Correction du partiel du 23 octobre 2018
Durée 2h

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés. Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Notation : $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$. La norme euclidienne associé au produit scalaire canonique est notée $\|.\|$.

Exercice 1. Vrai ou faux

Dire dans chaque cas si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en donnant toujours une justification à l'aide du cours, d'une démonstration, ou d'un contre-exemple.

1. Affirmation :« Deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. »

   Correction : L'affirmation est vraie ! En effet

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= \langle u-v,u-v\rangle \\ &= \langle u,u-v\rangle - \langle v,u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2\end{aligned}$$

   Donc $\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2$ si et seulement si $\langle u,v\rangle = 0$, c'est à dire si et seulement si u et v sont orthogonaux.

2. Affirmation : « Deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ ont même norme si et seulement si les vecteurs $u+v$ et $u-v$ sont orthogonaux. »

   Correction : L'affirmation est vraie ! En effet

$$\begin{aligned}\langle u+v,u-v\rangle &= \langle u,u-v\rangle + \langle v,u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 - \langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \|v\|^2\end{aligned}$$

   Donc $u+v$ et $u-v$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle u+v,u-v\rangle = 0$, c'est à dire si et seulement si $\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$, c'est à dire si et seulement si u et v ont même norme.

3. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit M_1 d'affixe z_1 et M_2 d'affixe z_2.

   Affirmation : « Les droites (OM_1) et (OM_2) sont orthogonales si et seulement si $z_1 z_2 = 0$. »

   Correction : L'affirmation est fausse ! En effet on prend M_1 le point d'affixe $z_1 = 1$ et M_2 le point d'affixe $z_2 = i$. Les droites (OM_1) et (OM_2) sont orthogonales car il s'agit respectivement de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

   Par contre $z_1 z_2 = i \neq 0$.
4. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

   Affirmation : « L'application qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe $2 - iz$ est une homothétie de centre $\omega = 1 - i$. »

   Correction : L'affirmation est fausse ! En effet la transformation proposée est de la forme $z' = az + b$ avec $a = -i$ et $b = 2$. Donc $a \notin \mathbb{R}$ et la transformation ne peut pas être une homothétie.

Exercice 2.

Soient f et g deux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $f(z) = (1 + i)z - 1$ et $g(z) = (1 - i)z - i$.

1. Donner la nature géométrique de f et préciser ses éléments caractéristiques.

   Correction : f est une similitude directe de la forme $f(z) = az + b$ avec $a = 1 + i$ et $b = -1$.

   On a $|a| = \sqrt{2}$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{4}$. Donc f est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ toutes les deux de même centre $\omega = \frac{b}{1-a} = -i$.
2. Donner la nature géométrique de g et préciser ses éléments caractéristiques.
   Correction : g est une similitude directe de la forme $f(z) = az + b$ avec $a = 1 - i$ et $b = -i$.

   On a $|a| = \sqrt{2}$ et $\arg(a) = -\frac{\pi}{4}$. Donc f est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ toutes les deux de même centre $\omega = \frac{b}{1-a} = -1$.
3. Donner la nature géométrique de $g \circ f$ et préciser ses éléments caractéristiques.

   Correction : On calcule $g \circ f(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$

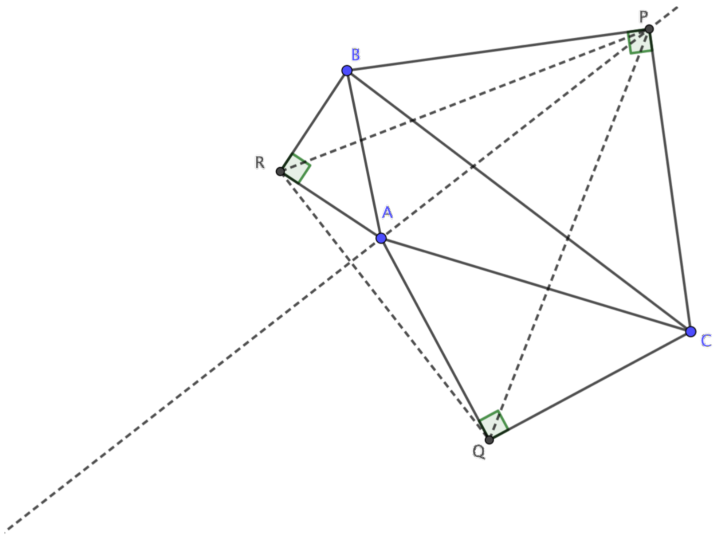
$$
\begin{aligned}
g \circ f(z) &= (1-i)((1+i)z-1)-i \\
&= (1-i^2)z-1+i-i \\
&= 2z-1
\end{aligned}
$$

L'application $g \circ f$ est donc une homothétie de rapport 2 et de centre $\omega = \frac{-1}{1-2} = 1$.

