Université Aix-Marseille 2018-2019
Master Mathématiques appliquées et statistiques 2ème année

Représentation parcimonieuse des signaux

Compléments pour le TP sur le Matching-Pursuit.

Le résultat suivant est démontré dans l'article de M. Elad et A. M Bruckstein [2] "A Generalized Uncertainty Principle and Sparse Representation in Pairs of Bases" et disponible à la page `https://pdfs.semanticscholar.org/10e7/0e16e5a68d52fa2c9d0a452db9ed2f9403aa.pdf`.

Pour ceux qui sont motivés la démonstration est à leur portée (techniques d'algèbre linéaire et optimisation sous contrainte en dimension finie) avec comme toujours un peu de travail.

Théorème 1

Soit $D = \{\phi^0, \dots, \phi^{K-1}\}$ *un dictionnaire de* $\mathbb{C}^N$ *qui est la réunion d'une base orthonormée* $\mathcal{B}_1$ *et d'une base orthonormée* $\mathcal{B}_2$*. Soit* $x \in \mathbb{C}^N$ *tel que*

$$x = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \alpha_\ell \phi^\ell \tag{1}$$

où $\mathcal{L}$ *est un sous-ensemble de* $\{0, \dots, K-1\}$ *et* $\alpha_\ell \neq 0$ *pour tout* $\ell \in \mathcal{L}$*. On note* α *le vecteur de* $\mathbb{C}^K$ *de coordonnées* α_ℓ *pour* $\ell \in \mathcal{L}$ *et* 0 *sinon.*

Si $card(\mathcal{L})\mu(D) < 1$ *alors la décomposition (1) est la plus parcimonieuse possible et il n'y en a pas d'autre.*

Autrement dit si on suppose que $x \in \mathbb{C}^N$ *vérifie aussi* $x = \sum_{\ell' \in \mathcal{L}'} \beta_{\ell'} \phi^{\ell'}$ *avec*

- $\mathcal{L}' \subset \{0, \dots, K-1\}$
- $\beta_{\ell'} \neq 0$ *pour tout* $\ell' \in \mathcal{L}'$
- β *le vecteur de* $\mathbb{C}^K$ *de coordonnées* $\beta_{\ell'}$ *pour* $\ell' \in \mathcal{L}'$ *et* 0 *sinon*

alors soit $\beta = \alpha$*, soit* $card(\mathcal{L}') > card(\mathcal{L})$*.*

Pour ce qui concerne le TP sur le Matching Pursuit, dans le cas où le dictionnaire avec lequel vous travaillez est la réunion de la base canonique et de la base de Fourier, ce résultat signifie que dès que vous créez un vecteur α_s qui contient exactement s coordonnées non nulles avec $s < \sqrt{N}$ alors le vecteur $x = D\alpha_s$ n'a aucune autre représentation parcimonieuse possible dans le dictionnaire D que α_s.

Si vous prenez $s \geq \sqrt{N}$ vous ne pouvez plus garantir qu'il n'y en a pas d'autre. En effet un autre résultat de Donoho et Huo [1] vous montre que dans le cas de notre dictionnaire D on ne peut pas faire mieux que le théorème de Elad et Bruckstein. En effet si $s = \sqrt{N}$ Donoho et Huo montrent que pour certains $N = p^2$ où p est entier il est possible de trouver des vecteurs x qui ont deux représentations parcimonieuses différentes avec chacune exactement $\sqrt{N}$ coefficients non nuls dans le dictionnaire D (ici formé de la réunion de la base de Fourier et de Dirac). Là encore les démonstrations de leur résultat devraient vous être accessibles si vous êtes motivé-e et avez envie de les travailler.

Références

[1] D. L. Donoho et X. Huo : Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. IEEE Transactions on Information Theory, 47 :2845â2862, 2001.

[2] M. Elad et A. Bruckstein : A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. IEEE Transactions On Information Theory, 48 :2558â2567, 2002.