peut écrire, pour  $f \in H$  :

$$\langle f, \sum_\lambda \alpha_\lambda f_\lambda \rangle = \sum_\lambda \langle f, f_\lambda \rangle \overline{\alpha_\lambda} = \langle Uf, \alpha \rangle_{\ell^2(\Lambda)} = 0,$$

de sorte que  $\alpha \in Im(U)^\perp$ .  $U$  étant injectif, il possède un inverse défini sur  $Im(U)$ , que l'on peut prolonger de façon arbitraire à  $Im(U)^\perp$ .

Parmi tous les inverses à gauche possibles, on utilise généralement le *pseudo-inverse*  $\tilde{U}^{-1} : \ell^2(\Lambda) \rightarrow H$ , défini par

$$\tilde{U}^{-1} [Im(U)^\perp] = 0. \quad (\text{B.13})$$

Le résultat suivant donne une description plus "géométrique" de la situation.

**PROPOSITION B.3** *Etant donné un repère dont les éléments sont linéairement dépendants, l'opérateur  $U$  possède une infinité d'inverses à gauche. L'inverse à gauche de norme minimale est donné par*

$$\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*, \quad (\text{B.14})$$

*et s'annule sur  $(U\mathcal{H})^\perp$ . De plus,*

$$\|\tilde{U}^{-1}\| \leq 1/\sqrt{A}. \quad (\text{B.15})$$

**Preuve :** Soit  $x \in \ell^2(\Lambda)$ . Il admet une unique décomposition  $x = x_1 + x_2$ , avec  $x_1 \in Im(U)$  et  $x_2 \in Im(U)^\perp$ . On suppose  $x_2 \neq 0$ . Soit  $V$  un inverse à gauche de  $U$ . Alors on a

$$\frac{\|\tilde{U}^{-1}x\|}{\|x\|} = \frac{\|\tilde{U}^{-1}x_1\|}{\|x\|} = \frac{\|Vx_1\|}{\|x\|} \leq \|V\| \frac{\|x_1\|}{\|x\|} \leq \|V\|.$$

Donc,  $\|\tilde{U}^{-1}\| \leq \|V\|$ .

Soit  $x \in \ell^2(\Lambda)$ . Alors, il existe  $f \in H$  tel que  $x_1 = Uf$ . On a alors, en utilisant (B.12),

$$\|\tilde{U}^{-1}x\| = \|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \|Uf\| = \frac{1}{\sqrt{A}} \|x_1\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \|x\|.$$

Calculons enfin  $(U^*U)\tilde{U}^{-1}x$ , pour  $x = x_1 + x_2 \in \ell^2(\Lambda)$ . Il est clair que  $U^*U\tilde{U}^{-1}x_1 = U^*x_1$ . On a aussi par définition  $\tilde{U}^{-1}x_2 = 0$ . Reste à montrer que  $U^*x_2 = 0$ . Soit  $f \in H$ . On a  $\langle f, U^*x_2 \rangle = \langle Uf, x_2 \rangle = 0$ . On a donc bien  $U^*U\tilde{U}^{-1}x_2 = U^*x_2$ , ce qui achève la preuve. ♠

L'opérateur  $U\tilde{U}^{-1}$  possède un statut particulier, comme le montre le corollaire suivant :

**COROLLAIRE B.1**  $U\tilde{U}^{-1}$  est le projecteur orthogonal sur l'image de  $U$ . De plus, pour tout  $x \in \ell^2(\Lambda)$ , on a

$$(U\tilde{U}^{-1}x)_\mu = \sum_\lambda x_\lambda \langle \tilde{f}_\lambda, f_\mu \rangle. \quad (\text{B.16})$$

*Preuve :* Avec les mêmes notations que ci dessus, soit  $x = x_1 + x_2 \in \ell^2(\Lambda)$  (où  $x_1 \in \text{Im}(U)$ ). On a  $U^*x_2 = 0$ , et il existe  $f \in H$  tel que  $x_1 = Uf$ , et  $U\tilde{U}^{-1}x_1 = U(\tilde{U}^{-1}U)f = x_1$ . Donc il s'agit bien d'un projecteur orthogonal.

