Université Aix-Marseille 2018-2019
Master Mathématiques appliquées et statistiques 2ème année

Représentation parcimonieuse des signaux

Notes de cours et Td : Parcimonie et bases de Fourier.
Signaux parcimonieux dans la base de Fourier

Dans cette partie nous cherchons à comprendre qui vont être les signaux parcimonieux dans la base de Fourier. Mais pour cela nous allons faire un détour par les signaux continus.

1 A propos du passage analogique-numérique

Un signal numérique peut être vu comme un signal d'une ou plusieurs variables continues (dit analogique) qui a été discrétisé. Physiquement les sons et les images, ou encore les électroencéphalogrammes sont au départ des signaux analogiques. En effet le temps donne une variable continue, comme l'espace qui nous entoure. C'est le traitement par un ordinateur qui pousse à fabriquer des sons numériques ainsi que des images numériques, donc de la variable discrète et qui sont stockés sous forme de vecteurs.

Les signaux ou images numériques sont ainsi fabriqués grâce à une opération de discrétisation : on part d'un signal analogique, c'est à dire une fonction f de la variable continue, et on le discrétise, par exemple comme suit dans le cas d'un son.

On choisit un intervalle de temps que l'on notera ici $[0, T]$ (sans perte de généralité), sur lequel on veut travailler. Puis on choisit un intervalle de temps t_s, qui indique à quelle fréquence on va prendre les échantillons. On note $f_s = \frac{1}{t_s}$ qui est appelée ≪ **fréquence d'échantillonnage** ≫. On calcule alors N le nombre d'≪ échantillons ≫à l'aide de la relation $t_s = \frac{T}{N}$.

Le signal numérisé est alors obtenu en calculant pour $0 \leq n \leq N-1$ $u_n = f(nt_s) = f\left(\frac{n}{f_s}\right) = f\left(\frac{nT}{N}\right)$. Le vecteur $u = (u_0, \dots u_{N-1}) = \left(f\left(\frac{0}{N}\right), \dots, f\left(\frac{(N-1)T}{N}\right)\right)$ correspond donc à la numérisation du signal f (voir figure 1).

On se rend compte sur cette figure 1 que si la fréquence d'échantillonnage f_s est trop petite, le signal pourrait être dégradé au moment de la numérisation. Ce point fait l'objet du théorème de Shannon qui donne des conditions de reconstruction parfaite du signal analogique à partir du signal numérique si le signal analogique vérifie certaines propriétés (il n'a pas trop d'oscillations très rapides).

Le cas particulier de la base de Fourier

En particulier nous pouvons constater que les vecteurs $e^\ell \in \mathbb{C}^N$, $\ell \in \{0, \dots N-1\}$ vus dans le Td précédent peuvent être vus comme des versions discrétisés de vecteurs

$$\begin{array}{rccc} \tilde{e}^\ell : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & e^{i2\pi\ell t} \end{array}$$

Il s'agit de fonctions périodiques de période 1 qui sont d'ailleurs continues sur $\mathbb{R}$. La discrétisation qui donne les vecteurs e^ℓ est celle qui consiste à examiner la fonction $\tilde{e}^\ell$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et à poser pour N fixé $e_n^\ell = \tilde{e}^\ell\left(\frac{n}{N}\right)$ pour $n \in \{0, \dots N-1\}$. On a bien $e_n^\ell = e^{i\frac{2\pi\ell n}{N}} = \tilde{e}^\ell\left(\frac{n}{N}\right)$.

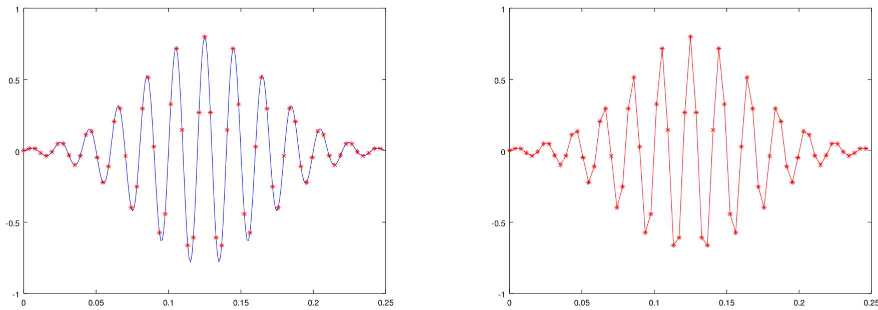

Figure 1 – A gauche : le signal original f représenté sur $[0, T]$ en bleu a été échantillonné et on a donc construit le vecteur $u = (u_0, \dots u_{N-1})$ dont les valeurs correspondent aux ordonnées des points rouges. A droite : on trace en les reliant par des segments de droites les points (t_n, u_n) avec $t_n = \frac{nT}{N}$.

