

FORME LISSÉE DE RAPPORTS DE NORMES ℓ_p/ℓ_q (SPOQ) POUR LA RECONSTRUCTION DES SIGNAUX AVEC PÉNALISATION PARCIMONIEUSE

Afef Cherni¹, Emilie Chouzenoux², Laurent Duval³, and Jean-Christophe Pesquet²

¹ Aix-Marseille Univ., CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France.

² CVN, CentraleSupélec, INRIA Saclay and Univ. Paris Saclay.

³ IFP Energies nouvelles, 1 et 4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison.

Problématique

• **Modèle d'observation:** estimer un signal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ à partir des mesures $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ liées à \mathbf{x} selon le modèle suivant:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1)$$

• **Approche variationnelle:**

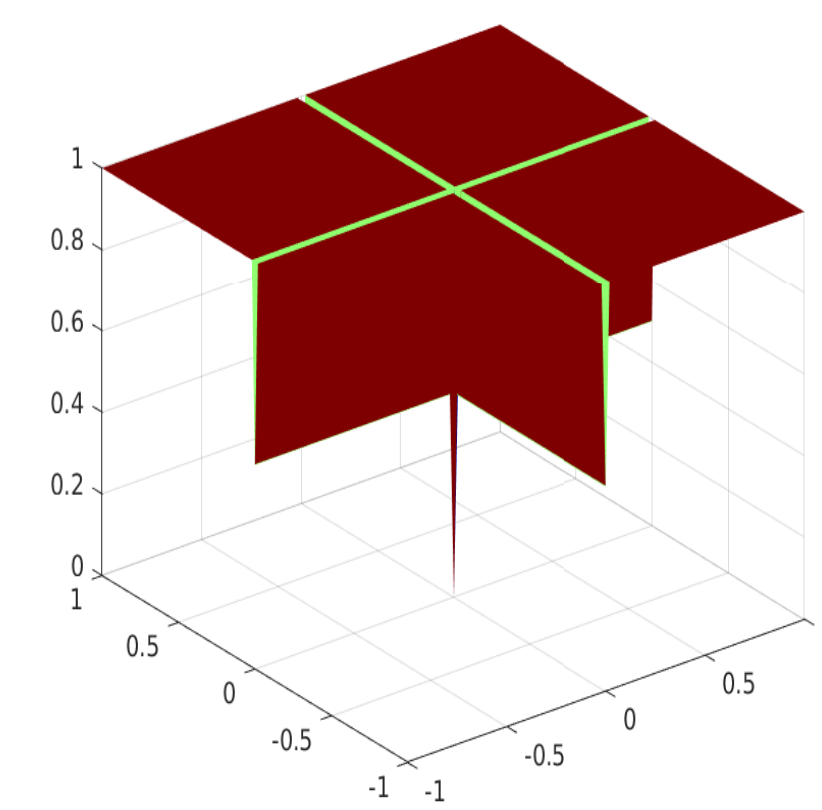
minimiser $\Psi(\mathbf{x})$ tel que $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \xi\}$. (2)

▷ $\Psi: \mathbb{R}^N \rightarrow]-\infty, +\infty]$: fonction de régularisation qui renforce la parcimonie de la solution.

