| | |
|---|---|
| Université Aix-Marseille | 2018-2019 |
| Master Mathématiques appliquées et statistiques | 2ème année |

**Représentation parcimonieuse des signaux**

Notes de cours et Td : Parcimonie et bases d'ondelettes.
Signaux parcimonieux dans une base d'ondelettes

# 1 Bases d'ondelettes discrètes

Dans toute cette partie on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^N$ tel que $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n}$ pour $x = (x_i)_{i=0,\ldots N-1} \in \mathbb{C}^N$ et $y = (y_i)_{i=0,\ldots N-1} \in \mathbb{C}^N$. On note $|x|_2^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2$ pour $x \in \mathbb{C}^N$.

## 1.1 Schéma de Haar

On considère un signal numérique $x \in \mathbb{R}^N$ de taille $N = 2^n$ noté $x = (x_0, \ldots, x_{N-1})$.

On note $f^1 = \left( \frac{x_0+x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2+x_3}{\sqrt{2}}, \ldots \frac{x_{N-2}+x_{N-1}}{\sqrt{2}} \right)$ et $g^1 = \left( \frac{x_0-x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2-x_3}{\sqrt{2}}, \ldots \frac{x_{N-2}-x_{N-1}}{\sqrt{2}} \right)$.

En particulier $f^1$ et $g^1$ sont tous deux de taille $N/2$.

**Proposition 1**

*Soit $x$ un signal numérique de $\mathbb{R}^N$ avec $N = 2^n$, et $f^1$, $g^1$ définis comme précédemment à partir de la donnée de $x$.*

- *Les signaux $f^1$ et $g^1$ sont obtenus par une opération de filtrage suivi d'un sous-échantillonnage. C'est à dire qu'il existe $h$ et $g$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^N$ tels que pour tout $k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$*
  - $f_k^1 = (h \star x)(2k)$
  - $g_k^1 = (g \star x)(2k)$
- *On reconstruit $x$ le signal d'origine de façon unique à partir de la donnée de $f^1$ et de $g^1$.*

On peut itérer le schéma précédent en recommençant les mêmes opérations sur $f^1$. Cela nous donne pour $n_0$ étapes

$$\begin{array}{ccccccc}
x(\text{taille } N) & \rightarrow & f^1(\text{taille } N/2) & \rightarrow & f^2(\text{taille } N/2^2) & \ldots \rightarrow & f^{n_0}(\text{taille } N/2^{n_0}) \\
 & \searrow & & \searrow & & \ldots \searrow & \\
 & & g^1(\text{taille } N/2) & & g^2(\text{taille } N/2^2) & \ldots & g^{n_0}(\text{taille } N/2^{n_0})
\end{array}$$

À partir de la donnée de $(g^1, g^2, \ldots, g^{n_0}, f^{n_0})$ on peut reconstuire $x$ le signal d'origine de façon unique.

## 1.2 Base de Haar discrète

On note la fonction $\Phi_0 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-2 \text{ zéros}} \right)$ et $\Psi_0 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-2 \text{ zéros}} \right)$.

De même pour $k = 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$ : $\Phi_k = \left( \underbrace{0, \ldots, 0,}_{2k \text{ zéros}} \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-2-2k \text{ zéros}} \right)$ et $\Psi_k = \left( \underbrace{0, \ldots, 0,}_{2k \text{ zéros}} \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-2-2k \text{ zéros}} \right)$.

**Proposition 2**

— *La base $\{\Phi_k, \Psi_k, k = 0, 1, \dots N/2 - 1\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$.*
— *pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et avec les notations précédentes on a*

$$f^1 = (\langle x, \Phi_0\rangle, \langle x, \Phi_1\rangle, \dots, \langle x, \Phi_{N/2-1}\rangle)$$

*et*

$$g^1 = (\langle x, \Psi_0\rangle, \langle x, \Psi_1\rangle, \dots, \langle x, \Psi_{N/2-1}\rangle).$$

# 2 Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$

On note $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ et $\langle x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)dt$ le produit scalaire canonique sur $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $x$ et $y$ dans $\mathcal{H}$ et on note $\|x\|_2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$.