2 L'espace $L^2([0,1])$

Nous allons considérer dans toute cette partie des signaux de $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ c'est à dire tels que $x : [0,1] \to \mathbb{C}$ est mesurable sur l'intervalle $[0,1]$ et $\int_0^1 |x(t)|^2 dt < \infty$. Autrement dit x est d'énergie finie.

Rappelons que le produit scalaire canonique défini sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ par : pour tous x, y dans $\mathcal{H}$

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

munit l'espace $\mathcal{H}$ d'une structure d'espace préhilbertien, et même en réalité d'espace de Hilbert. Dans toute ce chapitre c'est le produit scalaire qu'on utilisera.

Nous noterons $\|x\|$ la norme sur $\mathcal{H}$ issue du produit scalaire canonique sur $\mathcal{H}$, c'est à dire que

$$\|x\|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt$$

2.1 Propriété de la base de Fourier $\tilde{E}$

Proposition 1

La famille $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}^\ell, \ell \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthogonale, et même orthonormée de $\mathcal{H}$.

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathcal{H}$.

— *On appelle ℓ-ième coefficient de Fourier de x*

$$c_\ell(x) = \int_0^1 x(t)e^{-2i\pi\ell t}dt = \langle x, \tilde{e}^\ell \rangle$$

— *Soit $K \in \mathbb{N}$. On appelle série de Fourier d'ordre K de x la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par*

$$S_K(x)(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k(x)e^{2i\pi kt}$$

Proposition 2

Soit $x \in \mathcal{H}$ et $K \in \mathbb{N}$

1. *pour tout* $\ell \in \mathbb{Z}$ *tel que* $|\ell| \leq K$ *on a* $\langle S_K(x), \tilde{e}^\ell \rangle = c_\ell(x) = \langle x, \tilde{e}^\ell \rangle$.

2. *pour tout* $\ell \in \mathbb{Z}$ *tel que* $|\ell| > K$ *on a* $\langle S_K(x), \tilde{e}^\ell \rangle = 0$.

3. *On a*
$$\|S_K(x)\|^2 = \sum_{k=-K}^{K} |c_k(x)|^2$$

4. *En particulier* $S_K(x)$ *est la projection orthogonale de* x *sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs* $\{\tilde{e}^\ell, \ell = -K, -K+1, \dots, K\}$ *et donc*
$$\|x\|^2 = \|x - S_K(x)\|^2 + \|S_K(x)\|^2$$

Théorème 1

Soit $x \in \mathcal{H}$. *On a*

1. *(admise) l'égalité de « Parseval »*
$$\|x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2$$

2. *On a aussi*
$$\|x - S_K(x)\|^2 = \sum_{|k|>K} |c_k(x)|^2$$
et donc $\lim_{K \to +\infty} \|x - S_K(x)\|^2 = 0$

2.2 Vitesse de convergence de la série de Fourier

On voit que le théorème 1 nous permet de dire que pour $x \in \mathcal{H}$ $c_k(x) \to 0$ pour $|k| \to +\infty$. Examinons si nous pouvons préciser à quelle vitesse la suite des coefficients de Fourier tend vers 0 et ainsi préciser à quelle vitesse $\|x - S_K(x)\| \to 0$ pour $K \to +\infty$.

Ce que nous appellerons la périodisée de $x \in H$ est la fonction périodique de période 1 qui vaut x sur l'intervalle $[0, 1[$.

Proposition 3

Soit $x \in \mathcal{H}$.

