Correction sujet A

A 1

Exercice 1:

1. On calcule $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{x} ke^{-3x}\,dy\right]dx$

$$= \int_0^{+\infty} x k e^{-3x}\,dx$$

$$= k\left[\left[\frac{xe^{-3x}}{-3}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-3x}}{-3}\,dx\right]$$

$$= k \times \left(\frac{0-0}{-3} + \frac{1}{3}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{+\infty}\right)$$

$$= k \times \left(0 + \frac{1}{9}\times 1\right) = \frac{k}{9}$$

Pour que f soit une densité de probabilité il faut donc que $\boxed{k=9}$

2. Pour calculer la loi marginale de X on écrit $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

- si $x>0$ $\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{x} ke^{-3x}\,dx =$

$$f_X(x) = kxe^{-3x} = 9xe^{-3x}$$

- si $x \le 0$ $\quad f(x,y)=0$ donc $f_X(x)=0$

d'où $\quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ 9xe^{-3x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

· Pour calculer la loi marginale de Y on écrit $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ A (2)

· si $y > 0$ $\quad f_Y(y) = \int_y^{+\infty} k e^{-3x}\,dx$

$$= k\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_y^{+\infty} = \frac{k}{-3} \times \left[0 - e^{-3y}\right]$$

$$= \frac{9}{3} e^{-3y} = 3e^{-3y}$$

· si $y \leq 0$ $\quad f(x,y) = 0$ d'où $f_Y(y) = 0$

donc $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 3e^{-3y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$

3. on cherche à voir si $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ pour savoir si X et Y sont indépendants.

or $f(x,y) = 0$ si $y > x$

par exemple pour $y = 2$ et $x = 1$

alors que $f_X(1) = 9e^{-3} \neq 0$

et $f_Y(2) = 3e^{-6} \neq 0$

donc on ne peut avoir l'égalité et X et Y ne sont pas indépendants !

4. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

on a $\quad \mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{x} xy\,k e^{-3x}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} kx e^{-3x}\left[\int_0^x y\,dy\right] dx = \int_0^{+\infty} kx e^{-3x}\left[\frac{x^2}{2}\right] dx$$

A ③

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{k}{2}\left[\int_0^{+\infty} x^3 e^{-3x}\,dx\right]$$

calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-3x}\,dx = \left[\frac{x^3e^{-3x}}{-3}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{3x^2}{-3}e^{-3x}\,dx$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} x^2 e^{-3x}\,dx \qquad (*)$$

$$= \left[\frac{x^2e^{-3x}}{-3}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{2xe^{-3x}}{-3}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} xe^{-3x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\times\left(\left[\frac{xe^{-3x}}{-3}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-3x}}{-3}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{27}$$

d'où $\mathbb{E}(XY) = \frac{9}{2}\times\frac{2}{27} = \frac{1}{3}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 9x^2e^{-3x}\,dx$$

$$= 9\int_0^{+\infty} x^2e^{-3x}\,dx = 9\times\frac{2}{27} \quad \text{par } (*)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} 3ye^{-3y}\,dy$$

$$= 3\int_0^{+\infty} ye^{-3y}\,dy = 3\left(\left[\frac{ye^{-3y}}{-3}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-3y}}{-3}\,dy\right)$$

$$= 3\times\frac{1}{3}\times\left[\frac{e^{-3y}}{-3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$$

d'où $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

A (4)

5\. On pose $D = \{(x,y) \mid y \geq x\}$

on a $\mathbb{P}(Y \geq X) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

$= 0$ car $f(x,y) = 0$ si $y \geq x$

6\. $Z = \frac{Y}{X}$

on cherche la loi de Z, donc on cherche la fonction de répartition de Z.

on va donc calculer $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} \leq t\right)$

rappelons que si $y < 0$ alors $f(x,y) = 0$

d'où $\mathbb{P}(Y \leq 0) = \iint_{y<0} f(x,y)\,dx\,dy = 0$

de même $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$

ainsi $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ et $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1$

d'où $\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} \leq t\right) = \mathbb{P}(Y \leq tX) = F_Z(t)$