Par définition, on a  $U^*x = \sum_\lambda x_\lambda f_\lambda$ . Donc,

$$U\tilde{U}^{-1}x = UR^{-1}U^*x = U \left( \sum_\lambda x_\lambda \tilde{f}_\lambda \right) = \sum_\lambda x_\lambda \langle \tilde{f}_\lambda, f_\lambda \rangle.$$



**REMARQUE B.2** *Utilité des décompositions redondantes :* Les décompositions redondantes apportent une stabilité supplémentaire aux décompositions. En effet, soit  $f \in \mathcal{H}$  un vecteur fixé, et soit  $x = Uf$ . Supposons qu'une erreur  $\epsilon$  soit commise sur  $x$  : soient

$$y = x + \epsilon \quad \text{et} \quad \tilde{f} = \tilde{U}^{-1}y = f + \tilde{U}^{-1}\epsilon.$$

En notant  $\epsilon_1$  la projection de  $\epsilon$  sur  $U\mathcal{H}$ , et  $\epsilon_2$  sa projection sur  $(U\mathcal{H})^\perp$ , on voit immédiatement que  $\tilde{U}^{-1}\epsilon_2 = 0$ , et que donc

$$\|f - \tilde{f}\| \leq \|\epsilon_1\|/\sqrt{A}.$$

Ainsi, la composante  $\epsilon_2$  de l'erreur disparaît lors de l'inversion de la décomposition. On voit donc que dans des situations où on se doute à l'avance qu'une erreur importante va être commise sur les coefficients, lors d'une étape de transmission par exemple, on a intérêt à utiliser des décompositions par rapport à des repères de préférence à des décompositions sur des bases, car une partie de l'erreur disparaîtra lors de la resynthèse.

**REMARQUE B.3** Dans un contexte de traitement du signal, des décompositions redondantes telles que des décompositions par rapport à des repères trouvent leur utilité pour le codage des signaux, dès que l'on s'attend à ce que le signal codé soit perturbé par un "bruit".

## B.2. Inversion

La question qui se pose en pratique est la suivante : étant donnés les coefficients de  $f \in H$  par rapport à un repère  $\{f_n, n \in \Lambda\}$ , comment retrouver  $f$  à partir de ces coefficients ?

Nous connaissons déjà la réponse dans le cas d'un repère strict, puisque dans ce cas l'opérateur  $\mathcal{R}$  est un multiple de l'identité. La situation est un peu plus complexe dans le cas général, puisqu'il faut utiliser la relation

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, f_\lambda \rangle \mathcal{R}^{-1}f_\lambda,$$

et  $\mathcal{R}^{-1}$  n'est pas connu explicitement.

Considérons l'opérateur de repère  $\mathcal{R}$ . On sait que  $A \leq \mathcal{R} \leq B$ . Par conséquent, on a aussi

$$\frac{2A}{A+B} \leq \frac{2}{A+B} \mathcal{R} \leq \frac{2B}{A+B}.$$

Posons

$$T = 1 - \frac{2}{A+B} \mathcal{R}.$$

Un calcul immédiat montre que

$$\|T\| \leq \frac{B-A}{A+B} < 1. \quad (\text{B.17})$$

Par conséquent, l'opérateur  $1 - T$  est inversible, et la série de Neumann correspondante

$$1 + T + T^2 + T^3 + \dots$$

est convergente. On peut donc écrire

$$\mathcal{R}^{-1} = \frac{2}{A+B} (1 + T + T^2 + T^3 + \dots) . \quad (\text{B.18})$$

Ceci conduit à l'algorithme d'inversion suivant : en posant

$$\alpha_n = \langle f, f_n \rangle ,$$

on commence par évaluer

$$f^{(1)} = \frac{2}{A+B} \sum_n \alpha_n f_n .$$

On sait alors que

$$f - f^{(1)} = \frac{2}{A+B} (T + T^2 + T^3 + \dots) \left( \sum_n \alpha_n f_n \right) = Tf ,$$

de sorte que

$$\|f - f^{(1)}\| \leq \|T\| \|f\| \leq \frac{B-A}{A+B} \|f\| .$$

Si la précision est suffisante, c'est à dire si la constante  $(B-A)/(A+B)$  est assez faible, on se contentera de  $f^{(1)}$  comme approximation de  $f$ . Si tel n'est pas le cas, il faut pousser plus loin le développement, et considérer

$$f^{(2)} = \frac{2}{A+B} (1 + T) \left( \sum_n \alpha_n f_n \right) .$$

On a alors évidemment un ordre d'approximation supplémentaire :

$$\|f - f^{(2)}\| \leq \left( \frac{B-A}{A+B} \right)^2 \|f\| .$$

**REMARQUE B.4** L'algorithme d'inversion qu'on a vu ci-dessus a l'avantage d'être simple, mais n'est pas optimal. En pratique, il est souvent plus avantageux d'utiliser des méthodes classiques d'inversion, telles que des méthodes de gradient conjugué par exemple.