**Définition 1**

*Soit $x$ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que et $K \in \mathbb{N}$. tel que pour tout $0 \leq m \leq K$ on a $\int_{\mathbb{R}} |t^m \psi(t)|dt < +\infty$.*

*On dit qu'une fonction $x$ de $\mathcal{H}$ a $K+1$ moments nuls si pour tout $m = 0, \dots K$ $\int_{\mathbb{R}} |t^m \psi(t)|dt < +\infty$ et $\int t^m \psi(t)dt = 0$.*

## 2.1 Base de Haar de la variable continue

On pose $\phi = \mathbb{1}_{[0,1[}$ et $\psi = \mathbb{1}_{[0,1/2[} - \mathbb{1}_{[1/2,1[}$.

On note pour $k \in \mathbb{Z}$ les fonctions $\phi_k : t \mapsto \phi(t-k)$ et pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ $\psi_{j,k} : t \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ et pour tout $x \in L^2(\mathbb{R})$ on écrit pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \in \mathbb{N}$

$$D_k = \langle x, \phi_k\rangle$$

et

$$C_{j,k} = \langle x, \psi_{j,k}\rangle$$

**Théorème 1**

1. *Le système de vecteurs $\mathcal{B}_H = \{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}, j \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormé de $\mathcal{H}$.*
2. *(admis) il vérifie l'égalité de Parseval c'est à dire que pour tout $x \in \mathcal{H}$*

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |D_k|^2 + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_{j,k}|^2$$

Le système de vecteurs $\mathcal{B}_H$ forme ce qu'on appelle une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

# 3 Base d'ondelettes régulières à support compact de $L^2(\mathbb{R})$

Soit $\phi$ et $\psi$ deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. On note pour $k \in \mathbb{Z}$ les fonctions $\phi_k : t \mapsto \phi(t-k)$ et pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ $\psi_{j,k} : t \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ et pour tout $x \in L^2(\mathbb{R})$ on écrit pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \in \mathbb{N}$

$$D_k = \langle x, \phi_k\rangle$$

et

$$C_{j,k} = \langle x, \psi_{j,k}\rangle$$

**Théorème 2**

*(Mallat-Meyer-Daubechies)-admis Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On peut construire $\phi$ et $\psi$ deux fonctions de classe $C^K$ à support compact telles que*

- *$\psi$ a $K+1$ moments nuls et son support contient $[-K, K+1]$. Le support de $\phi$ contient $[0, 2K+1]$.*
- *$\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}, j \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormé de $\mathcal{H}$,*
- *il vérifie l'égalité de Parseval c'est à dire que pour tout $x \in \mathcal{H}$,*

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |D_k|^2 + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_{j,k}|^2$$

Un tel système de fonctions $\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}, j \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$ est appelé base d'ondelettes de Daubechies. Il forme là encore une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.

# 4 Régularité lipschitzienne

## 4.1 Préliminaires

**Proposition 3**

*(Corollaire de la formule de Taylor-Lagrange)*
*Soient $a, b$ deux réels avec $a < b$. On suppose que $x$ est défini sur $[a, b]$ et de classe $C^K$ pour $K \in \mathbb{N}^*$ : pour tout $t_0 \in ]a, b[$ et tout $t \in ]a, b[$*

$$x(t) = P_{t_0}(t) + \mathcal{O}((t - t_0)^K)$$

*où $P_{t_0}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0)$.*

**Définition 2**

*Soit $t_0 \in ]a, b[$ et $x$ continue sur $[a, b]$. On dit que $x$ admet un développement limité à l'ordre $m$ en $t_0$ si il existe un polynôme $P_{t_0}$ de degré au plus $m$ tel que au voisinage de $t_0$ $x(t) = P_{t_0}(t) + o((t - t_0)^m)$.*

**Conséquence :** si $x$ est de classe $C^K$ sur $[a, b]$ qui contient $t_0$ avec $a < t_0 < b$ alors $x$ admet un développement à l'ordre $K - 1$ en $t_0$.