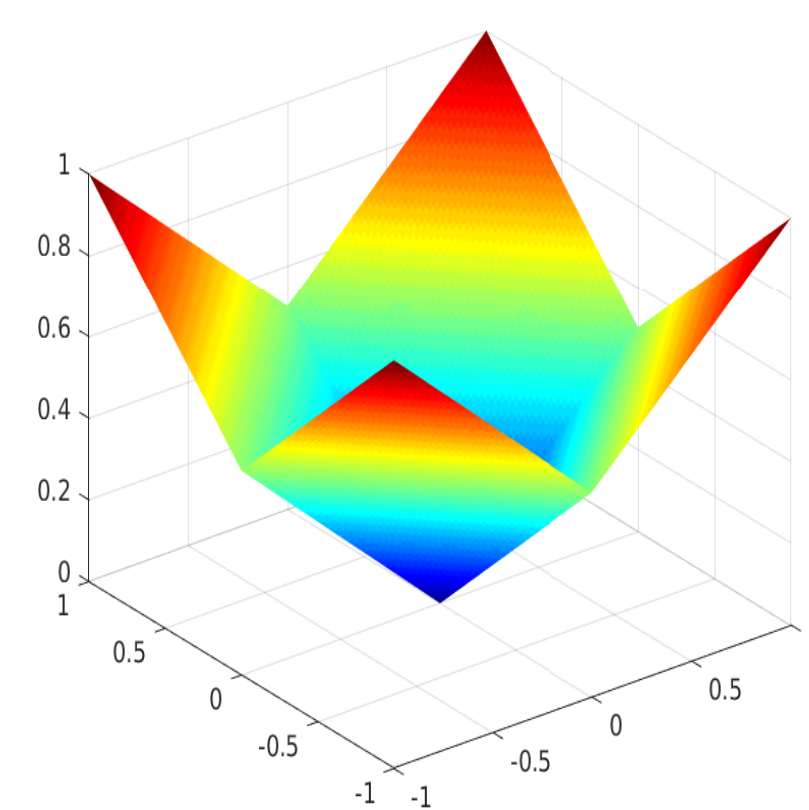
▷ $\xi > 0$: paramètre qui dépend du niveau de bruit.

✗ **Difficultés:** choix de Ψ ?