**REMARQUE B.5** Il est possible de montrer que les bases orthonormées que nous avons vues plus haut peuvent être remplacées par des repères construits de la même manière. C'est en particulier le cas des bases trigonométriques locales (on construit facilement des repères trigonométriques locaux), et des ondelettes, pour lesquelles il est même plus facile de construire des repères ue des bases.



**C**

# Fonctions d'une variable complexe, séries de Laurent

## C.1. Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

### C.1.1. Fonctions holomorphes

Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  une partie non vide du plan complexe. Soit  $f$  une fonction à valeurs complexes définie sur  $\Omega$ . Soit  $z_0 \in \Omega$ . On sait que  $f$  est différentiable en  $z_0$  si il existe un nombre complexe, noté  $f'(z_0)$  tel que :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h) .$$

S'il existe, il est égal à

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

et est le nombre dérivé de  $f$  au point  $z_0$ .

Pour  $z = x + iy$ , introduisons les notations :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) , \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) ,$$

**DÉFINITION C.1** Si  $f$  est différentiable dans tout  $\Omega$ , alors on dit que  $f$  est holomorphe. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \Omega$$

Par exemple, la fonction  $f : z \rightarrow 1/(z - \alpha)$ , où  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une constante, est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  privé de  $\alpha$ .

De là, on montre facilement les deux propriétés simples suivantes :

**PROPOSITION C.1** Si  $f$  et  $g$  sont holomorphes dans  $\Omega$ , alors  $f + g$  et  $fg$  le sont également.

**PROPOSITION C.2** Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et  $g$  est holomorphe dans  $f(\Omega)$ , alors la fonction composée  $f \circ g$  est holomorphe dans  $\Omega$  et on a

$$(f \circ g)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0) .$$

**THÉORÈME C.1 (CAUCHY-RIEMANN)** Soit  $f$  une fonction de la variable complexe définie dans  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , on décompose  $f$  suivant sa partie réelle  $P$  et sa partie imaginaire  $Q$ , avec  $z = (x, y) = x + iy$  :

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) .$$

Alors  $f$  est une fonction holomorphe si et seulement si  $P$  et  $Q$  satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} .$$

### C.1.2. Séries

On considère la série

$$f(z) = z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ;$$

le rayon de convergence de la série est défini par

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|$$

**PROPOSITION C.3** La série définissant  $f$  est  $C^\infty$  dans le disque ouvert  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ , et on a

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k} .$$

### C.1.3. Fonctions analytiques

**DÉFINITION C.2** Une fonction de la variable complexe  $f$  est analytique dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  si  $\forall z_0 \in \Omega$ ,  $f$  est développable en série entière en  $z_0$  : il existe  $r > 0$  tel que  $\forall z \in B(z_0, r)$ , on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Une fonction analytique dans  $\mathbb{C}$  est appelée *fonction entière* .

Notons que si  $f$  est analytique dans  $\Omega$ , alors

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

existe, et donc  $f$  est holomorphe. Plus généralement, on a

**THÉORÈME C.2** Une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  si et seulement si elle est holomorphe dans  $\Omega$ .

## C.2. Intégration sur un chemin dans $\mathbb{C}$

# Références Bibliographiques

- [1] W. Appel : Mathématiques pour la physique et les physiciens. H&K Ed. (2002).
- [2] H. Cartan : *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*. Hermann
- [3] J. Dieudonné : *Elements d'analyse*, vol. 6. Gauthier-Villars, Paris (1975).
- [4] I.M. Gelfand et G.E. Shilov : *Les distributions*
- [5] C. Gasquet et P. Witomski *Analyse de Fourier et applications , Filtrage, calcul numérique, ondelettes*, Masson (1996).
- [6] A. Gersho et R. Gray : *Vector Quantization and Signal Compression* Springer Verlag (1991)
- [7] R. Godement : *Analyse Mathématique*, tomes 1 à 4. Springer Verlag Ed (2004).
- [8] J. Lamperti : *Stochastic Processes : A Survey of the Mathematical Theory* (New York : Springer Verlag, 1977).
- [9] S. Mallat : *Une exploration des signaux en ondelettes*, Ellipses (2002).
- [10] A. Papoulis : *Signal Analysis*, Mcgraw-Hill College (août 1977)
- [11] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T Wetterling (1986) : *Numerical Recipes*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.
- [12] F. Riesz et B. Nagy (1955) : *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Gauthier-Villars.
- [13] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe.*, McGraw et Hill.
- [14] C. Soize : *Méthodes mathématiques pour le traitement du signal*. Dunod (1997).
- [15] E.T. Whittaker et G.N. Watson, *A modern course of Analysis*. Cambridge University Press (2003, première édition en 1927).
- [16] A. Zygmund. *Trigonometric Series*, Cambridge Mathematical Library, 3ième édition (2002).