Exercice 3.

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère trois points A,B,C d'affixes respectifs a,b,c.

On construit les triangles isocèles rectangles BCP, CAQ et ABR, extérieurs à ABC et d'hypothénuses respectives BC, AC et AB (voir figure ci-dessous).
Les affixes de P, Q et R sont notés respectivement p,q,r.



1. Calculer $\dfrac{c-p}{b-p}$.

   Correction : D'après les hypothèses le triangle BCP est isocèle rectangle en P. Donc C est l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou par celle d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (l'angle dépend de l'orientation du triangle ABC), sur notre dessin on a l'angle $\frac{\pi}{2}$).

   Donc $c-p = i(b-p)$ ou $c-p = -i(b-p)$ et donc $\dfrac{c-p}{b-p} = i$ ou $\dfrac{c-p}{b-p} = -i$.

   Pour fixer les idées dans toute la suite et sans perte de généralité on prendra $\dfrac{c-p}{b-p} = i$.

2. Exprimer p, q et r en fonction de a, b, c.

   Correction : D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}
\frac{c-p}{b-p} &= i \\
c-p &= i(b-p) \\
c-ib &= p(1-i) \\
p &= \frac{c-ib}{1-i}
\end{aligned}$$

On calcule de même que dans la question 1 $\dfrac{b-r}{a-r} = i$ et $\dfrac{a-q}{c-q} = i$. Donc le même calcul que celui qu'on vient de faire donne $r = \dfrac{b-ia}{1-i}$ et $q = \dfrac{a-ic}{1-i}$.

Cela revient à avoir

$$\begin{aligned}
p &= \frac{c-ib}{1-i} = \frac{(c-ib)(1+i)}{2} \\
&= \frac{c+b+i(-b+c)}{2}
\end{aligned}$$

et de même $r = \frac{b+a+i(-a+b)}{2}$, et $q = \frac{a+c+i(-c+a)}{2}$.

3. Montrer que les droites (AP) et (QR) sont orthogonales et que les segments $[AP]$ et $[QR]$ ont même longeur.

   Correction : Calculons $\frac{p-a}{r-q}$ et montrons qu'il vaut i ou $-i$ ce qui montrera à la fois que $\left|\frac{p-a}{r-q}\right| = 1$, donc $AP = QR$ et que ces segments sont orthogonaux.

   On a ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{p-a}{r-q} &= \frac{\frac{c+b+i(-b+c)}{2} - a}{\frac{b+a+i(-a+b)}{2} - \frac{a+c+i(-c+a)}{2}} \\
&= \frac{c+b+i(-b+c)-2a}{b+a+i(-a+b)-a-c-i(-c+a)} \\
&= \frac{c+b-2a+i(-b+c)}{b-c+i(-2a+b+c)} \\
&= -i\frac{b-c+i(c+b-2a)}{b-c+i(-2a+b+c)} \\
&= -i
\end{aligned}$$

   On a bien le résultat voulu.

4. En déduire que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.
   Correction : La droite (AP) est la hauteur du triangle PQR issue du sommet P vu qu'elle est orthogonale à (QR) et qu'elle passe par P.

De même (BQ) est la hauteur du triangle PQR issue du sommet Q vu qu'elle est orthogonale à (PR) et qu'elle passe par Q.

Enfin (CR) est la hauteur du triangle PQR issue du sommet R vu qu'elle est orthogonale à (PQ) et qu'elle passe par R.

On sait que ces trois droites sont concourantes dans un triangle. Ce qui montre le résultat.

Exercice 4.

Soit $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$

1. Déterminer une base de F.

   Correction : tout élément de F du type (x_1,x_2,x_3) vérifie $x_1 = 2x_2 - x_3$. Donc il s'écrit

   $$(x_1,x_2,x_3) = x_2(2,1,0) + x_3(-1,0,1)$$

   Le système de vecteurs $\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$ est donc un système générateur de F. Or il est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc c'est une base de F.