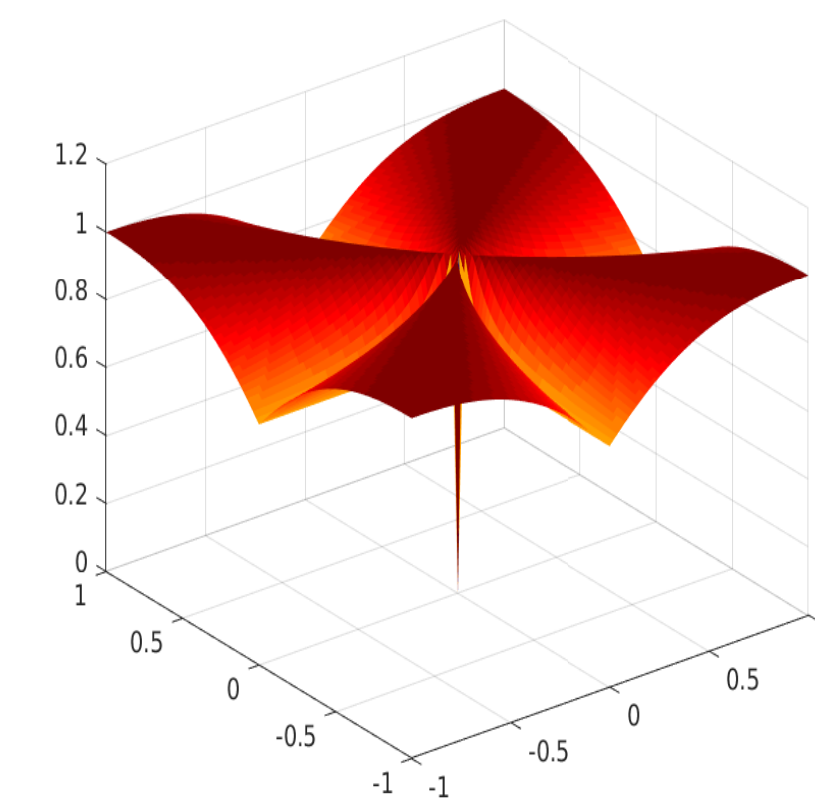
Motivation



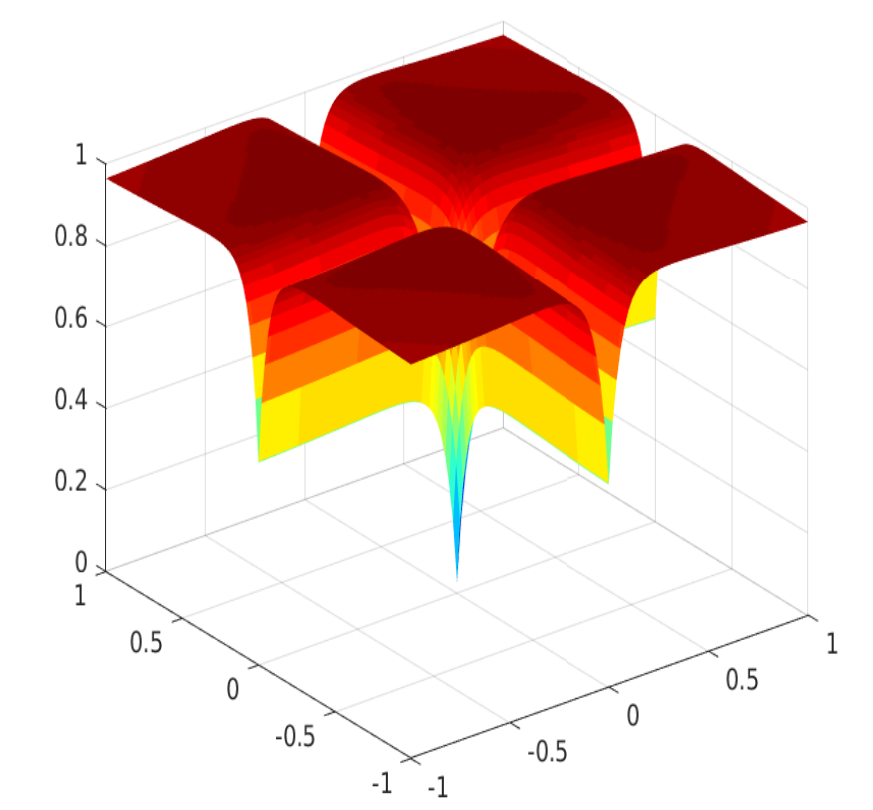
Indice de parcimonie l_0



Norme l_1



SOOT l_1/l_2 [5]



SPOQ $l_{1/2}/l_3$ Ce travail et [3]

Approche proposée

Forme lissée de rapports de normes ℓ_p/ℓ_q (SPOQ)

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N) \quad \Psi(\mathbf{x}) = \log \left(\frac{(\ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) + \beta^p)^{1/p}}{\ell_{q,\eta}(\mathbf{x})} \right), \quad (3)$$

où $p \in]0, 2[$, $q \in [2, +\infty[$ et:

$$\begin{cases} \ell_{p,\alpha}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{n=1}^N \left((x_n^2 + \alpha^2)^{p/2} - \alpha^p \right) \right)^{1/p} \\ \ell_{q,\eta}(\mathbf{x}) = \left(\eta^q + \sum_{n=1}^N |x_n|^q \right)^{1/q} \end{cases}$$

pour tout $(\alpha, \beta, \eta) \in]0, +\infty[^3$.

✓ $\ell_{p,\alpha}$ et $\ell_{q,\eta}$ sont les formes lissées des (quasi)-normes ℓ_p et ℓ_q .

✓ Ψ (3) est une version généralisée de la forme lissée l_1/l_2 proposée dans [5].

Propriétés

✗ Problème (2) non-convexe.

✓ Ψ présente deux propriétés:

- Lipschitz différentiable dans \mathbb{R}^N
- Majorée localement par une fonction quadratique.

Par construction, pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathcal{B}_{q,\rho}^2$

$$\Psi(\mathbf{x}) \leq \Psi(\mathbf{x}') + \nabla \Psi(\mathbf{x}')^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^\top \mathbf{A}_{q,\rho} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

où

$$\mathcal{B}_{q,\rho} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{n=1}^N |x_n|^q \geq \rho^q \right\}$$

et

$$\mathbf{A}_{q,\rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) + \beta^p} \text{Diag} \left((x_n^2 + \alpha^2)^{p/2-1} \right)_{1 \leq n \leq N} + \frac{q-1}{(\eta^q + \rho^q)^{2/q}} \mathbf{I}_N.$$

Optimisation

• Algorithme Forward-Backward à métrique variable [4, 1]

• Métrique variable définie avec la stratégie MM.

✚ **Nouvel algorithme FB à métrique variable localement ajustée**

$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, $B \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in]0, 1[$, $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \in]0, 2[$

For $k = 0, 1, \dots$:

For $i = 1, \dots, B$:

If $i = 1$, $\rho_{k,1} = \sum_{n=1}^N |x_{n,k}|^q$.