<u>cas où $t < 0$</u> on a donc $F_Z(t) = \mathbb{P}(Y \leq tX)$ avec $tX \leq 0$

si $Y \leq tX$ avec $t < 0$ alors $Y \leq 0$

donc $\mathbb{P}(Y \leq tX) \leq \mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$

d'où $\mathbb{P}(Y \leq tX) = 0$

<u>cas où $t > 1$</u> si $Y \leq X$ alors $Y \leq X \leq tX$ pour $t > 1$

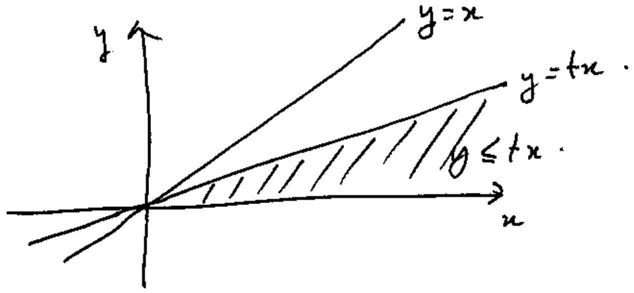
d'où $\mathbb{P}(Y \leq X) \leq \mathbb{P}(Y \leq tX)$

or $\mathbb{P}(Y \leq X) = 1$ d'où $\mathbb{P}(Y \leq tX) = 1$

Cas où $0 < t \leq 1$

On calcule $F_Z(t) = \mathbb{P}(Y \leq tX)$

On note $D_t = \{(x,y) \mid y \leq tx\}$



On donc $\mathbb{P}(Y \leq tX) = \iint_{D_t} f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{tx} k e^{-3x}\,dy\,dx$$

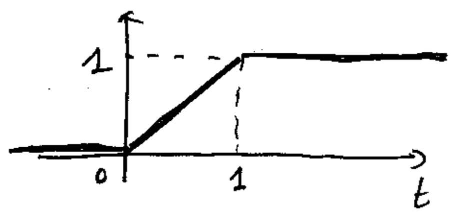
$$= k \int_0^{+\infty} e^{-3x}\, tx\, dx \ldots$$

$$= kt \int_0^{+\infty} x e^{-3x}\,dx .$$

On a vu que $\int_0^{+\infty} x e^{-3x}\,dx = \frac{1}{9}$

d'où $\mathbb{P}(Y \leq tX) = t$

d'où $F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$



Exercice 2: A

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $U = X_1 - 2X_2 + X_3 \quad V = X_1 + 2X_2 + X_3$.

on a $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

on pose $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est 1 transformation linéaire du vecteur gaussien

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ de loi $\mathcal{N}(\mu, \Gamma)$ avec $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

donc la loi de $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est celle d'1 vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu', \Gamma')$

avec $\mu' = A'\mu$

$\Gamma' = A'\Gamma {}^tA'$

d'où $\mu' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times(-2) + 3\times 1 \\ 1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

2. on veut $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ indépendants et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ transformation linéaire

du vecteur gaussien $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

donc Y sera un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu_Y, \Gamma_Y)$ avec

$$\mu_Y = A\mu$$

$$\Gamma_Y = A\Gamma {}^tA$$

on cherche donc vu que Γ_Y est la matrice de corrélation de Y,

à avoir Γ_Y diagonale.

Si Γ_Y est diagonale cela signifie que les variables Y_1, Y_2, Y_3 qui composent Y sont décorrélées, et comme Y est un vecteur gaussien, cela signifie en fait qu'elles sont indépendantes.

donc on cherche A pour avoir Γ_Y diagonale.

Cherchons donc à diagonaliser Γ dans une base orthonormée.

Cherchons les valeurs propres de Γ

Calculons le polynôme caractéristique de Γ :

$$P(X) = \det(\Gamma - X\,Id) = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$P(X) = 1\times(2-X) * \begin{vmatrix} 4-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X) \times \left[(4-X)(1-X) - 1 \right]$$

$$= (2-X) \times \left(4 - X - 4X + X^2 - 1 \right)$$

$$P(X) = (2-X)\left[3 - 5X + X^2 \right]$$

Calculons les racines de $3-5X+X^2$

$$\Delta = 25 - 12 = 13$$

d'où $X_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ $X_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$

On a donc trois racines de $P(X)$ $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ $\lambda_3 = 2$

On détermine ensuite les espaces propres associés à chacune des valeurs propres

• Pour $\lambda_3 = 2$ cherchons $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

remarquons que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donne $\Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc l'espace propre associé à λ_3 est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Pour $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ $\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

cela nous donne le système

A 5

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x+y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} x \\ x+y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} y \\ 2z = \frac{5-\sqrt{13}}{2} z \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2} - 4\right) x \\ x = \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2} - 1\right) y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} y & (1) \\ y = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} x & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}$$

Vérifions que (1) et (2) sont la même équation : en effet

on peut écrire (2) $x = \frac{2}{-3-\sqrt{13}} y$

a-t-on $\frac{2}{-3-\sqrt{13}} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$?

c'est à dire $4 = (3-\sqrt{13})(-3-\sqrt{13})$?

oui car $(3-\sqrt{13})(-3-\sqrt{13}) = -9+13 = 4$!

d'où le système se résume à

$$\begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} y \\ z = 0 \end{cases}$$

on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{13}}{2} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'espace associé à λ_2 est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2$ A 10

pour avoir 1 base orthonormée de cet espace il suffit de le normer.

on a $\|u_2\|^2 = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 + 1$

$$= \frac{9+13-6\sqrt{13}}{2} + 1$$

$$= \frac{24-6\sqrt{13}}{2} = 12-3\sqrt{13} \simeq 1{,}18.$$

on a donc $\|u_2\| = \sqrt{12-3\sqrt{13}}$

d'où $\frac{u_2}{\|u_2\|}$ est vecteur normé d'une base orthonormée de cet espace propre.

