Correction de l'exercice 3 du devoir à la maison

Exercice 1.

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ l'intégrale de Riemann impropre

$$u_n = \int_0^1 \frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

est absolument convergente, puis étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n, n \geq 1)$.

Correction:

On commence d'abord par étudier la convergence de cette intégrale. On a un problème de convergence en 0 et un autre en 1. On coupe donc l'intégrale en deux.

— *Examinons la convergence de* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Le problème de convergence est en 0. D'autre part la fonction $x \mapsto \frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}}$ *est bien localement intégrable sur* $]0, \frac{1}{2}[$ *et est de signe constant sur cet intervalle (négatif si n est impair et positif sinon).*

Donc nous pouvons utiliser les critères de convergence des intégrales généralisées de fonctions de signe constant.

En particulier pour $x \to 0$ on a

$$\frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}} \sim (\ln(x))^n \tag{1}$$

Montrons que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^n dx$ *converge pour tout* $n \geq 1$.
Effectuons une démonstration par récurrence.

Soit (P_n) la propriété au rang n : « $\int_0^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^k dx$ *converge pour tout* $1 \leq k \leq n$. *»*

Au rang $n = 1$ la propriété est vraie. En effet on a pour $X > 0$

$$\begin{aligned} \int_X^{\frac{1}{2}} \ln(x) dx &= [x \ln(x)]_X^{\frac{1}{2}} - \int_X^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - X \ln(X) - \frac{1}{2} + X \end{aligned}$$

On voit que cette quantité converge pour $X \to 0$, donc $\int_0^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^k dx$ *converge pour $k = 1$. La propriété (P_1) est vraie.*

Au passage on peut voir que cette intégration par partie nous montre qu'une primitive de $\ln$ *est* $x\ln(x) - x$*. Nous allons l'utiliser dans ce qui suit.*
Supposons qu'elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ *quelconque et montrons qu'alors elle est vérifiée au rang* $n+1$*.*

On a en intégrant par partie

$$\begin{aligned}
\int_X^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^{n+1} dx &= \int_X^{\frac{1}{2}} \ln(x)(\ln(x))^n dx \\
&= [(x\ln(x) - x)(\ln(x))^n]_X^{\frac{1}{2}} - \int_X^{1/2} (x\ln(x) - x)\frac{n\ln(x)^{n-1}}{x} dx \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n - (X\ln(X) - X)(\ln(X))^n \\
&\quad -n\int_X^{1/2} (\ln(x))^n dx - \int_X^{\frac{1}{2}} n\ln(x)^{n-1} dx
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence les intégrales $\int_X^{1/2} (\ln(x))^n dx$ *et* $\int_X^{\frac{1}{2}} \ln(x)^{n-1} dx$ *convergent pour* $X \to 0$*.*

D'autre part $(X\ln(X) - X)(\ln(X))^n \to 0$ *quand* $X \to 0$ *la fonction* $X \mapsto X$ *l'emportant sur la* $X \mapsto (\ln(X))^n$*.*

Donc on voit que $\lim_{X\to 0} \int_X^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^{n+1} dx$ *existe. De plus par hypothèse pour tout* $1 \leq k \leq n$ *on a* $\lim_{X\to 0} \int_X^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^k dx$ *existe. Donc* P_{n+1} *est vraie si* P_n *est vraie.*

Donc d'après le principe de récurrence P_n *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\int_0^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^n dx$ *converge.*

Donc d'après l'équivalent (1) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ *converge.*

— *Pour traiter l'autre intégrale effectuons un changement de variable* $u = 1 - x$*. On a*

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\ln(1-u))^n}{\sqrt{1-(1-u)^2}} du \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\ln(1-u))^n}{\sqrt{2u-u^2}} du
\end{aligned}$$

Or la fonction $u \mapsto \frac{(\ln(1-u))^n}{\sqrt{2u-u^2}}$ *est de signe constant pour* $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$*. On peut donc utiliser un critère par équivalent pour étudier sa convergence.*

On a donc au voisinage de 0

$$\left|\frac{(\ln(1-u))^n}{\sqrt{2u-u^2}}\right| \sim \frac{u^n}{\sqrt{2u}}$$

Or pour $n \geq 1$ *on a* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} du$ *qui converge. Donc l'intégrale que nous étudions est convergente. Donc en conclusion* u_n *est bien convergente.*

Remarquons que pour $x \in]0,e^{-1}[$ *on a* $\ln(x) < -1$ *et en particulier* $|\ln(x)| > 1$. *Donc à* x *fixé dans* $]0,e^{-1}[$ *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}}\right| = +\infty$.

De plus la suite $f_n : x \mapsto \left|\frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}}\right| \mathbb{1}_{]0,e^{-1}[}$ *est croissante, c'est à dire* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Ces fonctions sont clairement mesurables positives. Donc d'après le théorème de convergence monotone on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\lambda = \int_{n\to+\infty} f_n d\lambda = +\infty$$

Or $|u_n| \geq \int f_n d\lambda$. *Donc* $|u_n| \to +\infty$. *De plus comme* $u_{2n} > 0$ *et* $u_{2n+1} < 0$ *on a aussi* $u_{2n} \to +\infty$ *et* $u_{2n+1} \to -\infty$.