Université Aix-Marseille 2018-2019
Master Traitement du signal et des images 1ère année

Mathématiques pour le signal et l'image

TD1 : Rappels d'algèbre linéaire.

Exercice 1

1. *Montrer que $\mathbb{C}^N$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*
2. *Soit V l'ensemble des tableaux A de taille $N_1 \times N_2$ dont les coefficients notés a_{n_1,n_2} pour $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ et $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

   Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Donner la base canonique de V.

Exercice 2

Soit S l'ensemble des solutions du système $x - y + z = 0$ c'est à dire $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$

1. *Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
2. *En donner plusieurs familles génératrices.*

Exercice 3

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,2,3,0)$, $v_1 = (0,1,2,3)$, $v_3 = (2,3,4,-3)$ ainsi que les familles $S_1 = \{v_1\}$, $S_2 = \{v_1, v_2\}$, $S_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$.
On considère maintenant $w_1 = (1,1,1,1)$, $w_2 = (1,-1,1,-1)$, $w_3 = (-3,-4,-5,6)$

1. *Est ce que le vecteur w_1 (respectivement w_2, w_3) est combinaison linéaire des vecteurs de S_1, S_2, ou S_3 ?*
2. *Déterminer les espaces engendrés par S_1, S_2, S_3.*
3. *Déterminer toutes les manières d'écrire les vecteurs $(0,0,0,0)$ et $(1,3,5,3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de S_3.*

Exercice 4

Trouver les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ pour que l'ensemble suivant forme un ensemble de vecteurs linéairement indépendants

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ia & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour $a = i$ exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & i-2 \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des éléments de U.

Exercice 5

On considère la famille suivante de vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $S = \{(1,2,3,1),(2,1,3,1),(1,1,2,3),(1,1,3,2),(3,2,5,4)\}$

1. *Cette famille est-elle libre ?*
2. *Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $Vect(S)$ engendré par les vecteurs de S ?*
3. *Donner deux bases différentes de $Vect(S)$.*

Exercice 6

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $v_0 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$, $v_1 = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$, $v_2 = (0,0,1)$.

1. *Montrer que $S = \{v_0, v_1, v_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Écrire la décomposition d'un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ dans la base S.*