2. Déterminer une base orthonormée de F notée $\mathcal{B}$.
   Correction : On pose $u_1 = (-1,0,1)$ et $u_2 = (2,1,0)$. Calculons d'abord

   $$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

   On calcule ensuite d'après le procédé de Gram-Schmidt

   $$f_2 = u_2 - \langle u_2,e_1\rangle e_1$$

   Ce qui donne vu que $\langle u_2,e_1\rangle = -\frac{2}{\sqrt{2}}$

   $$f_2 = (1,1,1)$$

   On calcule alors $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{f_2}{\sqrt{3}}$. Donc on obtient une base $\mathcal{B} = \{e_1,e_2\}$ orthonormée de F avec $e_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

   Remarque : Nous pouvons faire une rapide vérification en calculant $\langle e_1,e_2\rangle$ et en vérifiant qu'il est bien nul.

3. Compléter $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B}'$.

   Correction : Il nous suffit de trouver un vecteur f_3 orthogonal à e_1 et à e_2. Prenons $f_3 = (a,b,c)$ il doit satisfaire les équations

$$
\begin{aligned}
\langle e_1,f_3\rangle &= 0\\
-\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{c}{\sqrt{2}} &= 0\\
-a+c &= 0
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\langle e_2,f_3\rangle &= 0\\
\frac{a}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}+\frac{c}{\sqrt{3}} &= 0\\
a+b+c &= 0
\end{aligned}
$$

Remarquons que cela nous donne $a=c$ et aussi $b=-2a$. Donc $f_3=(1,-2,1)$ convient.

Remarque : de nouveau cela vaut le coup de prendre le temps de calculer $\langle e_1,f_3\rangle$ et $\langle e_2,f_3\rangle$ et de vérifier qu'ils sont bien nuls.

Nous normons f_3 pour obtenir $e_3=\frac{f_3}{\|f_3\|}=\frac{f_3}{\sqrt{6}}$. Donc $e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. La base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ que nous obtenons est $\{e_1,e_2,e_3\}$.

4. Soit $x=(1,1,1)$.

   Donner les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

   Correction : Les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$ telles que $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$ s'écrivent, du fait que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée

$$
\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle x,e_1\rangle\\ \langle x,e_2\rangle\\ \langle x,e_3\rangle\end{pmatrix}
$$

   Donc on a

$$
\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}
$$

   Remarque : on aurait pu aussi constater que x et e_2 sont colinéaires et qu'on a en fait $x=\sqrt{3}e_2$ donc $\alpha_1=0=\alpha_2$ ce qu'on a retrouvé par le calcul.

Exercice 5.

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui conserve le produit scalaire, c'est à dire telle que pour tous u,v de $\mathbb{R}^n$ on a $\langle f(u),f(v)\rangle=\langle u,v\rangle$.
On se propose de montrer que f est linéaire et bijective.

1. Montrer que pour tous u et v dans $\mathbb{R}^n$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$ on a

$$
\|f(u+\lambda v)-f(u)-\lambda f(v)\|^2=0
$$

Correction : Le calcul est basé sur le fait que

$$\|a+b+c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + 2\langle b,c\rangle + 2\langle a,c\rangle + 2\langle a,b\rangle$$

Il suffit pour le voir de faire le développement complet en utilisant la bilinéarité du produit scalaire de

$$\|a+b+c\|^2 = \langle a+b+c,a+b+c\rangle$$

De même en écrivant $\|a-b-c\|^2 = \|a+(-b)+(-c)\|^2$, et en utilisant le fait que $\|-b\| = \|b\|$ et $\|-c\| = \|c\|$ on obtient

$$\|a-b-c\|^2 = \langle a-b-c,a-b-c\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + 2\langle b,c\rangle - 2\langle a,c\rangle - 2\langle a,b\rangle.$$

On obtient donc pour tous u,v dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|f(u+ & \lambda v) - f(u) - \lambda f(v)\|^2 = \langle f(u+\lambda v) - f(u) - \lambda f(v), f(u+\lambda v) - f(u) - \lambda f(v)\rangle \\
= & \langle f(u+\lambda v), f(u+\lambda v)\rangle + \langle f(u), f(u)\rangle + \langle \lambda f(v), \lambda f(v)\rangle \\
& -2\langle f(u+\lambda v), f(u)\rangle - 2\langle f(u+\lambda v), \lambda f(v)\rangle + 2\langle f(u), \lambda f(v)\rangle \\
= & \langle f(u+\lambda v), f(u+\lambda v)\rangle + \langle f(u), f(u)\rangle + \lambda^2\langle f(v), f(v)\rangle \\
& -2\langle f(u+\lambda v), f(u)\rangle - 2\lambda\langle f(u+\lambda v), f(v)\rangle + 2\lambda\langle f(u), f(v)\rangle
\end{aligned}$$