1. *On suppose que la périodisée de* x *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$. *Alors il existe* $(\varepsilon(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ *avec* $\varepsilon(k) \to 0$ *pour* $|k| \to +\infty$ *telle que pour tout* $k \in \mathbb{Z}^*$
$$c_k(x) = \frac{\varepsilon(k)}{k}$$
En particulier il existe $C > 0$ *tel que pour tout* $k \in \mathbb{Z}^*$
$$|c_k(x)| \leq \frac{C}{|k|}$$

2. *On suppose que la périodisée de* x *est de classe* C^p *pour* $p \in \mathbb{N}^*$ *sur* $\mathbb{R}$. *Alors il existe* $(\varepsilon(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ *avec* $\varepsilon(k) \to 0$ *pour* $|k| \to +\infty$ *telle que pour tout* $k \in \mathbb{Z}^*$
$$c_k(x) = \frac{\varepsilon(k)}{k^p}$$
En particulier il existe $C > 0$ *tel que pour tout* $k \in \mathbb{Z}^*$
$$|c_k(x)| \leq \frac{C}{|k|^p}$$

Proposition 4

Soit $x \in \mathcal{H}$ telle que sa périodisée est de classe C^p pour $p \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}$. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $K \in \mathbb{N}^\star$

$$\|x - S_K(x)\| \leq \frac{C}{K^{p-\frac{1}{2}}}$$

Travaux dirigés

Démonstrations des résultats du cours.

Exercice 1

Démontrer la proposition 1.

Exercice 2

Démontrer la proposition 2.

Exercice 3

Montrer l'équivalence entre les deux assertions du théorème 1.

Exercice 4

L'objectif est de montrer la proposition 3. On peut chercher à répondre aux questions suivantes puis faire la démonstration complète

1. *Montrer que x' est dans $L^2([0,1])$ et calculer ses coefficients de Fourier en fonction de ceux de x.*
2. *En déduire le point 1.*

Exercice 5

Montrer la proposition 4.

Indication : remarquer que si f est une fonction décroissante alors pour tout $t \in [n, n+1]$ on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ et donc $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$.

Exercices d'application du cours.

Exercice 6 (*Application du théorème de Parseval*)

1. *On suppose que f est une fonction continue 1 périodique. Montrer que f est une fonction de $L^2([0,1])$.*
2. *Montrer que si f est une fonction de $L^2([0,1])$, et $c_n(f) = 0$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$ alors $f = 0$.*
3. *En déduire que si f et g sont deux fonctions de $L^2([0,1])$ telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors $f = g$.*

Exercice 7 (*Approximation par $S_N(f)$*)

Dans cet exercice on souhaite évaluer l'erreur qu'on commet quand on remplace une fonction par sa série de Fourier d'ordre N.

1. *On considère le signal périodique f de période 1 défini sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par*

$$f(t) = e^{-|t|}$$

   (a) *Tracer f*

   (b) *Calculer ses coefficients de Fourier $c_n(f)$.*

(c) *Montrer que $S_N(f)$ converge vers f dans $L^2([0,1])$ et contrôler l'erreur d'approximation $\| f - S_N(f) \|_2$ en fonction de N.*

2. *On considère maintenant le signal périodique de période 1 telle que pour $t \in [0,1[$*

$$f(t) = t$$

(a) *Tracer f*

(b) *Montrer que $S_N(f)$ converge vers f dans $L^2([0,1])$ et majorer l'erreur d'approximation $\| f - S_N(f) \|_2$ en fonction de N.*

(c) *Comparer avec le résultat obtenu dans la question 1c. Auriez-vous une explication pour comprendre la différence de vitesse de convergence ? ?*

3. **Étude numérique avec Python** *: Considérer les versions discrétisées des signaux c'est à dire les vecteurs du type $x = \left(f\left(a\right), f\left(a+\frac{1}{N}\right), f\left(a+\frac{2}{N}\right), \dots f\left(a+\frac{(N-1)}{N}\right)\right)$ pour $N = 2^n$ fixé (par exemple $n = 14$).*

Calculer numériquement les coefficients de la transformée de Fourier discrète de x $\hat{x}[k]$ et étudier numériquement la vitesse de convergence de $|x - x_K|_2$ quand $K \to +\infty$, avec $x_K = \frac{1}{N}\sum_{k=-K}^{K} \hat{x}[k]e^k$. Commenter.

Exercices pour aller plus loin

Exercice 8

Soit $T > 0$. Si on travaille dans $L^2([0,T])$ alors

— *on prend pour tous x, y dans $L^2([0,T])$*

$$\langle x, y\rangle = \int_0^T x(t)\overline{y(t)}dt$$

— *Soit $x \in L^2([0,T])$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ on appelle coefficient de Fourier de x d'ordre ℓ*

$$c_\ell(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi\ell t}{T}}dt$$

— *Soit $x \in L^2([0,T])$ et $K \in \mathbb{N}$ on appelle série de Fourier de x d'ordre K pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$S_K(x) = \sum_{k=-K}^{K} c_k(x)e^{i\frac{2\pi\ell t}{T}}$$

Adapter tous les résultats obtenus dans le cas $T = 1$ au cas général.