If $i \in \{2, \dots, B-1\}$, $\rho_{k,i} = \theta \rho_{k,i-1}$.

Else $\rho_{k,B} = 0$.

Construct $\mathbf{A}_{k,i} = \mathbf{A}_{q,\rho_{k,i}}(\mathbf{x}_k)$

$\mathbf{z}_{k,i} = \mathbf{P}_{\mathbf{A}_{k,i}, S}(\mathbf{x}_k - \gamma_k (\mathbf{A}_{k,i})^{-1} \nabla \Psi(\mathbf{x}_k))$

If $\mathbf{z}_{k,i} \in \mathcal{B}_{q,\rho_{k,i}}$: Stop loop

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{z}_{k,i}$

Application

Spectrométrie de masse (SM)

Analyse physio-chimique:

• Une technique fondamentale en SM pour l'analyse des compositions chimiques.

• Utilisée en biologie structurale, la chimie biologique, la pharmaceutique, etc.

État de l'art:

• Le problème (2) en SM est résolu dans [2] avec une approche par dictionnaire.

• L'approche par dictionnaire proposée dans [2] résout le problème (2) avec la norme de régularisation l_1 .

✗ problème d'échelle.

✚ Résoudre le problème (2) en utilisant la nouvelle fonction de régularisation ℓ_p/ℓ_q (pour différentes valeurs de p et q) et pour plusieurs autres choix de Ψ (norme l_1 , pénalités de Cauchy et de Welsh).

Critères d'évaluation

• RSB = $20 \log_{10}(\|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|)$.

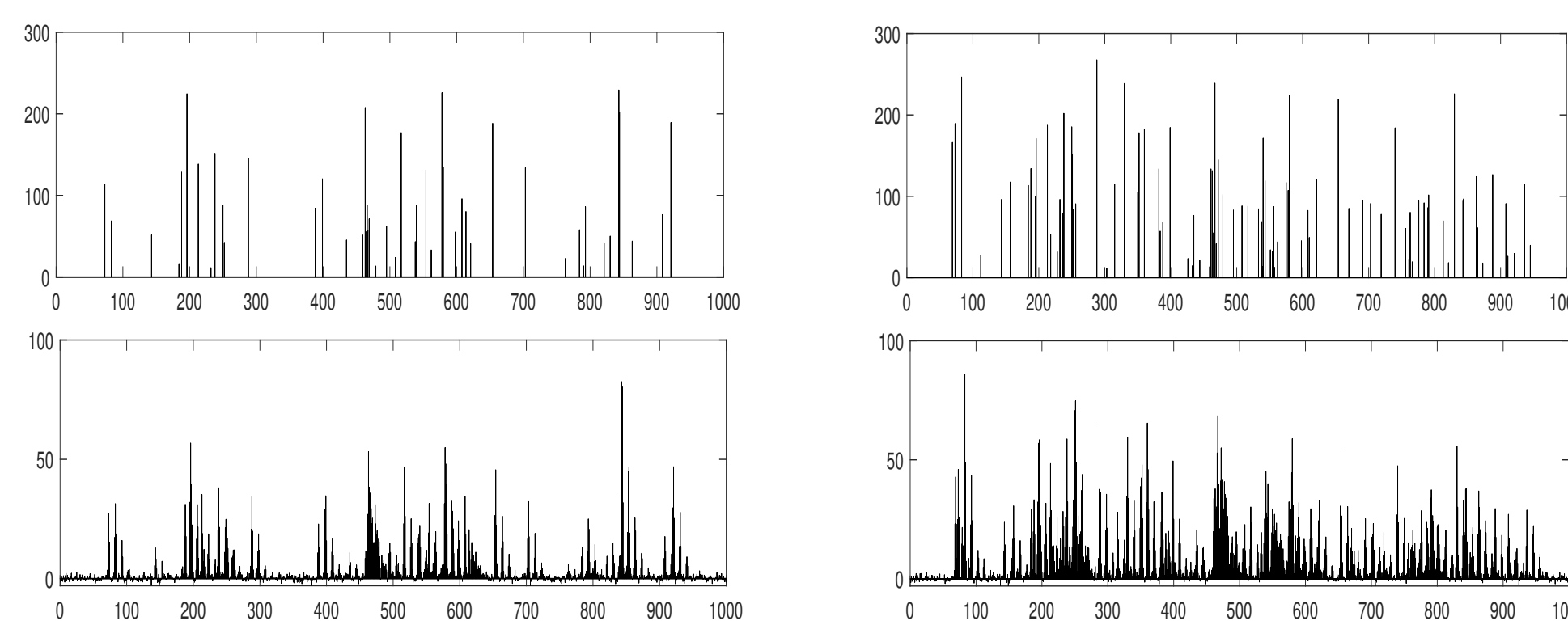
• RSBS : RSB calculé seulement sur le support de parcimonie du signal cible.

