Université Aix-Marseille	2018-2019
Master Traitement du signal et des images	1ère année

Mathématiques pour le signal et l'image

Test surveillé de Mathématiques.

mardi 4 décembre 2018

durée : 1 heure

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.
Il est conseillé de lire l'énoncé en entier avant de commencer.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

— On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^N$ tel que $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n}$ pour $x = (x_i)_{i=0,\dots N-1} \in \mathbb{C}^N$ et $y = (y_i)_{i=0,\dots N-1} \in \mathbb{C}^N$.

— On note δ^ℓ pour $\ell \in \{0, \dots N-1\}$ le ℓ-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Il s'agit du vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que pour $n \in \{0, \dots N-1\}$ on a $\delta_n^\ell = 1$ si $n = \ell$ et 0 sinon. La collection de vecteurs $\{\delta^\ell, \ell \in \{0, \dots, N-1\}\}$ constitue la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

Exercice 1

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{e_1} = (1,1,2), \quad \vec{e_2} = (2,1,2), \quad \vec{e_3} = (1,0,1)$.

On note $\mathcal{B}$ la famille de vecteurs $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

1. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Pourquoi cette famille forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Écrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.
3. Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

On suppose que N est un entier pair.

Dans cet exercice, on considère la base de Haar discrète déjà vue en cours. On rappelle comment elle est constituée.
On considère ainsi les vecteurs suivants :

$$\Phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2 \text{ zéros}}\right)$$

et

$$\Phi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\delta^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2 \text{ zéros}}\right).$$

De même pour $k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$:

$$\Phi^{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta^{2k} + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta^{2k+1} = \left(\underbrace{0, \dots, 0,}_{2k \text{ zéros}} \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2-2k \text{ zéros}}\right)$$

et

$$\Phi^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta^{2k} - \frac{1}{\sqrt{2}}\delta^{2k+1} = \left(\underbrace{0, \dots, 0,}_{2k \text{ zéros}} \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2-2k \text{ zéros}}\right).$$

La base de Haar $\mathcal{B}$ est l'ensemble des vecteurs $\{\Phi^k, k = 0, \dots, N-1\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$.
2. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^N$. En utilisant si nécessaire le cours, donner la valeur des coefficients α_i tels que $x = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \Phi^k$.