## 4.2 Régularité ponctuelle

**Définition 3**

*Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$. Une fonction $x$ localement bornée (bornée sur tout compact) définie sur $\mathbb{R}$ appartient à $C^\alpha(t_0)$ s'il existe un voisinage $V$ de $t_0$, un polynôme $P_{t_0}$ de degré $m \leq \lfloor \alpha \rfloor$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $t \in V$*

$$|x(t) - P_{t_0}(t)| \leq C|t - t_0|^\alpha \tag{1}$$

**Proposition 4**

*Soit $x \in C^\alpha(t_0)$ pour $\alpha > 0$, $\alpha$ non entier et $t_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *$x \in C^{\alpha'}(t_0)$ pour tout $0 < \alpha' < \alpha$.*
2. *Si de plus $x$ est bornée sur tout $\mathbb{R}$ alors il existe $D > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$|x(t) - P_{t_0}(t)| \leq D|t - t_0|^\alpha \tag{2}$$

**Exemple :** pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la fonction $t \mapsto \begin{cases} |t|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|t|^\beta}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est dans $C^\alpha(0)$.

### 4.3 Régularité globale

**Définition 4**

*Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ non entier. Soit $x$ une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}$.*

*On dit que $x$ est dans $C^\alpha(\mathbb{R})$ si il existe $C > 0$ telle que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ il existe $P_{t_0}$ polynôme de degré au plus $\lfloor \alpha \rfloor$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$|x(t) - P_{t_0}(t)| \leq C|t - t_0|^\alpha$$

**Exemple :** pour $1 > \alpha > 0$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto |t|^\alpha e^{-|t|}$ est dans $C^\alpha(\mathbb{R})$.

**Remarque :** on peut adapter la définition précédente au cas où la fonction est définie sur $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Cela donne

**Définition 5**

*Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ non entier. Soit $x$ une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}$. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.*

*On dit que $x$ est dans $C^\alpha(I)$ si il existe $C > 0$ telle que pour tout $t_0 \in I$ il existe $P_{t_0}$ polynôme de degré au plus $\lfloor \alpha \rfloor$ tels que pour tout $t \in I$*

$$|x(t) - P_{t_0}(t)| \leq C|t - t_0|^\alpha$$

On peut montrer le résultat suivant.

**Proposition 5**

*Soit $I = [a, b]$ et $x$ une fonction de $C^\alpha(I)$. Alors*

1. *$x \in C^{\alpha'}(I)$ pour tout $0 < \alpha' < \alpha$.*
2. *Si de plus $x$ est bornée sur tout $\mathbb{R}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ et $D > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $t_0 \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon] = I_\varepsilon$*

$$|x(t) - P_{t_0}(t)| \leq D|t - t_0|^\alpha \tag{3}$$

## 5 Caractérisation à l'aide des coefficients en ondelettes de la régularité lipschitzienne

**Théorème 3**

*On suppose que $x$ est une fonction bornée de $L^2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.*

*On suppose que $\{\phi, \psi\}$ sont deux fonctions à support compact de classe $C^K$ qui vérifient le théorème 2 telles que $\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}, j \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (autrement dit vérifie pour tout $x$ l'égalité de Parseval).*

*On note pour $x \in \mathcal{H}$, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ $D_k = \langle x, \phi_k \rangle$ et $C_{j,k} = \langle x, \psi_{j,k} \rangle$.*

1. *Si $x \in C^\alpha(\mathbb{R})$ avec $0 < \alpha < K$, $\alpha$ non entier alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \geq 0$*
$$|C_{j,k}| \leq C 2^{-j/2 - j\alpha}$$
2. *Si $x$ est tel qu'il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ avec $\alpha$ non entier et $0 < \alpha < K$ tels que pour*

*tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \geq 0$*

$$|C_{j,k}| \leq C2^{-j/2-j\alpha},$$

*alors $x$ est dans $C^\alpha(\mathbb{R})$.*

**Théorème 4**

*On suppose que $x$ est une fonction bornée de $L^2(\mathbb{R})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.*

*On suppose que $\{\phi, \psi\}$ sont deux fonctions à support compact de classe $C^K$ qui vérifient le théorème 2 telles que $\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}, j \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (autrement dit vérifie pour tout $x$ l'égalité de Parseval).*

*On note pour $x \in \mathcal{H}$, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ $D_k = \langle x, \phi_k \rangle$ et $C_{j,k} = \langle x, \psi_{j,k} \rangle$.*

1. *Si $x \in C^\alpha(t_0)$ avec $0 < \alpha < K$, $\alpha$ non entier alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \geq 0$*

$$|C_{j,k}| \leq C2^{-j/2}\left(2^{-j\alpha} + \left|\frac{k}{2^j} - t_0\right|^\alpha\right).$$