• pour $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ $\quad \Gamma\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

cela nous donne le système

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

on procède de la même façon en remplaçant $-\sqrt{13}$ par $+\sqrt{13}$

ce qui donne $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre associé à λ_1 (on peut le vérifier par le calcul).

et $\|u_1\| = \sqrt{12+3\sqrt{13}}$ d'où $\frac{u_1}{\|u_1\|}$ est 1 base orthonormée de cet espace propre.

En posant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12-3\sqrt{13}}} & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12+3\sqrt{13}}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12-3\sqrt{13}}} & \frac{1}{\sqrt{12+3\sqrt{13}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a une matrice de base orthonormée de vecteurs propres

avec $P \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{13}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP = \Gamma$

d'où $\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{13}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = {}^tP\,\Gamma\,P$

en posant $A = {}^tP$ on a donc ce qu'on veut &

les variables Y_1, Y_2, Y_3 avec $Y = A\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ sont

décorrélées.

3. La loi de Y est donc $\mathcal{N}^3(\mu_Y, \Gamma_Y)$ avec

$$\Gamma_Y = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{13}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\mu_Y = A\mu$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12-3\sqrt{13}}} & \frac{1}{\sqrt{12-3\sqrt{13}}} & 0 \\ \frac{3-\sqrt{13}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12+3\sqrt{13}}} & \frac{1}{\sqrt{12+3\sqrt{13}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12-3\sqrt{13}}} \\ \frac{3-\sqrt{13}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12+3\sqrt{13}}} \\ 3 \end{pmatrix}$$

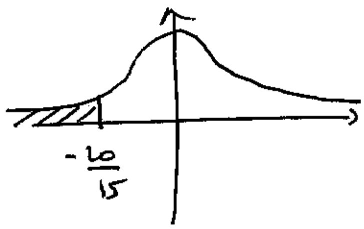
Exercice 3: on note X le QI d'1 personne. $X \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$ A 13

1. $\mathbb{P}(X \leq 80) = \mathbb{P}\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{80-\mu}{\sigma}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X-100}{15} \leq \frac{80-100}{15}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{-20}{15}\right) \quad \text{avec} \quad Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

or



$-\frac{20}{15} \simeq -1{,}33.$

$$\mathbb{P}\left(Y \leq -\frac{20}{15}\right) = \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{20}{15}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{20}{15}\right)$$

$$\simeq 1 - 0{,}9082$$

$$\sim 0{,}0918$$

2. $\mathbb{P}(105 \leq X \leq 110)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{105-100}{\sigma} \leq \frac{X-100}{\sigma} \leq \frac{110-100}{\sigma}\right)$$

on pose $Y = \dfrac{X-100}{\sigma}$ $\quad Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

d'où $\mathbb{P}(105 \leq X \leq 110) = \mathbb{P}\left(\dfrac{-5}{15} \leq Y \leq \dfrac{10}{15}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{10}{15}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{2}{3}\right) - \mathbb{P}\left(Y \leq -\frac{1}{3}\right)$$

or $\mathbb{P}\left(Y \leq -\frac{1}{3}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{1}{3}\right)$

d'où $\mathbb{P}(105 \leq X \leq 110) = \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{2}{3}\right) - 1 + \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{1}{3}\right)$

$$\simeq 0{,}7454 - 1 + 0{,}6293 \simeq 0{,}3747$$

3. $\mathbb{P}(X \geqslant t) \simeq 0{,}05$

A 14

d'où $\mathbb{P}\left(\frac{X-100}{6} \geqslant \frac{t-100}{6}\right) \simeq 0{,}05$

ce qui donne en posant $Y = \frac{X-100}{6}$

$$1 - \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{t-100}{6}\right) \simeq 0{,}05$$

d'où $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-100}{6}\right) \simeq 0{,}95$

ce qui donne $\frac{t-100}{6} = \frac{t-100}{15} \simeq 1{,}64$

d'où $t \simeq 15 \times 1{,}64 + 100$

$$\boxed{t \simeq 124{,}6}$$

Le score minimum est de 124,6.