• \hat{P} : degré de parcimonie estimé.

Jeux de données

• Signal A: $N = 1000$, $P = 48$ (degré de parcimonie)

• Signal B: $N = 1000$, $P = 94$ (degré de parcimonie)



Signaux originaux et mesures associés aux jeux de données A (à droite $N = 2000$, $P = 49$) et B (à gauche $N = 2000$, $P = 97$). En haut: signal synthétique, en bas: spectre de masse mesuré avec un bruit gaussien d'écart-type $\sigma = 10^{-2}$.

• Le spectre de masse mesuré \mathbf{y} est généré avec \mathbf{H} construite par l'approche par dictionnaire [2].

• Un bruit gaussien d'écart-type 10^{-2} est considéré.

Résultats

		P	$\ell_{0.25}/\ell_2$	$\ell_{0.5}/\ell_2$	l_1/l_2	l_1	Cauchy	Welsh
Signal A	RSB	48	46.28 0.497	41.91 0.436	40.91 0.910	43.16 0.654	42.84 0.572	27.54 0.461
	RSBS	48	46.55 0.571	47.71 1.136	46.24 1.660	43.94 0.679	43.53 0.532	29.12 0.501
	\hat{P}	48	49 1.32	129 11.85	365 10.13	80 9.46	883 10.57	259 8.08
Signal B	RSB	94	45.56 0.538	42.74 1.266	41.31 1.298	43.02 1.260	42.71 1.194	30.99 0.488
	RSBS	94	47.26 0.639	46.88 1.495	45.11 1.654	44.17 1.138	43.68 0.961	33.39 0.507
	\hat{P}	94	111 3.54	216 12.43	410 11.03	165 17.41	952 6.66	342 11.72

Moyenne et écart-type des RSB, RSBS et degré de parcimonie, calculés pour 10 réalisations du bruit avec différentes fonctions de régularisation.

Conclusion & perspectives

✓ La fonction ℓ_p/ℓ_q assure une bonne estimation des deux signaux A et B.

✓ Pour des choix particuliers de (p, q) , la fonction ℓ_p/ℓ_q représente la meilleure fonction de régularisation en comparaison avec les autres fonctions proposées.

✚ Identifier les rapports de (quasi)-normes les plus favorables.

Références

- [1] F. Abboud, E. Chouzenoux, J.-C. Pesquet, J.-H. Chenot, and L. Laborelli. Dual block-coordinate forward-backward algorithm with application to deconvolution and dinterlacing of video sequences. *J. Math. Imaging Vision*, 59(3):415–431, 2017.
- [2] A. Cherni, E. Chouzenoux, and M.-A. Delsuc. Fast dictionary-based approach for mass spectrometry data analysis. *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.*, pages 1–5, 2018.
- [3] A. Cherni, E. Chouzenoux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. SPOQ: a smoothed scale-invariant ℓ_p -over- ℓ_q norm ratio penalty regularization for sparse signal recovery. *PREPRINT*, 2019.
- [4] E. Chouzenoux, J.-C. Pesquet, and A. Repetti. Variable metric forward-backward algorithm for minimizing the sum of a differentiable function and a convex function. *J. Optim. Theory Appl.*, 162(1):107–132, 2014.
- [5] A. Repetti, M. Q. Pham, L. Duval, E. Chouzenoux, and J.-C. Pesquet. Euclid in a taxicab: Sparse blind deconvolution with smoothed ℓ_1/ℓ_2 regularization. *IEEE Signal Process. Lett.*, 22(5):539–543, May 2015.