Exercice 9

On considère maintenant un système orthonormal $\{\phi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ dans $L^2([0,1])$ et on suppose que pour tout $x \in L^2([0,1])$ on a

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle x, \phi_n\rangle|^2$$

Montrer que

$$\lim_{K\to+\infty} \|x - \sum_{k=-K}^{K} \langle x, \phi_n\rangle\phi_n\| = 0 \qquad (1)$$

Exercice 10 (*Base de cosinus*)

Cet exercice est dédié à la décomposition de signaux à temps continu et de durée finie sur une famille de cosinus. Il sâagit d'un outil fondamental, dont la version temps discret intro-

duite en 1974, est à la base de méthodes de compressions de donnéees (signaux, images, . . .) et en particulier de la norme JPEG.

On considère ici des signaux de $L^2([0,1])$. On pose

$$C_0(t) = 1, \ \forall t \in [0,1]$$

et pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in [0,1]$

$$C_n(t) = \sqrt{2}\cos(\pi n t)$$

1. *Montrer que la famille $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormale de $L^2([0,1])$.*
2. *Soit $c > 0$ et $x : t \mapsto 1$ un signal constant. Calculer $\langle x, C_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Soit $x : t \mapsto \cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une constante donnée positive. Calculer $\langle x, C_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Montrer que l'égalité de Parseval est vérifiée pour $x \in L^2([0,1])$*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, C_n\rangle|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt$$

5. *Que peut-on en déduire ?*

Dans ce qui suit on pourra utiliser le théorème suivant

Théorème 2

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme induite $\| \, . \, \|$ par ce produit scalaire.

Soit $\Phi = \{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ une famille orthonormée d'un espace de Hilbert H.
Soit V l'espace engendré par cette famille, c'est à dire l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des ϕ_k.

Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes

1. *La famille Φ est totale, c'est à dire $V^\perp = \{0\}$*
2. *V est dense dans H.*
3. *Φ est une base hilbertienne de H, c'est à dire :*
   pour tout $x \in H$, $\| x - \sum_{k=-N}^{N} \langle x, \phi_k\rangle \phi_k \| \to 0$ pour $N \to +\infty$.
4. *pour tout x dans H, $\| x \|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle x, \phi_k\rangle|^2$ (égalité de Parseval).*

Exercice 11 (*Ondelettes de Haar*)

La base suivante est la base la plus élémentaire de la famille des bases d'ondelettes. Ces bases orthonormées sont construites à l'aide d'une fonction dite « d'échelle » ϕ d'intégrale non nulle (appelée fonction d'échelle) et d'une fonction ψ (appelée ondelette) qu'on va dilater et translater. Elles permettent de calculer des coefficients $\langle f, \psi_{n,k}\rangle$ qui prennent en compte le comportement local d'un signal f et en particulier vont être petits quand le signal f est régulier.

On pose $\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le< 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $\psi_{n,k}(x) = 2^{\frac{n}{2}}\psi(2^n x - k)$ pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \le k < 2^n$.

1. *Montrer que la fonction $\phi = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et les fonctions $\psi_{n,k}$ constituent un système orthonormal dans l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$.*
2. *Soit $f \in L^2([0,1])$ une fonction orthogonale aux précédentes. Montrer (par récurrence*

sur n) que

$$\int_{2^{-n}k}^{2^{-n}(k+1)} f(x)dx = 0$$

pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k < 2^n$.

3. On considère la fonction pour tout $x \in [0,1]$

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy$$

Montrer que F est continue sur $[0,1]$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Puis montrer que $F = 0$ en utilisant 2 et en déduire que $F = 0$.

4. Conclure que la fonction ϕ et les fonctions $\psi_{n,k}$ forment une base hilbertienne.

5. Calculer les coefficients $\langle f, \phi \rangle$ et $\langle f, \psi_{n,k} \rangle$, $n, k \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants et comparer leur décroissance en fonction de $n \to +\infty$

   (a) $f : t \mapsto 1$.

   (b) $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[1/4,3/4]}(t)$.

   (c) $f : t \mapsto |x - \frac{1}{2}|^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ fixé.

   ϕ est appelée fonction d'échelle et ψ ondelette.