2. *Si $x$ est tel qu'elle appartient à $C^\varepsilon(\mathbb{R})$ pour $\varepsilon > 0$ et qu'il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ avec $0 < \alpha < K$, $\alpha$ non entier, tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \geq 0$*

$$|C_{j,k}| \leq C2^{-j/2}\left(2^{-j\alpha} + \left|\frac{k}{2^j} - t_0\right|^\alpha\right),$$

*alors $x$ est dans $C^{\alpha'}(t_0)$ pour tout $\alpha' < \alpha$.*

**Théorème 5**

*On suppose que $x$ est une fonction continue bornée de $L^2(\mathbb{R})$ et $I = [a, b]$.*

*On suppose que $\{\phi, \psi\}$ sont deux fonctions à support compact de classe $C^K$ avec $K \in \mathbb{N}^*$ telles que $\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}, j \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (autrement dit vérifie pour tout $x$ l'égalité de Parseval).*

*On note pour $x \in \mathcal{H}$, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ $D_k = \langle x, \phi_k \rangle$ et $C_{j,k} = \langle x, \psi_{j,k} \rangle$.*

1. *Si $x \in C^\alpha(I)$ avec $0 < \alpha < K$, $\alpha$ non entier, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \geq 0$ tels que $\frac{k}{2^j} \in I_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$*

$$|C_{j,k}| \leq C2^{-j/2}2^{-j\alpha}.$$

2. *Si il existe $\alpha < K$, $\alpha$ non entier, et une constante $C > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \geq 0$ tels que $\frac{k}{2^j} \in I$*

$$|C_{j,k}| \leq C2^{-j/2}2^{-j\alpha}$$

*alors pour tout $\varepsilon > 0$ $x$ est dans $C^\alpha(I)$.*

# Travaux dirigés

## Démonstrations des résultats du cours.

**Exercice 1**

1. *Montrer que pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$ on a*
   (a) *Si $1 \geq \alpha > 0$ $|x + y|^\alpha \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha$.*
   (b) *Si $\alpha > 1$ $|x + y|^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(|x|^\alpha + |y|^\alpha)$.*
   **Remarque** *Dans tous les cas $|x + y|^\alpha \leq 2^\alpha(|x|^\alpha + |y|^\alpha)$.*

2. *Montrer que pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$ on a*
   (a) *Si* $\alpha > 1$ $|x|^\alpha + |y|^\alpha \leq |x+y|^\alpha$.
   (b) *Si* $1 \geq \alpha > 0$ $|x|^\alpha + |y|^\alpha \leq 2^{-\alpha+1}|x+y|^\alpha$

**Exercice 2**

*Montrer la proposition 1.*

**Exercice 3**

*Montrer la proposition 2.*

**Exercice 4**

*Déterminer les fonctions de base qui permettent de calculer* $f^2, g^2, g^1$ *avec les notations de la première partie et expliciter la formule qui permet de reconstruire* $x$ *à partir de la donnée de* $f^2, g^2, g^1$.

**Exercice 5**

*Donner des exemples de fonctions de* $L^2(\mathbb{R})$ *qui ont* $K+1$ *moments nuls pour différentes valeurs de* $K$.

**Exercice 6**

*Montrer que la base de Haar de la variable continue est un système orthonormé.*

**Exercice 7**

*Démontrer la proposition 3 à partir de la formule de Taylor-Lagrange.*

**Exercice 8**

*Pour* $m$ *donné et* $t_0 = 0$ *(par exemple* $m = 2$*) donner un exemple de fonction non* $m$ *fois dérivable en* $t_0$ *qui admet un développement limité à l'ordre* $m$ *en* $t_0$.

**Exercice 9**

*Détailler les exemples des parties 4.2 et 4.3.*

**Exercice 10**

*On considère pour* $0 < \alpha < 1$ *la fonction* $t \mapsto \begin{cases} |t|^\alpha & \text{si } t \in ]-2,2[ \\ 2^\alpha & \text{sinon} \end{cases}$

*On prend une base d'ondelettes construite à l'aide du théorème 2. Donner des estimations de ses coefficients en ondelettes et indiquer dans quel espace de fonctions du type* $C^\varepsilon(\mathbb{R})$ *se trouve cette fonction.*