Université Aix-Marseille	2018-2019
Master Mathématiques appliquées et statistiques	2ème année

Représentation parcimonieuse des signaux

Test

mardi 27 novembre 2018

durée 1 heure

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.
Il est conseillé de lire en entier l'énoncé avant de commencer.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

A lire attentivement : le sujet est composé de deux exercices dont un au choix parmi deux. Le premier exercice est obligatoire mais vous choisissez entre l'exercice 2 et l'exercice 3 (ou alors si il vous reste du temps personne bien sûr ne vous empêche de faire les deux !).

Notations

On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^M$ tel que $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{M-1} x_n \overline{y_n}$ pour $x = (x_i)_{i=0,\dots M-1} \in \mathbb{C}^M$ et $y = (y_i)_{i=0,\dots M-1} \in \mathbb{C}^M$. On note $|x|_2^2 = \sum_{n=0}^{M-1} |x_n|^2$ pour $x \in \mathbb{C}^M$.

Attention la norme euclidienne sera notée $|.|_2$ quel que soit l'espace du type $\mathbb{C}^M$ dans lequel on travaille.

1 Exercice obligatoire

Exercice 1

1. *Soit K et N deux entiers supérieurs ou égaux à deux. On note $\mathcal{E}_{KN} = \{e^\ell \in \mathbb{C}^{KN}, 0 \leq \ell \leq KN-1\}$ la famille de vecteurs tels que pour $0 \leq \ell \leq KN-1$ et pour $n \in \{0, \dots KN-1\}$ la n-ième coordonnée du vecteur e^ℓ s'écrive*

$$e^\ell_n = e^{\frac{2i\pi\ell n}{KN}}$$

   Montrer que $\mathcal{E}_{KN}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}^{KN}$.

2. *Montrer que pour tout $y \in \mathbb{C}^{KN}$ on a*

$$|y|_2^2 = \frac{1}{KN} \sum_{\ell=0}^{KN-1} |\langle y, e^\ell\rangle|^2$$

3. *On considère maintenant dans* $\mathbb{C}^N$ *la famille de vecteurs* $\Phi = \{\phi^k \in \mathbb{C}^N, 0 \leq k \leq KN-1\}$ *tels que pour tout* $0 \leq n \leq N-1$

$$\phi_n^k = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2i\pi kn}{KN}}.$$

En d'autres termes ϕ^k *est proportionnel à un vecteur obtenu à partir de* e^k *en ne gardant que ses* N *premières coordonnées.*

Calculer la norme de ϕ^k*. Est ce que* Φ *forme une base de* $\mathbb{C}^N$ *? Est-ce que* Φ *forme un dictionnaire de* $\mathbb{C}^N$ *?*

4. *Soit* $x \in \mathbb{C}^N$*. Montrer que*

$$|x|_2^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{KN-1} |\langle x, \phi^k \rangle|^2 \tag{1}$$

2 Un exercice à prendre au choix parmi les deux

Exercice 2 (*Suite de l'exercice 1, au choix avec l'exercice 3.*)

On pourra bien sûr utiliser les résultats obtenus dans l'exercice 1.

1. *On note* D *la matrice à* N *lignes et* KN *colonnes dont les colonnes sont composées des vecteurs* ϕ^k, $0 \leq k \leq KN-1$ *dans la base canonique de* $\mathbb{C}^N$*.*

   On note D^* *la matrice à* KN *lignes et* N *colonnes dont les lignes sont les vecteurs* $\overline{\phi^k} = (\overline{\phi_n^k})_{0 \leq n \leq N-1}$*.*

   Calculer $\langle DD^*x, x\rangle$ *en fonction de* $\sum_{k=0}^{KN-1} |\langle x, \phi^k\rangle|^2$*.*

2. *Montrer que* DD^* *est inversible.*
3. *Soit* $R = (DD^*)^{-1}$ *et* $\widetilde{\phi^k} = R\phi^k$ *pour tout* $0 \leq k \leq KN-1$*. Montrer que tout* $x \in \mathbb{C}^N$ *peut s'écrire*

$$x = \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k \rangle \widetilde{\phi^k}$$

Un dictionnaire D *qui vérifie une propriété du type (1) est appelé repère ou encore trame. En anglais on dit « frame ».*

Exercice 3 (*Au choix avec l'exercice 2*)

Soit $\mathcal{B} = \{g^k, k = 0, \ldots, N-1\}$ *une base orthonormée de* $\mathbb{C}^N$ *et* $x \in \mathbb{C}^N$*.*

On ordonne les coefficients $(\langle x, g^k\rangle)_{k=0,\ldots N-1}$ *par ordre décroissant, c'est à dire qu'on reindexe les coefficients en* $\{k_0, \ldots, k_{N-1}\} = \{0, \ldots, N-1\}$ *tels que pour* *tout* $m = 0, \ldots, N-2$

$$|\langle x, g^{k_{m+1}} \rangle| \leq |\langle x, g^{k_m} \rangle|$$

1. *On suppose qu'il existe* $C > 0$ *et* $\alpha > \frac{1}{2}$ *telle que pour tout* $m \neq 0$

$$|\langle x, g^{k_m} \rangle| \leq \frac{C}{m^\alpha}$$

   On considère maintenant l'approximation de x *comprenant les* M *plus gros coefficients non nuls*

$$x_M = \sum_{m=0}^{M-1} \langle x, g^{k_m} \rangle g^{k_m}$$

   Donner une majoration en fonction de α*, de* M *et d'une constante* A *de* $|x - x_M|_2$*.*

   Remarque : On pourra utiliser sans démonstration le résultat du Td qui donne une majoration de $\sum_{k>K} \frac{1}{k^\alpha}$ *en fonction de* K *et* α*.*

2. *On considère l'agorithme du Matching-Pursuit le dictionnaire* $\mathcal{D} = \mathcal{B}$*. On rappelle que l'algorithme fonctionne de la façon suivante. Soit* $x \in \mathbb{C}^N$*.*
   (a) *Initialisation :* $m := 0$, $R^0(x) = x$*.*
   (b) *Par récurrence sur* $m \in \mathbb{N}$
      i. *Choix du meilleur vecteur* $k_m = \arg\max_k |\langle R^m(x), g^k \rangle|$
      ii. *Mise à jour du « résidu »* $R^{m+1}(x) = R^m(x) - \langle R^m(x), g^{k_m} \rangle g^{k_m}$

   Montrer que l'algorithme de Matching-Pursuit converge en N *itérations exactement et indiquer quel est à chaque étape* m *le vecteur du dictionnaire choisi ainsi que la valeur du résidu.*