french

Université Aix-Marseille — 2018-2019

Master Traitement du signal et des images — 1ère année

Mathématiques pour le signal et l'image

TD2 : Base de Fourier discrète.

Exercice 1 (*Exercice préliminaire*)

1. *Soit $k_0 \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}^\star$. Donner la valeur de $\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{nk_0}{N}}$ selon les valeurs de k_0.*
2. *Soient α et β deux nombres réels. Mettre $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ sous la forme ue^{iv} où u et v sont des nombres réels.*

Exercice 2

Définition 1

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite $u = (u[0], u[1], .., u[N-1])$ de $\mathbb{C}^N$ la suite $\hat{u} \in \mathbb{C}^N$ telle que

$$\hat{u}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} u[n] e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}, k = 0, ..., N-1$$

Soit $k \in \{0, .., N-1\}$ on pose e^k le vecteur de $\mathbb{C}^N$ de coordonnées $(1, e^{2i\pi \frac{k}{N}}, e^{2i\pi \frac{2k}{N}}, ..e^{2i\pi \frac{(N-1)k}{N}})$.

1. *Montrer que $\hat{u}$ peut être prolongée en une suite périodique de période N, c'est à dire telle que $\hat{u}[k+N] = \hat{u}[k]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*
2. *Calculer les transformées de Fourier discrètes des signaux suivants*
   (a) *$\delta^{k_0} = (\delta^{k_0}[n])_{n=0,..,N-1}$, pour k_0 dans $\{0, .., N-1\}$ fixé, et $\delta^{k_0}[n] = 0$ si $n \neq k_0$ et $\delta^{k_0}[n] = 1$ si $n = k_0$*
   (b) *$y = \left(\cos(2\pi\omega_0 \frac{n}{N})\right)_{n=0,..,N-1}$ pour $\omega_0 = k_0$ fixé dans $\{0, .., N-1\}$*
3. *Montrer que pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^N$ le système de vecteurs e^k est orthogonal. Calculer la norme des e^k.*
4. *Soit $u \in \mathbb{C}^N$ calculer $\hat{u}$ à l'aide des e^k.*
5. *Calculer u à l'aide de $\langle u, \frac{e^k}{\sqrt{N}} \rangle$ et des vecteurs $\frac{e^k}{\sqrt{N}}$. En déduire u en fonction des e^k et de $\hat{u}$.*
6. *Montrer qu'on a pour tout $n = 0, \dots, N-1$*

$$u[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}[k] e^{2i\pi \frac{kn}{N}}.$$

7. *Montrer également qu'on a la relation du type Pythagore suivante :*

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{u}[k]|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |u[n]|^2$$

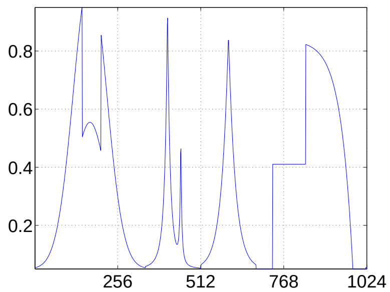
8. *Montrer que si $u = (u[0], u[1], .., u[N-1])$ est une suite finie à valeurs réelles, alors $\hat{u}$ vérifie la propriété dite de "symétrie hermitienne", c'est à dire :*

$$\overline{\hat{u}[k]} = \hat{u}[N-k]$$

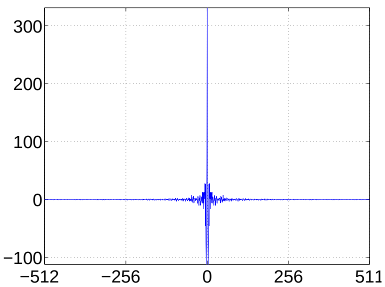
et que son prolongement périodique vérifie donc $\overline{\hat{u}[k]} = \hat{u}[-k]$.

Exercice 3 (***Quizz des signaux***)

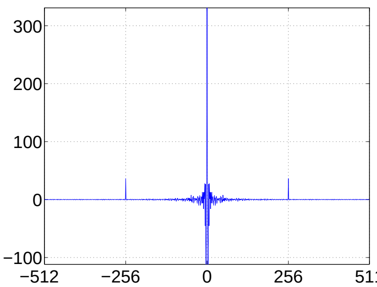
On considère six signaux s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 : trois d'entre eux sont les parties réelles des transformées de fourier discrètes des trois autres, qui sont quant à eux des signaux réels. Indiquer qui est la transformée de Fourier discrète de qui.



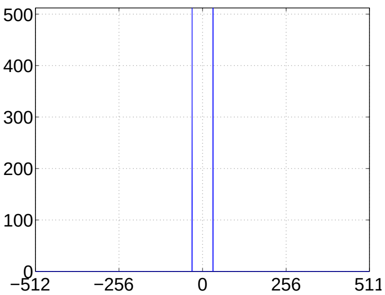
s_0



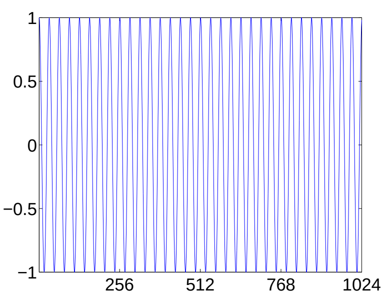
s_1



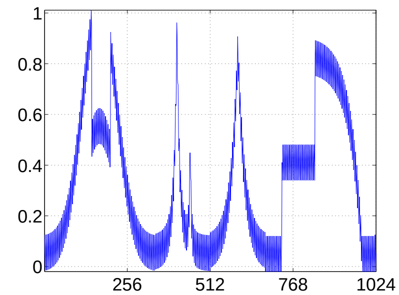
s_2



s_3



s_4



s_5

On cherche à restaurer s_0 à l'aide d'un filtrage. Que proposez-vous ?