Et vu la propriété de f on a donc

$$\begin{aligned}
\|f(u+ & \lambda v) - f(u) - \lambda f(v)\|^2 \\
= & \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle + \langle u,u\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle \\
& -2\langle u+\lambda v, u\rangle - 2\lambda\langle u+\lambda v, v\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle \\
= & \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle + \langle -u, -u\rangle + \langle -\lambda v, -\lambda v\rangle \\
& +2\langle u+\lambda v, -u\rangle + 2\langle u+\lambda v, -\lambda v\rangle + 2\langle -u, -\lambda v\rangle \\
= & \|u+\lambda v - u - \lambda v\|^2 = 0
\end{aligned}$$

2. En déduire que f est une application linéaire. Montrer que f est bijective.

   Correction : On a montré dans la question précédente que pour tous u,v dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

   $$\|f(u+\lambda v) - f(u) - \lambda f(v)\|^2 = 0$$

   c'est à dire

   $$\|f(u+\lambda v) - f(u) - \lambda f(v)\| = 0$$

   Or on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si $\|x\| = 0$ on a $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc ici pour tous u,v dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(u+\lambda v) - f(u) - \lambda f(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc f vérifie pour tous u,v dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

   $$f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

f est donc linéaire.

D'autre part montrons que f est bijective.

f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ donc elle est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si son noyau est réduit à zéro.

Supposons que $u \in \mathbb{R}^n$ est dans $Ker(f)$. On a donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $\langle f(u),f(u)\rangle = 0$. D'après les propriétés de f on a $\langle f(u),f(u)\rangle = \langle u,u\rangle$. Donc $\langle u,u\rangle = 0 = \|u\|^2$, c'est à dire $\|u\| = 0$.
Or on sait que si $\|x\| = 0$ on a $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc vu que $\|u\| = 0$ on a $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et f est bijective.

3. Soit une application g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui préserve la norme, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $\|g(x)\| = \|x\|$. Montrer que g est linéaire et bijective.

   Correction : L'hypothèse « g linéaire »est nécessaire... En effet soit e un vecteur de norme 1. Prenons $g(x) = \|x\|e$. On a g qui n'est pas linéaire et qui vérifie $\|g(x)\| = \|\|x\|e\| = \|x\|\|e\| = \|x\|$.

   On voit donc que c'est faux et qu'on ne pourra pas démontrer cela...
   Montrons ce qu'on nous demande de montrer sous l'hypothèse g linéaire.

   De nouveau (calcul qu'on a déjà en fait fait plusieurs fois dans ce partiel) on utilise le fait que pour tous $a,b \in \mathbb{R}^n$
   $$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a,b\rangle + \|b\|^2.$$
   Comme il est indispensable de savoir faire ce calcul on redit comment le faire
   $$\begin{array}{rcl} \|a+b\|^2 & = & \langle a+b,a+b\rangle \\ & = & \langle a+b,a\rangle + \langle a+b,b\rangle \\ & = & \langle a,a\rangle + \langle b,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle \\ & = & \langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle \\ & = & \|a\|^2 + 2\langle a,b\rangle + \|b\|^2 \end{array}$$
   et donc pour tous $a,b \in \mathbb{R}^n$
   $$\|a+b\|^2 = \langle a+b,a+b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a,b\rangle.$$
   On a pour tous u,v dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
   $$\begin{array}{rcl} \|g(u+\lambda v)\|^2 & = & \|u+\lambda v\|^2 \\ \langle g(u+\lambda v),g(u+\lambda v)\rangle & = & \langle u+\lambda v,u+\lambda v\rangle \\ \langle g(u)+\lambda g(v),g(u)+\lambda g(v)\rangle & = & \langle u+\lambda v,u+\lambda v\rangle \\ \|g(u)\|^2 + \|\lambda g(v)\|^2 + 2\langle g(u),\lambda g(v)\rangle & = & \|u\|^2 + \|\lambda v\|^2 + 2\langle u,\lambda v\rangle \\ \|g(u)\|^2 + \lambda^2\|g(v)\|^2 + 2\lambda\langle g(u),g(v)\rangle & = & \|u\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda\langle u,v\rangle \end{array}$$

Or $\|g(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et $\|g(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous u,v dans $\mathbb{R}^n$

$$2\lambda\langle g(u),g(v)\rangle = 2\lambda\langle u,v\rangle$$

Prenons $\lambda \neq 0$ et on a donc pour tous u,v dans $\mathbb{R}^n$

$$\langle g(u),g(v)\rangle = \langle u,v\rangle$$

On voit donc que g conserve le produit scalaire.

D'après ce qu'on a vu dans la question précédente on sait qu'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie une telle propriété est bijective. Donc g est bien bijective et conserve le produit scalaire.